This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

**Usage guidelines**

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

**About Google Book Search**

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

**A propos de ce livre**

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

**Consignes d'utilisation**

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

**À propos du service Google Recherche de Livres**

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

ORD UNIVERSITY LIBRARIES · STANFORD UNIVERSITY LIB
TANFORD UNIVERSITY LIBRARIES · STANFORD UNIVERS
NIVERSITY LIBRARIES · STANFORD UNIVERSITY LIBRAR
BRARIES · STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES STANF
SITY LIBRARIES · STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES · ST
STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES · STANFORD UN
ORD UNIVERSITY LIBRARIES · STANFORD UNIVERSITY LIB
TANFORD UNIVERSITY LIBRARIES · STANFORD UNIVERS
NIVERSITY LIBRARIES · STANFORD UNIVERSITY LIBRAR
BRARIES · STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES STANF
SITY LIBRARIES · STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES · ST
RIES · STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES · STANFORD UN
ORD UNIVER STANFORD UNIVERSITY LIB

STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES
STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES
STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES
STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES
STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES
STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES
STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES
STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES
STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES
STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES

# MATHESIS

THIS ITEM HAS BEEN MICROFILMED BY
STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES
REFORMATTING SECTION 1993. CONSULT
SUL CATALOG FOR LOCATION.

# MATHESIS

## RECUEIL MATHÉMATIQUE

## A L'USAGE DES ÉCOLES SPÉCIALES

## ET DES ÉTABLISSEMENTS D'INSTRUCTION MOYENNE


PUBLIÉ PAR

**P. MANSION** ET **J. NEUBERG**

Ancien élève de l'École normale des sciences, Professeur ordinaire à l'Université de Gand, Membre de l'Académie royale de Belgique, etc.

Ancien élève de l'École normale des sciences, Professeur ordinaire à l'Université de Liège, Correspondant de l'Académie royale de Belgique, etc.

AVEC LA COLLABORATION DE PLUSIEURS PROFESSEURS BELGES ET ÉTRANGERS.


*Ut pictura mathesis!*
PH. BRETON


*DEUXIÈME SÉRIE.*

**TOME II. — ANNÉE 1892.**

(TOME XII DE LA COLLECTION.)

GAND
AD. HOSTE, ÉDITEUR
IMPRIMEUR-LIBRAIRE
47, RUE DES CHAMPS, 47

PARIS
GAUTHIER-VILLARS & FILS
IMPRIMEURS-LIBRAIRES
55, QUAI DES AUGUSTINS, 55

GAND, IMPRIMERIE C. ANNOOT-BRAECKMAN, AD. HOSTE, SUCCESSEUR

1892

## ABRÉVIATIONS.

B. B. Bulletins de l'Académie royale de Belgique.

C. R. Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris.

N. A. M. Nouvelles Annales de Mathématiques (depuis 1842).

N. C. M. Nouvelle Correspondance Mathématique (1874-1880).

J. M. E. (ou J. M. S). Journal de Mathématiques élémentaires (ou Mathématiques spéciales), fondé en 1877 par BOURGET, G. DE LONGCHAMPS.

*Crelle.* Journal de Mathématiques pures et appliquées, fondé par 1826, continué d'abord par BORCHARDT, puis par KR WEIERSTRASS, enfin par KRONECKER (en allemand surtou

*Liouville*, Journal de Mathématiques pures et appliquées, fondé pa en 1836, continué d'abord par RESAL, puis par JORDAN.

(2) III, 327-333 signifie : Deuxième série, tome troisième à 333.

STANFORD LIBRARY
OCT 21 1960
510.5
M429
v.12-13

# MATHESIS

## REMARQUES SUR UN CONTINUANT;

par M. E. Cesàro, professeur à l'Université de Naples.

Le déterminant

$$D_n = \begin{vmatrix} a_0+a_1 & -\lambda_1 a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\lambda_1 a_1 & a_1+a_2 & -\lambda_2 a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda_2 a_2 & a_2+a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-2}+a_{n-1} & -\lambda_{n-1}a_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda_{n-1}a_{n-1} & a_{n-1}+a_n \end{vmatrix},$$

considéré(*) par M. Novarese, est un *continuant*, dans l'acception la plus large du mot. Il est le discriminant de la forme quadratique

$$a_0x_1^2 + a_1(x_1^2+x_2^2-2\lambda_1x_1x_2) + a_2(x_2^2+x_3^2-2\lambda_2x_2x_3) + \cdots + a_nx_n^2.$$

Lorsque $\lambda_i^2$ ne surpasse pas l'unité, on a

$$x_i^2 + x_{i+1}^2 - 2\lambda_i x_i x_{i+1} \geqq (x_i \pm x_{i+1})^2.$$

Si l'on suppose, en outre, que les coefficients $a$ soit positifs, on voit que la forme considérée est essentiellement positive, et, par suite, son discriminant $D_n$ doit être positif. La propriété signalée par M. Novarese est donc démontrée.

Le calcul de $D_n$ n'offre pas de difficultés. On voit immédiatement, en développant $D_{n+1}$ suivant les éléments de la dernière ligne, que

$$D_{n+1} = (a_n + a_{n+1})\,D_n - \lambda_n^2 a_n^2 D_{n-1}.$$

Si l'on pose

$$q_i = \frac{\lambda_i^2 a_i^2}{(a_{i-1}+a_i)(a_i+a_{i+1})}, \qquad Q_i = \frac{D_i}{(a_0+a_1)(a_1+a_2)\cdots(a_{i-1}+a_i)},$$

cette relation devient

$$Q_{n+1} = Q_n - q_n Q_{n-1}. \tag{1}$$

(*) *Mathesis*, (1), X, p. 72; (2), I, 24, question 680.

On trouve ainsi, de proche en proche, en partant de $Q_0 = Q_1 = 1$,

$$Q_2 = 1 - q_1, \quad Q_3 = 1 - q_1 - q_2, \quad Q_4 = 1 - q_1 - q_2 - q_3 + q_1q_3,$$
$$Q_5 = 1 - q_1 - q_2 - q_3 - q_4 + q_1q_3 + q_1q_4 + q_2q_4, \quad \text{etc.}$$

En général, on obtient $Q_n$ en développant le produit

$$(1 - q_1)(1 - q_2)(1 - q_3) \cdots (1 - q_{n-1}),$$

et en y supprimant les termes qui contiennent deux facteurs consécutifs de la succession $q_1, q_2, q_3, \ldots$ Si nous avions développé $D_{n+1}$ suivant les éléments de la première ligne, nous aurions trouvé, au lieu de (1),

$$Q_{n+1} = Q_n^{(1)} - q_1 Q_{n-1}^{(2)}, \tag{2}$$

où $Q_n^{(i)}$ représente ce que devient $Q_n$ lorsqu'on augmente de $i$ tous les indices. On peut écrire

$$Q_n^{(i)} = \begin{vmatrix} 1 & \sqrt{q_{i+1}} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \sqrt{q_{i+1}} & 1 & \sqrt{q_{i+2}} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{q_{i+2}} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \sqrt{q_{i+n-1}} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \sqrt{q_{i+n-1}} & 1 \end{vmatrix}$$

Les formules (1) et (2) sont d'ailleurs comprises dans la suivante :

$$Q_{n+\nu} = Q_n Q_\nu^{(n)} - q_n Q_{n-1} Q_{\nu-1}^{(n+1)}. \tag{3}$$

On obtient (1) et (2) en faisant $\nu = 1$, $n = 1$, respectivement. Pour démontrer la formule (3), il suffit de changer $n$ en $n + 1$. Le second membre devient, en tenant compte de la relation (1),

$$(Q_n - q_n Q_{n-1}) Q_\nu^{(n+1)} - q_{n+1} Q_n Q_{\nu-1}^{(n+2)} = Q_n (Q_\nu^{(n+1)} - q_{n+1} Q_{\nu-1}^{(n+2)}) - q_n Q_{n-1} Q_\nu^{(n+1)};$$

puis, d'après (2), où l'on a augmenté de $n$ les indices des nombres $q$, on trouve

$$Q_{n+\nu+1} = Q_n Q_{\nu+1}^{(n)} - q_n Q_{n-1} Q_\nu^{(n+1)},$$

ce qui est précisément la formule (3), après changement de $\nu$ en $\nu + 1$. On parvient plus directement au même résultat en développant $Q_n$ suivant les lignes qui se croisent en un élément quelconque de la diagonale principale.

On peut encore obtenir le développement de $Q_n$ par une théorie

analogue à celle des déterminants pseudosymétriques. En effet, le déterminant

$$\begin{vmatrix} 0 & \sqrt{q_1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \sqrt{q_1} & 0 & \sqrt{q_2} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{q_2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \sqrt{q_{n-1}} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \sqrt{q_{n-1}} & 0 \end{vmatrix}$$

est, au signe près, un déterminant hémisymétrique ; car il suffit de changer les signes des termes de la première ligne, de la troisième, de la cinquième, etc., pour l'amener à la forme hémisymétrique. Il est donc nul lorsque $n$ est impair : il équivaut, pour $n$ pair, à une fonction rationnelle et entière, du degré $\frac{1}{2}n$, de $q_1$, $q_2$, $q_3$, ... On peut donc écrire

$$\begin{vmatrix} x & \sqrt{q_1} & 0 & \cdots \\ \sqrt{q_1} & x & \sqrt{q_2} & \cdots \\ 0 & \sqrt{q_2} & x & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} = x^n - \varphi_1 x^{n-2} + \varphi_2 x^{n-4} - \cdots,$$

où $\varphi_i$ représente une forme algébrique, renfermant les variables $q$ au degré $i$. En particulier

$$Q_n = 1 - \varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_3 + \cdots$$

Dans le déterminant particulier, considéré par M. Novarese, les quantités $q$ sont des fractions proprement dites; mais elles ne sont pas arbitraires. Il suffit de remarquer, pour s'en convaincre, que la somme $q_n + q_{n+1}$ est elle même comprise entre 0 et 1, ou que tout nombre $q_n$ ne surpasse jamais le produit de $1 - q_{n-1}$ par $1 + q_{n+1}$; etc. Dans ce cas, on voit, au moyen de (1), que les nombres *positifs* $Q_1$, $Q_2$, $Q_3$, ... vont en décroissant : ils tendent donc vers une limite Q, positive ou nulle. Remarquons que $Q = 0$ lorsque $q_n$ ne tend pas vers zéro. L'existence d'une limite de $Q_n$, autre que zéro, suffit pour la convergence de la fraction continue

$$f = 1 - \cfrac{q_1}{1 - \cfrac{q_2}{1 - \cfrac{q_3}{1 - \cdots}}}$$

En effet, la $n^{ième}$ réduite est, en vertu de la loi de formation (1),

$$f_n = \frac{Q_n}{Q_{n-1}^{(1)}}.$$

Donc, si $F(q_1, q_2, q_3, \cdots)$ est la limite de $Q_n$, pour $n$ infini, on a

$$f = \frac{F(q_1, q_2, q_3, \cdots)}{F(q_2, q_3, q_4, \cdots)}.$$

Mais $Q_n$ peut tendre vers zéro sans nuire à la convergence de $f_n$. Par exemple, si l'on prend

$$q_1 = q_2 = \cdots = \frac{1}{4},$$

on a

$$Q_n = Q_n^{(1)} = \frac{n+1}{2^n}, \quad f_n = \frac{n+1}{2n}, \quad f = \frac{1}{2}.$$

L'égalité $Q_n = Q_n^{(1)}$ subsiste toutes les fois que les nombres $q_1, q_2, q_3, \ldots$ sont égaux entre eux. Si $q$ est leur valeur commune, on a

$$Q_n = \frac{(1+\sqrt{1-4q})^{n+1} - (1-\sqrt{1-4q})^{n+1}}{2^{n+1}\sqrt{1-4q}},$$

c'est-à-dire

$$Q_n = 1 - C_{n-1,1}q + C_{n-2,2}q^2 - C_{n-3,3}q^3 + \cdots,$$

et, par suite,

$$f = lim \frac{Q_n}{Q_{n-1}} = \frac{1+\sqrt{1-4q}}{2}.$$

Il suffit que le terme principal du déterminant de M. Novarese tende vers une limite

$$P = (a_0 + a_1)(a_1 + a_2)(a_2 + a_3)\ldots$$

pour pouvoir affirmer que le déterminant même admet une limite finie et déterminée, lorsque son ordre croît indéfiniment. On a vu, en effet, que la limite de $Q_n$ existe nécessairement, et, par suite, on a

$$lim\, D_n = PQ.$$

Ce déterminant se présente dans le calcul de la fraction continue

$$f = a_0 + a_1 - \cfrac{\lambda_1^2 a_1^2}{a_1 + a_2 - \cfrac{\lambda_2^2 a_2^2}{a_2 + a_3 - \cfrac{\lambda_3^2 a_3^2}{a_3 + a_4 - \cdots}}}$$

...res sont précisément

$$\frac{D_2}{D_1^{(1)}},\quad \frac{D_3}{D_2^{(1)}},\quad \frac{D_4}{D_3^{(1)}},\quad \cdots$$

...lier remarquable : c'est celui où $\lambda = \pm 1$, pour ...rs

$$a_0 a_1 a_2 \ldots a_n \left(\frac{1}{a_0} + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right);$$

$$f = a_0 + \frac{1}{lim\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right)}.$$

par exemple, que $(-1)^n a_n$ soit la somme des $n$ premiers ...la série divergente $u_1 + u_2 + \cdots$, à termes positifs. La série

$$\frac{1}{s_1} - \frac{1}{s_2} + \frac{1}{s_3} - \frac{1}{s_4} + \cdots$$

...vergente : soit $\sigma$ la somme. On a, d'après ce qui précède,

$$\frac{1}{\sigma} = u_1 + \cfrac{s_1^2}{u_2 + \cfrac{s_2^2}{u_3 + \cfrac{s_3^2}{u_4 + \cdots}}}$$

Ainsi, lorsqu'on fait $u_n = 2n - 1$, il vient d'abord

$$s_n = n^2, \quad \sigma = 1 - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{9} - \tfrac{1}{16} + \cdots;$$

puis

$$\frac{12}{\pi^2} = 1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{2^4}{5 + \cfrac{3^4}{7 + \cdots}}}$$

Un autre calcul, offrant quelque intérêt, est celui du déterminant $\Delta_n$, réciproque de $D_n$. On trouve sans peine que le mineur complémentaire de l'élément défini par les indices $i$ et $j \geq i$, est

$$\lambda_i \lambda_{i+1} \cdots \lambda_{j-1} a_i a_{i+1} \cdots a_{j-1} D_{i-1} D_{n-j}^{(j)}.$$

Maintenant, si l'on observe que le déterminant

$$\begin{vmatrix} \alpha_1\beta_1 & \alpha_1\beta_2 & \alpha_1\beta_3 & \dots & \alpha_1\beta_n \\ \alpha_1\beta_2 & \alpha_2\beta_2 & \alpha_2\beta_3 & \dots & \alpha_2\beta_n \\ \alpha_1\beta_3 & \alpha_2\beta_3 & \alpha_3\beta_3 & \dots & \alpha_3\beta_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_1\beta_n & \alpha_2\beta_n & \alpha_3\beta_n & \dots & \alpha_n\beta_n \end{vmatrix}$$

a pour valeur

$$\alpha_1\beta_n\,(\alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2)\,(\alpha_3\beta_2 - \alpha_2\beta_3)\dots(\alpha_n\beta_{n-1} - \alpha_{n-1}\beta_n),$$

on obtient

$$\Delta_n = \prod_{i=1}^{i=n-1} (D_i D_{n-i}^{(i)} - \lambda_i^2 a_i^2 D_{i-1} D_{n-i-1}^{(i+1)})$$

D'après (3), la quantité entre parenthèses n'est autre que $D_n$, quel que soit $i$. Donc $\Delta_n = D_n^{n-1}$, ce qui est une vérification.

La connaissance des mineurs complémentaires permet de résoudre beaucoup d'autres questions. Par exemple, remarquons d'abord que l'expression du mineur complémentaire devient

$$a_0 a_1 a_2 \dots a_n \left(\frac{1}{a_0} + \frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_{i-1}}\right)\left(\frac{1}{a_j} + \frac{1}{a_{j+1}} + \dots + \frac{1}{a_n}\right)$$

lorsque les nombres $\lambda$ sont tous égaux à l'unité. Un calcul facile montre ensuite que leur somme peut être mise sous la forme

$$a_0 a_1 a_2 \dots a_n\,(\sigma_1 + 4\sigma_2 + 9\sigma_3 + \dots + n^2\sigma_n),$$

où

$$\sigma_i = \frac{1}{a_0 a_i} + \frac{1}{a_1 a_{i+1}} + \frac{1}{a_2 a_{i+2}} + \dots + \frac{1}{a_{n-i} a_n}.$$

Il en résulte, en vertu d'une propriété connue, que le déterminant

$$\begin{vmatrix} x + a_0 + a_1 & x - a_1 & 0 & \dots & 0 \\ x - a_1 & x + a_1 + a_2 & x - a_2 & \dots & 0 \\ 0 & x - a_2 & x + a_2 + a_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x + a_{n-1} + a_n \end{vmatrix}$$

a pour valeur

$$a_0 a_1 a_2 \dots a_n \left[\frac{1}{a_0} + \frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n} + x\,(\sigma_1 + 4\sigma_2 + \dots + n^2\sigma_n)\right].$$

minant *essentiellement positif* de M. Novarese est susceptible
s généralisations. Par exemple, le déterminant

$$\begin{vmatrix} -(\lambda_1 a_1 + \mu_2 a_2) & -\nu_2 a_2 & 0 & 0 & \cdots \\ a_1 + a_2 + a_3 & -(\lambda_2 a_2 + \mu_3 a_3) & -\nu_3 a_3 & 0 & \cdots \\ -(\lambda_2 a_2 + \mu_3 a_3) & a_2 + a_3 + a_4 & -(\lambda_3 a_3 + \mu_4 a_4) & -\nu_4 a_4 & \cdots \\ -\nu_3 a_3 & -(\lambda_3 a_3 + \mu_4 a_4) & a_3 + a_4 - a_5 & -(\lambda_4 a_4 + \mu_5 a_5) & \cdots \\ 0 & -\nu_4 a_4 & -(\lambda_4 a_4 + \mu_5 a_5) & a_4 + a_5 + a_6 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$$

pourvu que $a_0, a_1, a_2, \cdots$ soient positifs, et que, $\lambda_i, \mu_i, \nu_i$ ne
pas l'unité en valeur absolue, on ait, pour toute valeur de $i$,

$$\lambda_i^2 + \mu_i^2 + \nu_i^2 \leqq 1 + 2\lambda_i \mu_i \nu_i.$$

el que

core donner au déterminant proposé la forme que voici :

soudre

d que

$$\begin{vmatrix} a_1 + b_1 & -c_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -c_1 & a_1 + b_2 & -c_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -c_2 & a_2 + b_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-2} + b_{n-1} & -c_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -c_{n-1} & a_{n-1} + b_n \end{vmatrix}$$

ontre

rminant est positif, pourvu que les nombres $a$ et les nombres $b$
itifs, et que l'on ait $c_i^2 < a_i b_i$ pour toute valeur de $i$. Plus
ent, considérons les tableaux

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots \\ a_{21} & 0 & a_{23} & \cdots \\ a_{31} & a_{32} & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 0 & b_{12} & b_{13} & \cdots \\ b_{21} & 0 & b_{23} & \cdots \\ b_{31} & b_{32} & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}.$$

nt

rmant pas d'éléments négatifs. Soit $\alpha_i$ la somme des éléments
ième rangée du premier tableau, $\beta_i$ la somme des éléments de
colonne du second tableau. Le déterminant

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 + \beta_1 & c_{12} + c_{21} & c_{13} + c_{31} & \cdots \\ c_{12} + c_{21} & \alpha_2 + \beta_2 & c_{23} + c_{32} & \cdots \\ c_{13} + c_{31} & c_{23} + c_{32} & \alpha_3 + \beta_3 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$$

est positif, si les nombres $c$ satisfont aux conditions

$$c_{ij}^2 < a_{ij} b_{ij}.$$

Le déterminant de M. Novarese dérive des tableaux

$$\begin{vmatrix} 0 & a_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & a_2 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & a_3 & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & b_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & b_2 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & b_3 & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}.$$

Enfin, il est facile de construire une infinité d'autres déterminants, qui aient la propriété de rester toujours positifs. Il suffit de combiner linéairement, au moyen de coefficients positifs, un nombre quelconque de formes quadratiques, *essentiellement positives*. Le discriminant de la forme résultante ne peut être que positif.

---

## SUR LA DÉFINITION DE LA DÉRIVÉE;

par M. G. Peano, professeur à l'Université de Turin.

La définition ordinaire est la suivante :

A. *La dérivée de $f(x)$ est la limite de $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, lorsque, $x$ étant fixe, $h$ tend vers zéro.*

On pourrait aussi prendre cette autre définition :

B. *La dérivée de $f(x)$ est la limite du rapport $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ lorsque $x_1$ et $x_2$ tendent vers la même valeur $x$.*

Les deux définitions ne sont pas tout à fait équivalentes.

Si $f(x)$ a une dérivée selon la définition A, *et si cette dérivée est continue*, elle a aussi la même dérivée d'après la définition B. En effet, de la formule connue

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(u),$$

où $u$ est une valeur comprise entre $x_1$ et $x_2$, en supposant la continuité de $f'(x)$, on déduit

$$\lim_{x_1=x_2=x} \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(x).$$

Réciproquement, si $f(x)$ a une dérivée selon la définition B, elle a aussi la même dérivée selon la définition A, et cette dérivée est continue ; en d'autres termes, *si $f(x)$ a une dérivée suivant la définition* B, *cette dérivée est continue*. En effet, soit $\alpha$ une quantité positive arbitrairement petite. Puisque

$$\lim \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(x),$$

on peut déterminer un intervalle $(x - h,\ x + h)$, tel que l'on ait

$$\left| \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - f'(x) \right| < \alpha (*), \qquad (1)$$

quelles que soient les valeurs de $x_1$ et $x_2$ dans cet intervalle.

Soit $x'$ une valeur quelconque dans cet intervalle. Si $x_1$ et $x_2$ ont pour limite $x'$, elles finiront par être comprises dans le même intervalle, et alors elles satisferont à la condition (1); et en passant à la limite, on a

$$| f'(x') - f'(x) | \leq \alpha$$

d'où l'on déduit la continuité de $f'(x)$.

Donc, en partant de la définition A, on comprend les cas où la dérivée est discontinue; en adoptant la définition B, on les exclut. Laquelle des deux définitions est préférable ?

Dans l'enseignement élémentaire il est peut-être préférable d'exclure ces cas de discontinuité, en partant de la définition B; et alors, au lieu de dire, dans plusieurs théorèmes : *si $f(x)$ a une dérivée continue*, il suffit de dire : *si $f(x)$ a une dérivée.*

La définition B correspond à des définitions analogues généralement admises en mécanique et en physique mathématique. Par exemple, la *densité* d'un corps, en un de ses points P, est la limite du rapport de la masse d'une portion du corps à son volume, lorsque tous les points de cette portion tendent vers P. En supposant le système matériel linéaire, la définition analogue est : la densité d'une ligne matérielle au point P est la limite du rapport entre la masse et la longueur d'une portion de la ligne, dont les points tendent vers P; et non d'une portion de la ligne dont une extrémité est P et dont l'autre tend vers P.

---

(*) $|a|$ indique la valeur absolue de $a$.

***

Lorsque on part de la définition A, si $f(x)$ n'a pas de dérivée, on étudie les dérivées à gauche et à droite, et, au défaut de celles-ci, les quatre valeurs extrêmes oscillatoires, supérieures et inférieures, à droite et à gauche. En prenant la définition B, la question se simplifie. Soit $x$ une valeur de la variable ; considérons un intervalle $(x-h, x+h)$ ; tous les rapports $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$, où $x_1$ et $x_2$ sont compris dans l'intervalle considéré, sont à leur tour compris entre leur limite inférieure $\alpha$ et leur limite supérieure $\beta$. Si $h$ tend vers 0, $\alpha$ et $\beta$, qui varient, la première en croissant, la deuxième en décroissant, tendent vers des limites que je désigne ici par $f_1(x)$ et $f'(x)$, et l'on a $f_1(x) \leqq f'(x)$. Si $f_1(x) = f'(x)$, leur valeur commune est la dérivée de $f(x)$, selon la définition B. Si $f_1(x) < f'(x)$, l'ensemble de ces deux fonctions, toujours existantes, joue le rôle de la dérivée ; et il serait intéressant d'en étudier les propriétés. En voici deux assez simples :

1. Si $\alpha$ est une quantité arbitrairement petite, on peut déterminer un intervalle $x-h, x+h$, tel que pour toute valeur $x'$ de $x$ dans cet intervalle, on ait

$$f_1(x) - \alpha < f_1(x') < f'(x') < f'(x) + \alpha.$$

2. Le rapport $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ est compris entre les valeurs de $f_1(x)$ et $f'(x)$ correspondant à une même valeur de $x$ qu'on peut déterminer dans l'intervalle $(a, b)$.

---

## FORMULES POUR LE JAUGEAGE DES TONNEAUX.

I. « La question du jaugeage des tonneaux se rattache à la mesure du tronc de cône.

« En considérant le tonneau comme la somme de deux troncs de cône identiques opposés par leur grande base, on aurait la formule

$$V = \tfrac{1}{3}\pi H(R^2 + r^2 + Rr),$$

dans laquelle H est la hauteur totale du double tronc, $r$ le rayon du fond et R le rayon de la grande base à laquelle on donne le nom de *bouge*. Mais cette formule donne évidemment un résultat trop faible. En introduisant suivant l'usage, les diamètres $\Delta$ et $\delta$ au lieu des rayons R et $r$, et ayant égard à l'identité

$$\Delta^2 + \delta^2 = 2\Delta\delta + (\Delta - \delta)^2,$$

on peut mettre la formule précédente sous la forme

$$V = \frac{\pi}{4} H\Delta\delta + \frac{\pi}{12} H(\Delta - \delta)^2.$$

Or, le dernier terme est négligeable, car son rapport

$$\frac{1}{3}\left(\frac{\Delta - \delta}{\sqrt{\Delta\delta}}\right)^2$$

au précédent, ne dépasse guère un demi-centième dans les conditions ordinaires, ce qui correspond à une erreur d'un demi-litre par hectolitre.

Mais alors la formule réduite $V = \frac{\pi}{4} H\Delta\delta$ est *a fortiori* un peu trop faible. Aussi, par compensation, les tonneliers remplacent-ils le coefficient $\frac{\pi}{4} = 0{,}785$ par 0,8; ce qui conduit à la formule très simple $V = (0{,}8)\, H\Delta\delta$, qui donne le volume, en mètres cubes, lorsque H, $\Delta$, $\delta$ sont évalués en prenant le mètre pour unité. Pour avoir le volume en hectolitres, il suffit de multiplier par 10; c'est ce que l'on fait habituellement, et on parvient ainsi à la formule définitive :

$$V = 8H\Delta\delta$$

qui est généralement employée dans le Midi de la France, et dont de nombreuses expériences ont permis de constater la suffisante exactitude. Pour $H = 0^m{,}756$, $\Delta = 0^m{,}69$, $\delta = 0^m{,}61$, cette formule donne $V = 254$. » (Rouché et de Comberousse, *Traité de Géométrie*, 6me édition, 1891, t. II, pp. 154-155, n° 769.)

II. Posons

$$V_1 = \tfrac{1}{3}\pi H(R^2 + r^2 + Rr) = \tfrac{1}{12}\pi H(\Delta^2 + \delta^2 + \Delta\delta)$$
$$V_2 = 0{,}8H\Delta\delta$$

Le volume $V_1$ est évidemment une limite inférieure du volume du

tonneau. Voyons pour quelle valeur du rapport $x = (\Delta : \delta)$, $V_2$ surpasse $V_1$. De l'inégalité $V_1 < V_2$, ou

$$\tfrac{1}{12}\pi H(\Delta^2 + \delta^2 + \Delta\delta) < 0{,}8H\Delta\delta,$$

on déduit, en observant que $\pi = 12 \times 0{,}2618$,

$$2618(x^2 + 1 + x) < 8000x,$$

puis successivement,

$$2618x^2 - 5382x + 2618 < 0,$$

$$x^2 - 2.\frac{2691}{2618}x + \left(\frac{2691}{2618}\right)^2 < \left(\frac{2691}{2618}\right)^2 - 1,$$

$$x - \frac{2691}{2618} < \sqrt{\left(\frac{2691}{2618}\right)^2 - 1},$$

$$x - 1 - \frac{73}{2618} < \frac{\sqrt{387557}}{2618}$$

$$x - 1 - \frac{73}{2618} < \frac{623}{2618}$$

$$x < 1 + \frac{1}{4} + \frac{41\frac{1}{2}}{2618}.$$

Il résulte des calculs précédents que si $x$ est inférieur ou égal à $1\frac{1}{4}$, ce qui a presque toujours lieu, la formule $V_2 = 0{,}8H\Delta\delta$ donne un résultat supérieur à $V_1$.

Mais l'écart entre $V_2$ et $V_1$ n'est jamais très grand. En effet, le rapport $k = (V_2 - V_1) : V_2$ est égal à

$$\frac{5382x - 2618x^2 - 2618}{8000x} = \frac{5382}{8000} - \frac{2618}{8000}\left(x + \frac{1}{x}\right).$$

Le maximum de $k$ correspond au minimum de $x + \frac{1}{x}$, somme de deux quantités dont le produit est constant. On obtiendra donc ce maximum en faisant $x = \frac{1}{x}$ ou $x = 1$. On trouve, pour cette valeur de $x$, la valeur suivante pour $k$ :

$$k = \frac{5382 - 5236}{8000} = \frac{146}{8000} = 0{,}01825 < \frac{1}{50}$$

III. On a donné diverses formules pour le jaugeage des tonneaux. L'une des plus connues est celle d'Oughtred :

$$V_3 = \frac{1}{12}\pi H(2\Delta^2 + \partial^2) = 0{,}2618H(2\Delta^2 + \partial^2)$$

obtenue en remplaçant dans $V_1$, $\Delta\partial$ par la quantité plus grande $\Delta^2$(*). Dans la première édition de leur Traité, MM. Rouché et de Comberousse proposaient la formule

$$V_4 = \frac{1}{24}\pi H(5\Delta^2 + 4\partial^2).$$

Dez, au siècle dernier, a indiqué la suivante, selon lui, très exacte :

$$V_5 = \frac{1}{256}\pi H(5\Delta + 3\partial)^2.$$

On en obtient une assez compliquée, savoir :

$$V_6 = \frac{1}{60}\pi H(8\Delta^2 + 4\Delta\partial + 3\partial^2)$$

en assimilant le tonneau à un solide de révolution dont le méridien est une parabole ayant son sommet à la bonde. L'expression $V_6$ est probablement une limite supérieure de la capacité du tonneau. On trouve aisément que l'on a

$$V_1 < V_4 < V_6,$$
$$V_1 < V_5 < V_6.$$

Mais $V_5$, qui s'obtient en remplaçant $4\Delta\partial$ dans $V_6$, par la quantité plus grande $2(\Delta^2 + \partial^2)$, est supérieure à $V_6$. Elle donne donc probablement des résultats trop forts.

IV. *Exemple.* Soit, comme plus haut, $H = 0^m,756$, $\Delta = 0^m,69$, $\partial = 0^m,61$. On trouve, en litres,

$$V_1 = 251{,}2$$
$$V_2 = 254{,}6$$
$$V_3 = 261{,}9$$
$$V_4 = 255{,}2$$
$$V_5 = 258{,}6$$
$$V_6 = 261{,}4$$

La formule pratique $V_2 = 0{,}8H\Delta\partial$ semble devoir être très exacte surtout lorsque les douves sont presque droites. (P. M.)

---

(*) On l'obtient aussi par application de la formule de Simpson $\frac{1}{6}H(y_0 + 4y_1 + y_2)$, si l'on suppose $y = \pi\varpi^2$, $\varpi$ étant le rayon variable du tonneau.

## NÉCROLOGIE.

---

# LÉOPOLD KRONECKER.

Au moment de mettre sous presse, nous apprenons la mort de l'illustre géomètre, LÉOPOLD KRONECKER, professeur à l'Université de Berlin, membre de l'Académie des Sciences de cette ville et Correspondant de l'Institut de France, décédé le 29 décembre 1891 à l'âge de 68 ans.

L. KRONECKER était sans contredit le plus éminent représentant des méthodes arithmétiques pures dans le domaine de l'analyse algébrique et infinitésimale.

Ses *Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen*, ses autres écrits sur les principes fondamentaux de l'arithmétique et de l'analyse supérieures et, en particulier, ses recherches sur la multiplication complexe des fonctions elliptiques, auront, nous n'en doutons pas, une influence toujours de plus en plus grande dans le domaine entier des mathématiques.

Les principaux mémoires de L. KRONECKER ont été publiés dans le *Journal de Crelle*, dans les *Bulletins* de l'Académie de Berlin et dans les *Comptes rendus* de l'Académie des Sciences de Paris. Le n° du 28 décembre 1891 de ce dernier recueil contient encore une importante note de lui sur une question difficile. Nos lecteurs ont pu se faire une idée de la rigueur qu'il exigeait dans les démonstrations mathématiques, en lisant ses remarques sur le second principe de la moyenne, qu'il a bien voulu insérer dans *Mathesis* (1885 (1), V, pp. 97-102).

P. M. et J. N.

## REVUE BIBLIOGRAPHIQUE.

***Traité de Géométrie analytique à trois dimensions*** par G. SALMON, professeur à l'Université de Dublin. Ouvrage traduit de l'anglais sur la quatrième édition par O. CHEMIN, Professeur à l'École des Ponts et Chaussées. Deuxième partie. Théorie générale des Surfaces. Courbes gauches et surfaces développables. Familles de surfaces. Paris, Gauthier-Villars et fils, 1891 (X-295 pages in-8°). Prix : 6 francs.

Le fascicule dont nous venons de transcrire le titre contient trois chapitres du célèbre Traité de Salmon. Le premier fascicule consacré aux surfaces du premier et du second degré a paru en 1882. Voici un aperçu rapide des sujets qui sont traités dans le second :

*Théorie générale des surfaces.* Plan tangent; tangentes conjuguées; points coniques; cône circonscrit; hessien. Courbure des lignes tracées sur les surfaces; lignes de courbure; lignes géodésiques.

*Courbes gauches et surfaces développables.* Propriétés projectives; singularités. Classification des courbes. Propriétés non projectives, plan osculateur, développées, etc. Courbure d'une surface; déformation; coordonnées géodésiques.

*Familles de surfaces.* Équations aux dérivées partielles des cylindres, des cônes, des conoïdes, des surfaces de révolution, des surfaces réglées, des surfaces canaux. Complexes, congruences, surfaces réglées. Surfaces orthogonales.

---

***Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*** von MORITZ CANTOR. Zweiter Band. Von 1200-1668. Erster Theil. Leipzig, Druck und Verlag von B. G. Teubner, 1892 (499 pages in-8°).

Le premier volume du bel ouvrage de M. Cantor a paru en 1880. Il contient l'histoire des mathématiques depuis les temps les plus reculés jusque l'an 1200 pour l'Europe et l'histoire complète de cette science chez les Hindous, les Arabes et les Chinois (Voir *Mathesis* (1), II, pp. 11-16). On sait que ce premier volume de M. Cantor a provoqué, dans une foule de directions, des recherches remarquables où sont approfondies diverses questions traitées par l'éminent professeur de Heidelberg.

Nous ne doutons pas que le second volume de ses *Vorlesungen* ne soit, comme le premier, le point de départ d'études variées sur les mathématiques de la seconde partie du Moyen-âge, de la Renaissance, et du premier siècle de la période moderne. Dans la première partie de ce second volume, voici les principaux sujets abordés par l'auteur :

*Le treizième siècle.* 1. Léonard de Pise et son *Liber Abaci.* 2. Les autres écrits de Léonard de Pise. 3. Jordanus Nemorarius. Son *Arithmetica* et l'*Algorithmus demonstratus.* 4. *De numeris datis. De triangulis* (Jordanus Nemorarius est identifié par l'auteur, contrairement à l'avis de Denifle, avec Jordanus Saxo, le second général

des Dominicains). 5. Johannes de Sacrobosco, Johannes Campanus. Autres mathématiciens, entre autres Wilhem van Moerbeke, traducteur d'Archimède.

*Le quatorzième siècle.* 1. Mathématiciens anglais (Bradwardine). 2. Mathématiciens français (Oresme). 3. Mathématiciens allemands (Albert de Saxe, Henri de Hesse). 4. Mathématiciens italiens.

*La première moitié du quinzième siècle.* 1. Johann von Gemunden. Purbach. 2. Nicolas de Cusa. 3. Mathématiciens italiens. (Prosdocimo de' Beldomandi, Jacques de Crémone).

*La seconde moitié du quinzième siècle.* 1. Le calcul sur des lignes. Le livre de calcul de Bamberg. 2. J. Widmann et les débuts de l'Algèbre en Allemagne. 3. Les Universités allemandes : Regiomontanus. 4. La première édition imprimée d'Euclide (1482). Alberti. Léonard de Vinci. L'arithmétique de Trévise. 5. Luca Paciulo. 6. Autres italiens. Les mathématiciens français, Chuquet et Lefèbvre.

*La première moitié du seizième siècle.* 1. Mathématiciens français, espagnols, portugais. 2. Mathématiciens dans les Universités allemandes et à l'université de Louvain (rangée abusivement parmi les Universités allemandes). 3. Autres arithméticiens et algébristes allemands (Rudolff, Riese). 4. Stiefel. 5. Les géomètres allemands (Dürer, Copernic, etc.). 6. Mathématiciens italiens. L'équation du troisième degré. 7. Cardan. 8. Tartaglia (M. Cantor semble peu favorable à celui-ci).

L'auteur a surtout étudié les écrits de Léonard de Pise, de Nemorarius, de Cusa, de Regiomontanus, de Paciulo, de Stifel, de Cardan et de Tartaglia.

---

*Annuaire pour l'an* 1892, *publié par le Bureau des Longitudes.* Avec des notices scientifiques. Paris, Gauthier-Villars et fils, 1892 (878 p. in-18, avec figures et 2 cartes magnétiques). Prix : fr. 1,50.

Outre les renseignements pratiques qu'il contient chaque année, l'*Annuaire du Bureau des Longitudes* pour 1892 renferme des articles et des tableaux sur les Monnaies, la Statistique, la Géographie, la Minéralogie, la Physique, la Chimie. On y trouve, en particulier, le tableau des parallaxes stellaires par M. Loewy, celui des mouvements propres des étoiles, dû à M. Bossert ; un autre de M. Cornu sur les spectres stellaires ; un article court, mais excellent, de M. Sarrau sur le point critique. Le volume se termine par les Notices suivantes : 1. *Notice sur la 3e réunion du Comité international permanent, pour l'exécution photographique de la Carte du Ciel, à l'Observatoire de Paris, en avril* 1891 ; par le Contre-Amiral Mouchez. 2. *Notice sur la Lune et son accélération séculaire* ; par F. Tisserand. 3. *Discours de l'Association géodésique internationale, tenue à Florence, le 8 octobre* 1891 ; par A. Bouquet de la Grye. 4. *Les Observatoires de montagne. Un Observatoire au Mont Blanc*, par J. Janssen. 5. *Sur la Mire lointaine de l'Observatoire de Nice*, par A. Cornu. 6. *Discours prononcé à l'inauguration de la statue du chevalier de Borda, à* [illegible] *le 24 mai* 1891 ; par A. Bouquet de la Grye et le Vice-Amiral Paris. [illegible] nous devons signaler spécialement au lecteur celle de M. Tisserand sur la Lune : on y apprendra les difficultés que rencontrent les astronomes lorsqu'ils doivent rendre compte minutieusement des

mouvements de la Lune et des autres astres du système solaire, au moyen de l'attraction newtonienne seule.

---

*Galilée et la Belgique.* Essai historique sur les vicissitudes du système de Copernic en Belgique (17e et 18e siècles) par le Dr G. Monchamps, professeur de Philosophie au séminaire de Saint-Trond. Saint-Trond, G. Moreau; Bruxelles, Société belge de librairie; Paris, Retaux et fils 1892 (346 p. in-12, 76 p. de documents).

M. G. Monchamps, auteur comme on le sait, d'une *Histoire du Cartésianisme en Belgique*, qui est un modèle de monographie historique complète, vient de publier sur l'histoire du système copernicien en Belgique une étude tout aussi consciencieuse et écrite avec la même compétence. Un chapitre est consacré à l'affaire de Galilée à Rome en 1616 et en 1633, les onze suivants à l'histoire des idées astronomiques en Belgique pendant le 17e siècle; les chapitres XIII-XXII aux deux procès ou plutôt aux deux conflits de Martin Van Velden, professeur de philosophie à l'Université de Louvain, avec la faculté des Arts et le Recteur de cette Université, à propos du système de Copernic(*). Le dernier chapitre traite du système de Copernic au 18e siècle.

Conclusion de l'auteur : les découvertes de Galilée ont été accueillies avec enthousiasme en Belgique; cet enthousiasme n'a guère été refroidi par les condamnations de 1616 et de 1633, parce que les hommes instruits de ce temps en connaissaient parfaitement la portée et la non-irréformabilité.

---

*Traité de Géométrie*, par E. Rouché, professeur au Conservatoire des Arts et Métiers, examinateur de sortie de l'École Polytechnique et Ch. de Comberousse, professeur au Conservatoire des Arts et Métiers et à l'École centrale. Sixième édition, revue et augmentée. Paris, Gauthier-Villars et fils, 1891 (2 vol. de XXXV-499 et XIX-616 pages, in-8e). Prix : fr. 7,50 + 9,50.

Sommaire. *Préface :* Histoire de la géométrie. *Géométrie plane. Livre I.* La ligne droite. *Livre II.* La circonférence de cercle. *Appendice :* Méthodes de résolution des problèmes. *Livre III.* Les figures semblables. *Appendice :* Introduction à la géométrie supérieure. *Livre IV.* Les aires. *Appendice :* Aires et longueurs approchées; maximums et minimums des figures planes. *Questions proposées* (530 questions classées). *Note I.* Mesure des grandeurs. *Note II.* Sur l'impossibilité de la quadrature du cercle. *Note III.* Note sur la géométrie récente du triangle.

*Géométrie dans l'espace. Livre V.* Le plan. *Appendice :* Quadrilatère gauche; perspective. *Livre VI.* Les polyèdres. *Appendice :* propriétés générales des polyèdres; centre de gravité; homologie. *Livre VII.* Les corps ronds. *Appendice :*

---

(*) C'est la publication, incomplète au moins, de l'histoire de ces conflits, faite par M. l'ingénieur Stévart, en 1871, puis en 1890, 1891, qui a été l'occasion du livre de M. Monchamps.

Théorème de Guldin; maximums; polyèdres réguliers; homothétie; pôles et polaires; inversion; géométrie sphérique. *Livre VIII.* Les coniques et l'hélice. *Questions proposées* (568). *Appendice.* Géométrie supérieure : homographie, involution, coniques, surface des ondes, tore. *Note I.* De l'application des déterminants à la géométrie. *Note II.* Sur la géométrie non-euclidienne. *Note III.* Sur la géométrie récente du tétraèdre.

Pour se faire une juste idée des améliorations introduites par MM. Rouché et de Comberousse dans leur Traité, il faut comparer la première édition qui a été publiée en 1866, sous le titre : *Traité de géométrie élémentaire* (XXIII-776 pages), à la sixième qui vient de paraître et qui est plus étendue de moitié (370 pages de plus, la plupart en petit texte). Les appendices aux livres III et VIII, qui constituent un excellent manuel de géométrie supérieure, ont surtout reçu des développements considérables. Les notes relatives à l'impossibilité de la quadrature du cercle (d'après Lindemann), à la géométrie non-euclidienne ont déjà paru dans la cinquième édition; les deux notes sur la géométrie récente (92 pages), dues à M. Neuberg, sont une excellente addition à la sixième. Nous publierons plus tard un compte rendu critique de cette dernière édition. (P. M.)

---

## SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

### Question 712.

(Voir *Mathesis*, [illegible])

*Les droites* AM, BM, CM *rencontrent les côtés du triangle* ABC *en* $A_1$, $B_1$, $C_1$; *les côtés du triangle* $A_1B_1C_1$ *en* $A_2$, $B_2$, $C_2$; *les côtés du triangle* $A_2B_2C_2$ *en* $A_3$, $B_3$, $C_3$, *et ainsi de suite. Soient* $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ *les coordonnées barycentriques de* M *par rapport au triangle* ABC. *On propose de trouver : 1° les coordonnées des points* $A_1$, $B_1$, $C_1$, $A_2$, ...; *2° celles de* M *par rapport aux triangles* $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, ...; *3° les aires de ces triangles* (*).

(J. Neuberg.)

Soient [illegible] les coordonnées barycentriques absolues de M par rapport aux triangles [illegible] $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ ... M étant

---

(*) [illegible]

le centre de gravité, pour les poids $\alpha_1$, $\beta_1$, $\gamma_1$ des points $A_1$, $B_1$, $C_1$ qui ont pour coordonnées absolues

$$\left(0, \frac{\beta}{\beta+\gamma}, \frac{\gamma}{\beta+\gamma}\right), \quad \left(\frac{\alpha}{\alpha+\gamma}, 0, \frac{\gamma}{\alpha+\gamma}\right), \quad \left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}, \frac{\beta}{\alpha+\beta}, 0\right),$$

on a

$$\alpha = \left(\frac{\alpha\beta_1}{\alpha+\gamma} + \frac{\alpha\gamma_1}{\alpha+\beta}\right) : (\alpha_1+\beta_1+\gamma_1), \text{ etc.};$$

d'où, en supposant $\alpha+\beta+\gamma = \alpha_1+\beta_1+\gamma_1 = 1$,

$$\alpha_1 = \tfrac{1}{2}(\beta+\gamma) = \tfrac{1}{2}(1-\alpha), \quad \beta_1 = \tfrac{1}{2}(1-\beta), \quad \gamma_1 = \tfrac{1}{2}(1-\gamma).$$

Comme les triangles $A_2B_2C_2$, $A_3B_3C_3$, ... se déduisent des triangles $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, ... par le même procédé qui fait dériver le triangle $A_1B_1C_1$ de $ABC$, on peut écrire

$$\alpha_1 = \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{2} - \frac{\alpha_1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{\alpha}{4}, \quad \alpha_3 = \frac{1}{2} - \frac{\alpha_2}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{\alpha}{8};$$

donc, en général,

$$\alpha_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{2^n} + \frac{(-1)^n\alpha}{2^n} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}}{1+\frac{1}{2}} + \frac{(-1)^n\alpha}{2^n},$$

ou, en posant $k_n = \dfrac{2^n - (-1)^n}{3}$,

$$\alpha_n = \frac{1}{2^n}[k_n + (-1)^n\alpha], \quad \beta_n = \frac{1}{2^n}[k_n + (-1)^n\beta], \quad \gamma_n = \frac{1}{2^n}[k_n + (-1)^n\gamma].$$

Si $n$ croît indéfiniment, $k_n$ a pour limite $\frac{1}{3}$; $\alpha_n$, $\beta_n$, $\gamma_n$ tendent vers $\frac{1}{3}$. Donc le point M tend à devenir le centre de gravité du triangle $A_nB_nC_n$. M étant le centre de gravité des points $A_{n-1}$, $B_{n-1}$, $C_{n-1}$, chargés des poids $\alpha_{n-1}$, $\beta_{n-1}$, $\gamma_{n-1}$, on a

$$\frac{MA_n}{MA_{n-1}} = -\frac{\alpha_{n-1}}{1-\alpha_{n-1}} = -\frac{\alpha_{n-1}}{2\alpha_n}.$$

Remplaçons $n$ successivement par $n-1$, $n-2$, ... 1 et faisons le produit des égalités ainsi obtenues; il vient

$$\frac{MA_n}{MA} = (-1)^n \frac{\alpha}{2^n\alpha_n}.$$

Soient $(x, y, z)$ les coordonnées barycentriques absolues du point $A_n$ par rapport au triangle ABC. On a

$$x = \frac{A_1A_n}{A_1A} = \frac{MA_n - MA_1}{A_1A} = \frac{MA_n}{MA} \cdot \frac{MA}{A_1A} + \frac{A_1M}{A_1A}$$

$$= (-1)^n \frac{\alpha}{2^n \alpha_n} (\beta + \gamma) + \alpha;$$

d'où en remplaçant $\beta + \gamma$ par $1 - \alpha$ et $\alpha_n$ par la valeur trouvée ci-dessus

$$x = \alpha \frac{k_n + (-1)^n}{k_n + (-1)^n \alpha}.$$

Les valeurs de $y$ et $z$ résultent des équations

$$\frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma} = \frac{y+z}{\beta+\gamma} = \frac{1-x}{1-\alpha} = \frac{k_n}{k_n + (-1)^n \alpha}.$$

Désignons par S, $S_1$, $S_2$, ... les aires des triangles ABC, $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, ... Une formule connue (*Mathesis*, (1), I, 202, II, 117) donne

$$\frac{S_1}{S} = \frac{BA_1.CB_1.AC_1 + A_1C.B_1A.C_1B}{BC.CA.AB} = \frac{2\alpha\beta\gamma}{(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)(\alpha+\beta)} = \frac{\alpha\beta\gamma}{4\alpha_1\beta_1\gamma_1}.$$

Par analogie,

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{\alpha_1\beta_1\gamma_1}{4\alpha_2\beta_2\gamma_2}, \quad \frac{S_3}{S_2} = \frac{\alpha_2\beta_2\gamma_2}{4\alpha_3\beta_3\gamma_3}, \quad \ldots, \quad \frac{S_n}{S_{n-1}} = \frac{\alpha_{n-1}\beta_{n-1}\gamma_{n-1}}{4\alpha_n\beta_n\gamma_n}.$$

En multipliant ces égalités membre à membre, on trouve

$$\frac{S_n}{S} = \frac{\alpha\beta\gamma}{4^n\alpha_n\beta_n\gamma_n} = \frac{2^n\alpha\beta\gamma}{[k_n + (-1)^n\alpha][k_n + (-1)^n\beta][k_n + (-1)^n\gamma]},$$

formule qu'on peut écrire ainsi

$$(1) \quad k_n^2 [k_n + (-1)^n] \mathfrak{S}^3\alpha + k_n \mathfrak{S}\alpha\mathfrak{S}\alpha\beta + \left[(-1)^n - \frac{2^nS}{S_n}\right] \alpha\beta\gamma = 0.$$

Par conséquent, le lieu des points M, tels que le triangle $A_nB_nC_n$ ait une surface constante, est une cubique dont les asymptotes sont parallèles aux côtés du triangle ABC. Si $S_n = (-2)^n S$, le lieu se compose de la droite de l'infini ($\mathfrak{S}\alpha = 0$) et de la conique ayant pour équation

$$k_n [k_n + (-1)^n] \mathfrak{S}^2\alpha + \mathfrak{S}\alpha\beta = 0.$$

Cette conique est homothétique à l'ellipse minimum circonscrite au triangle ABC (ellipse de Steiner), et se confond avec elle lorsque $n = 1$.

Ainsi, *lorsque trois parallèles menées par les sommets d'un triangle*

ABC *rencontrent les côtés de* ABC *en* $A_1$, $B_1$, $C_1$ ; *les côtés de* $A_1B_1C_1$ *en* $A_2$, $B_2$, $C_2$ ; *les côtés de* $A_2B_2C_2$ *en* $A_3$, $B_3$, $C_3$, *etc., les aires des triangles* ABC, $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, ... *forment la progression géométrique* S, — 2S, 4S, — 8S, ... (Comparez *Mathesis*, t. X, p. 253.)

En général, pour que trois aires consécutives, $S_{n-1}$, $S_n$, $S_{n+1}$ soient en proportion harmonique, on doit avoir

$$\alpha_n^2\beta_n^2\gamma_n^2 = \alpha_{n-1}\beta_{n-1}\gamma_{n-1}\cdot\alpha_{n+1}\beta_{n+1}\gamma_{n+1}.$$

Si l'on remplace $\alpha_{n-1}$, $\beta_{n-1}$, $\gamma_{n-1}$, $\alpha_n$, ... par leurs valeurs en fonction de $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, on voit que le lieu des points M se compose de la droite de l'infini et d'une courbe du cinquième ordre.

Le lieu d'un point M tel que le triangle $A_nB_nC_n$ soit infini, c'est-à-dire tel que l'un des côtés de ce triangle soit parallèle à la droite correspondante MA, MB ou MC est, respectivement, l'une des droites parallèles à BC, CA, AB et représentées par

$$\alpha = (-1)^n k_n, \quad \beta = (-1)^n k_n, \quad \gamma = (-1)^n k_n.$$

Dans l'équation (1), faisons $n = 1, 2, 3$ et éliminons $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ entre les égalités ainsi obtenues; on trouve

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1-\dfrac{2S}{S_1} \\ 2 & 1 & -1-\dfrac{4S}{S_2} \\ 18 & 3 & -1-\dfrac{8S}{S_3} \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$\frac{4}{S}+\frac{3}{S_1}-\frac{9}{S_2}+\frac{2}{S_3}=0.$$

Plus généralement,

$$\frac{4}{S_n}+\frac{3}{S_{n+1}}-\frac{9}{S_{n+2}}+\frac{2}{S_{n+3}}=0.$$

M. Emmerich a donné une bonne solution de la première partie de la question et a signalé le défaut de généralité des autres parties. (J N.)

## Question 724.

(Voir *Mathesis*, (2), I, p. 128.)

*Deux circonférences* A, B *se coupent aux points* C, D. *Mener par un point donné* E *une droite telle que le segment intercepté sur cette droite par les deux circonférences soit vu de* C *sous un angle donné* $\gamma$. (MEURICE).

Soient M, N les points où la sécante cherchée rencontre respectivement les circonférences A, B, en sorte que l'angle $MCN = \gamma$. Si R et R′ désignent les rayons des deux cercles, $\varphi$ l'angle ACB, $p$ et $p'$ les distances des centres A et B à la sécante, on a

$$p = R \sin AMN, \quad p' = R' \sin BNM,$$
$$angle\ AMN + BNM + 2(\gamma - \varphi) + \varphi = \pi.$$

La dernière relation donne

$$\sin^2(2\gamma - \varphi) = \sin^2 AMN + \sin^2 BNM - 2 \sin AMN \sin BNM \cos(2\gamma - \varphi).$$

Par suite,

$$\sin^2(2\gamma - \varphi) = \frac{p^2}{R^2} + \frac{p'^2}{R'^2} - \frac{2pp'}{RR'} \cos(2\gamma - \varphi).$$

On en conclut que la droite MN est tangente à une certaine conique facile à déterminer.

Voici une seconde solution, mais elle est moins simple que la précédente. Par le point E, menons une sécante quelconque, rencontrant la circonférence A au point M; joignons AC et construisons un angle MCN′ égal à l'angle donné $\gamma$. Le second côté CN′ rencontre EM en un point N′ qui décrit une cubique. L'intersection de cette cubique avec la circonférence B détermine un point N de la sécante cherchée.

NOTE. Si l'on transforme la figure par inversion, les circonférences A et B se changent en deux droites $a$ et $b$, la sécante MN en une droite $mn$ inscrite entre les droites $a$ et $b$ et vue de C sous l'angle $\gamma$; donc d'après un théorème connu, la droite $mn$ enveloppe une conique ayant pour foyer le point C et tangente à l'angle $ab$. Le problème est ramené à mener par le transformé du point E une tangente à cette conique. (J. N.)

## Question 729.

(Voir *Mathesis*, (2), I, p. 176.)

*On donne une droite* AB, *une circonférence* C *et une droite* CDP *sur laquelle on prend deux points fixes*, D *et* P. *Par le point* P, *on mène arbitrairement une transversale qui coupe en* E *la droite* AB, *en* F *et* G, *la circonférence* C. *On joint* E *à* D, F *et* G *à* C, *par les droites* DE, CF, CG *qui se coupent en* M, M'. *Le lieu des points* M, M' *est une conique, dont on demande la discussion.* (E. CATALAN.)

*Solution par* M. LAISANT. Considérons la figure comme une épure en plans cotés. Cotons 0 la circonférence, la droite AB et le point P; cotons $h$ le point C, centre de la circonférence, et considérons le point D comme appartenant à la droite CP, si bien qu'il aura pour cote $h\frac{DP}{CP}$. La construction indiquée donnera, en projection horizontale, la section du cône de révolution ayant pour sommet C et pour base la circonférence, par le plan passant par D et par la droite AB. On aura donc une conique. Si $r$ est le rayon de la circonférence, et DK la perpendiculaire sur AB; la ligne de plus grande pente du plan sécant a pour tangente de son inclinaison sur le plan de la base $\frac{h}{DK}\cdot\frac{DP}{CP}$; la tangente de l'inclinaison de la génératrice est $\frac{h}{r}$. Donc suivant que $\frac{DP}{DK.CP}\lessgtr\frac{1}{r}$, on aura une ellipse, une parabole ou une hyperbole. En formant le triangle PCL directement semblable à PDK, on a $CL=\frac{DK.CP}{DP}$. Par conséquent, suivant que L sera extérieur ou intérieur à la circonférence, on aura une ellipse ou une hyperbole; s'il est sur la circonférence, une parabole.

Il est à remarquer que si l'on remplace la circonférence par une conique quelconque, et son centre C par un point arbitraire du plan, le lieu des points M, M' sera encore une conique. En général, ce lieu sera une transformée par homologie de la courbe qu'on se sera donnée à la place de la circonférence.

NOTE. Cette solution ne diffère pas essentiellement de celle que M. Catalan nous avait indiquée en nous transmettant l'énoncé de la question 729.

Soit à chercher l'intersection d'un cône $\Sigma$ par un plan $\alpha$. Menons par

le sommet un plan quelconque $\beta$, coupant $\Sigma$ suivant les génératrices $g$, $g'$ et $\alpha$ suivant la droite $h$. Les points de rencontre de $h$ avec $g$ et $g'$ appartiennent à la courbe cherchée. Pour simplifier les constructions on fait tourner le plan $\beta$ autour d'une droite donnée $d$, menée par le sommet du cône.

Soient donc C la projection horizontale du sommet de $\Sigma$, P la trace horizontale de $d$, D la projection horizontale du point où $d$ coupe $\alpha$. La trace horizontale de $\beta$ est une droite quelconque PE. Si AB est la trace horizontale de $\alpha$, DE est la projection horizontale de l'intersection des plans $\alpha$ et $\beta$, etc. (J. N.

M. Déprez a résolu la même question par la géométrie analytique.

---

## Question 733.

(Voir *Mathesis*, (2), I, p. 215.)

*Soit* P *une parabole donnée de foyer* F. *D'un point* M, *arbitrairement choisi dans son plan, on mène à cette courbe les normales* MA, MB, MC. *Les tangentes aux points* A, B, C *forment un triangle* A'B'C'. *Démontrer que la circonférence* A'B'C' *est vue du point* M *sous un angle constant* $\alpha$ *tel que*

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{3}.$$ (DE LONGCHAMPS.

*Solution par* M. SOLLERTINSKY. Soient A'', B'', C'' les symétriques de A', B', C' par rapport au foyer F de la parabole. La droite FA' étant la bissectrice intérieure de l'angle BFC et ayant une longueur égale à $\sqrt{FB.FC}$, le quadrilatère A'BA''C est harmonique et, par suite, inscriptible. Evidemment, la droite A'M est un diamètre de ce cercle, d'où

$$\text{angle FA''M}=\frac{\pi}{2}.$$

Ainsi, les points A'', B'', C'' appartiennent à la circonférence décrite sur FM comme diamètre; mais, d'après la construction, les circonférences A'B'C', A''B''C'' sont symétriques par rapport à F : donc la distance du point M au centre de A'B'C' est le triple du rayon de ce cercle, d'où

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{3}.$$

*Solution par* M. Déprez. Soient $y^2 = 2px$ l'équation de la parabole, $(\alpha, \beta)$ les coordonnées de M, et $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2)$, $(x_3, y_3)$ les coordonnées de A, B, C. On sait que $y_1, y_2, y_3$ sont les racines de l'équation

$$y^3 - 2p(\alpha - p)y - 2p^2\beta = 0. \qquad (1)$$

Eu égard à cette équation, on trouve, pour les coordonnées des points A', B', C',

$$\begin{cases} X_1 = \dfrac{y_2 y_3}{2p} = \dfrac{p\beta}{y_1}, \\ Y_1 = \dfrac{y_2 + y_3}{2} = -\dfrac{y_1}{2}, \end{cases} \quad \begin{cases} X_2 = \dfrac{p\beta}{y_2}, \\ Y_2 = -\dfrac{y_2}{2}, \end{cases} \quad \begin{cases} X_3 = \dfrac{p\beta}{y_3}, \\ Y_3 = -\dfrac{y_3}{2}. \end{cases}$$

On en conclut que les coordonnées du centre de gravité G' du triangle A'B'C' sont $\left(\dfrac{p-\alpha}{3}, 0\right)$; G' est donc situé sur l'axe focal. Les coordonnées de l'orthocentre H' du même triangle sont $\left(-\dfrac{p}{2}, \beta\right)$; donc H'M est parallèle à G'F. D'ailleurs,

$$H'M = \alpha + \frac{p}{2}, \quad G'F = \frac{2\alpha + p}{6};$$

par suite,

$$G'F : H'M = 1 : 3 = O'G : O'H',$$

O' étant le centre du cercle circonscrit au triangle A'B'C'. Il résulte de là que les points O', F, M sont en ligne droite, et que $MO' = 3FO'$. Puisque O'F est un rayon du cercle A'B'C', on a

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{O'F}{O'M} = \frac{1}{3}.$$

Voici quelques remarques sur le triangle ABC :

1° Soit

$$x^2 + y^2 - 2\lambda x - 2\mu y + \nu = 0$$

l'équation du cercle ABC. Si l'on remplace $x$ par $\dfrac{y^2}{2p}$, on trouve

$$y^4 + 4py^2(p - \lambda) - 8p^2\mu y + 4p^2\nu = 0. \qquad (2)$$

La somme des ordonnées des quatre points où un cercle coupe une parabole est donc nulle; mais celle des points A, B, C est également nulle.

Donc le cercle ABC passe par le sommet S de la parabole (Théorème connu).

On a donc $\nu = 0$. Si l'on identifie l'équation (2) divisée par $y$, avec l'équation (1), on trouve

$$\lambda = \tfrac{1}{2}(p + \alpha), \quad \mu = \tfrac{1}{4}\beta;$$

telles sont les coordonnées du centre O du cercle ABC. Les coordonnées du centre de gravité G du triangle ABC étant $\frac{2}{3}(\alpha - p)$ et 0, celles du centre du cercle de Longchamps sont :

$$x_L = 4x_0 - 3x_G = 4p, \quad y_L = 4y_0 = \beta;$$

il en résulte que les points H', $h$, M sont sur un même diamètre de la parabole, et que $h$ est sur une droite fixe, parallèle à la directrice.

2° On a $GS = 2G'S$; O et $O_9$ sont sur un même diamètre de la parabole, de même que H et O'.

3° L'hyperbole équilatère SABCH a son centre au milieu de SH, et l'un de ses axes est parallèle à celui de la parabole. C'est ce qui résulte d'un calcul très simple.

M. Dépuez a donné une seconde solution par les coordonnées trilinéaires. M. Decamps a résolu la même question en se servant des coordonnées cartésiennes. Nous regrettons que le défaut d'espace ne nous permette pas de reproduire ces solutions.

---

## Question 734.

(Voir *Mathesis*, (2), I, p. 216.)

*On donne une conique* K, *une droite d, et un point* O *sur cette droite. Soient* A, B *deux points variables pris sur d et tels que le produit* OA.OB *ait une valeur constante. Trouver le lieu des sommets du quadrilatère formé par les tangentes menées en* A *et* B *à la conique* K.

*Solution d'après* M. Dépuez. Le système des tangentes menées du point M $(x, y)$ à la conique ayant pour équation

$$\varphi(x, y) \equiv Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

est représenté par

$$\varphi(x, y)\,\varphi(X, Y)$$
$$- [x(AX + BY + D) + y(BX + CY + E) + DX + EY + F]^2 = 0$$

Les abscisses des points où ces droites coupent l'axe des $x$ sont racines de l'équation

$$Ax^2 + 2Dx + F) \varphi(X, Y) - [x(AX + BY + D) + DX + EY + F]^2 = 0.$$

Si donc O est l'origine des coordonnées et $d$ l'une des abscisses, la condition $OA.OB = m^2$, donne l'équation du lieu

$$F\varphi(X, Y) - (DX + EY + F)^2 - m^2 [A\varphi(X, Y) - (AX + BY + D)^2] = 0.$$

Ce lieu est donc une conique.

*Autre solution par* M. Morel. Sur chaque tangente menée à K, il existe deux points du lieu ; car si elle coupe $d$ en A, elle est rencontrée en deux points du lieu par les tangentes issues du point correspondant B. Le lieu est donc une conique K'. Cependant, si $d$ était une tangente à K, le lieu se composerait de $d$ et d'une seconde droite.

Supposons que $d$ coupe K en deux points C, D et soient C', D' les points de $d$, tels que $OC.OC' = OD.OD' = m^2$. Les tangentes menées par les points C' et D' à K contiennent chacune deux points coïncidents du lieu K' ; donc elles touchent la courbe K' en des points situés sur les tangentes menées en C et D à la courbe donnée K. (J. N.)

---

## ×Question 745.

(Voir *Mathesis*, (2), I, p. 264.)

*Soient* A, B *deux points diamétralement opposés d'une circonférence,* C *un 3e point quelconque de cette ligne,* BD *et* DE *deux arcs égaux. Les droites* AD *et* BC *se coupent en* F, *les droites* AE *et* CD *en* G. *Démontrer que les droites* FG, AE *sont perpendiculaires.* (A. C.)

*Solution par* MM. Listray, François, H. Mandart, Decamps, F. Verhulst (Anvers), Cristesco. L'angle DCB a pour mesure $\frac{1}{2}$ DB ; l'angle EAD a pour mesure $\frac{1}{2}$ ED ; or DB = ED, donc les angles DCB, EAD sont égaux et le quadrilatère CGFA est inscriptible. Or, ACE = 90° ; donc AGF = 90°.

---

## QUESTIONS D'EXAMEN.

**514.** Les nombres de la suite 49, 4489, 444889,... obtenus en intercalant successivement 48 au milieu du nombre précédent celui auquel on s'arrête, sont des carrés parfaits. (*J. de Vuibert.*)

**525.** La surface de l'octogone formé par les huit droites qui joignent les sommets d'un parallélogramme aux milieux des côtés opposés est équivalente au sixième de l'aire du parallélogramme. (*J. de Vuibert.*)

---

## QUESTIONS PROPOSÉES.

**751.** On donne deux droites rectangulaires AB et CD, non situées dans un même plan; soit AC leur plus courte distance. Une droite s'appuie sur AB et CD en interceptant des segments égaux à partir de A et C. Déterminer la courbe d'intersection de la surface engendrée par cette droite avec la sphère décrite sur AC comme diamètre. (H. BROCARD.)

**752.** Sur les côtés d'un angle fixe XAY on prend des longueurs variables AB, AC telles, que $\frac{1}{\overline{AB}^2}+\frac{1}{\overline{AC}^2}=\frac{2}{p^2}$. Démontrer que le côté BC enveloppe une ellipse dont les diamètres conjugués égaux sont dirigés suivant AX, AY; les demi-axes de cette ellipse sont égaux à $p\cos\frac{1}{2}A$, $p\sin\frac{1}{2}A$. La droite BC touche son enveloppe au pied K de la symédiane AK du triangle ABC. (SOLLERTINSKY.)

*753. Résoudre le système d'équations

$$(x+y)(x-y)^2=(y+z)(y-z)^2=(z+x)(z-x)^2. \quad \text{(MOORE.)}$$

**754.** Pour que l'équation

$$A_0x^4+4A_1x^3+6A_2x^2+4A_3x+A_4=0$$

puisse prendre la forme

$$\alpha(x+\beta)^4+\alpha'(x+\beta')^4=0,$$

il faut que

$$\begin{vmatrix} A_0 & A_1 & A_2 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ A_2 & A_3 & A_4 \end{vmatrix}=0,$$

et $x+\beta$, $x+\beta'$ sont les facteurs linéaires de

$$\begin{vmatrix} 1 & -x & x^2 \\ A_0 & A_1 & A_2 \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix}$$

Déduire de ce qui précède une méthode de résolution de l'équation générale du 4e degré.

# SUR LE PRODUIT DES AXES PRINCIPAUX DES CONIQUES TOUCHANT TROIS OU QUATRE DROITES DONNÉES;

par M. Ph. Molenbrock (Amersfoort).

**Bibliographie.** — Gauss, Pfaff et Mollweide, dans la *Correspondance de Zach*, 1810; Bérard, *Annales de Gergonne*, t. IV; Steiner, *Œuvres complètes*, t. II, pp. 663-682; Plücker, *Systematische Entwickelungen*, t. II, pp. 206-215; Beaulieu, dans les *Wiskundige Opgaven*, 1890; Faure, *Recueil de Théorèmes relatifs aux sections coniques*, et *Nouvelles Annales*, 1861, pp. 55, 56, 216; Paul Serret, *Nouvelles Annales*, 1865, p. 445, et *Géométrie de direction*.

1. Soit

$$A_{11}x^2 + 2A_{12}xy + A_{22}y^2 + 2A_{13}xz + 2A_{23}yz + A_{33}z^2 = 0$$

l'équation d'une conique en coordonnées cartésiennes rectangulaires ($z = 1$). Posons

$$H = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix},$$

et désignons par $H_{11}$, $H_{12}$,... les mineurs de H. Si l'on transporte les axes parallèlement à eux-mêmes au centre de la courbe, la nouvelle équation de la conique est

$$A_{11}x^2 + 2A_{12}xy + A_{22}y^2 = \frac{H}{H_{33}}.$$

Faisant tourner les axes d'un certain angle, on parvient à faire disparaître le terme en $xy$ et à réduire l'équation à la forme

$$Mx^2 + Ny^2 = \frac{H}{H_{33}},$$

M et N étant donnés par les formules

$$M + N = A_{11} + A_{22},$$
$$MN = A_{11}A_{22} - A_{12}^2 = H_{33}.$$

Soient $a^2$, $b^2$ les carrés des demi-axes de la courbe, de sorte que

$$a^2 = \frac{H}{MH_{33}}, \quad b^2 = \frac{H}{NH_{33}};$$

d'où, en éliminant M et N :

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{H_{55}}{H}(A_{11}+A_{22}),\quad a^2b^2=\frac{H^2}{H_{33}^2},$$

$$a^2+b^2=\frac{H}{H_{33}^2}(A_{11}+A_{22}).$$

**3.** L'équation d'une droite en coordonnées cartésiennes étant

$$ux+vy+1=0,$$

considérons $u$ et $v$ comme des coordonnées de cette ligne. Une conique sera représentée par une équation du second degré

$$B_{11}u^2+2B_{12}uv+B_{22}v^2+2B_{13}u+2B_{23}v+B_{33}=0. \qquad (1)$$

Posons

$$I=\begin{vmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13}\\ B_{21} & B_{22} & B_{23}\\ B_{31} & B_{32} & B_{33}\end{vmatrix}, \qquad (2)$$

et désignons les mineurs de I par $A_{11}$, $A_{12}$, ... La même courbe sera représentée, en coordonnées de point, par

$$A_{11}x^2+2A_{12}xy+A_{22}y^2+2A_{13}x+2A_{23}y+A_{33}=0,$$

et les axes sont donnés par

$$a^2b^2=\frac{H^2}{H_{33}^3},\quad a^2+b^2=\frac{H}{H_{33}^2}(A_{11}+A_{22}).$$

D'après les propriétés des déterminants adjoints,

$$H=I^2,\quad H_{33}=IB_{33};$$

donc

$$a^2b^2=\frac{I}{B_{33}^3},\quad a^2+b^2=\frac{A_{11}+A_{22}}{B_{33}^2}. \qquad (3)$$

**4.** Soient

$$P_1=a_1u+b_1v+1=0,\quad P_2=a_2u+b_2v+1=0,$$
$$P_3\quad a_3u+b_3v+1=0,$$

les équations des sommets du triangle $A_1A_2A_3$; une conique inscrite à ce triangle est représentée par

$$\lambda_1P_2P_3+\lambda_2P_3P_1+\lambda_3P_1P_2=0. \qquad (4)$$

Comparant cette équation à (1), on trouve

$$B_{11} = 2(\lambda_1 a_2 a_3 + \lambda_2 a_3 a_1 + \lambda_3 a_1 a_2),\ B_{12} = \lambda_1(a_1 b_3 + a_3 b_2) + \cdots;$$

substituant ces valeurs dans (2), ou s'appuyant sur un théorème connu, relatif aux substitutions linéaires, on obtient

$$I = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \\ a_3 & b_3 & 1 \end{vmatrix}^2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & \lambda_3 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & 0 & \lambda_1 \\ \lambda_2 & \lambda_1 & 0 \end{vmatrix} = 8S^2\lambda_1\lambda_2\lambda_3;$$

S désigne l'aire du triangle $A_1A_2A_3$. Par conséquent,

$$a^2b^2 = S^2 \frac{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}{(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^3}.$$

4. On peut supposer $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$ ; alors, si $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ sont positifs, un minimum du produit $\lambda_1\lambda_2\lambda_3$ correspond à $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{3}$. La conique correspondante est l'ellipse qui touche les côtés du triangle $A_1A_2A_3$ en leurs milieux ; car l'équation de cette courbe prend la forme $P_1P_2 + P_2P_3 + P_3P_1 = 0$, de sorte que les points de contact des côtés de $A_1A_2A_3$ vérifient respectivement les équations $P_3 + P_3 = 0$, $P_3 + P_1 = 0$, $P_1 + P_2 = 0$.

5. Lorsque le produit des axes a une valeur donnée, les coefficients $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ vérifient l'équation

$$(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^3 a^2b^2 = S^2\lambda_1\lambda_2\lambda_3. \qquad (6)$$

Or, si l'on prend $A_1A_2A_3$ pour triangle de référence, les coordonnées $x_1$, $x_2$, $x_3$, du pôle d'une droite $(p_1, p_2, p_3)$ par rapport à la conique dont l'équation est $\varphi(P_1, P_2, P_3) = 0$ sont données par

$$\frac{x_1}{\frac{d\varphi(p_1p_2p_3)}{dp_1}} = \frac{x_2}{\frac{d\varphi(p_1p_2p_3)}{dp_2}} = \frac{x_3}{\frac{d\varphi(p_1p_2p_3)}{dp_3}};$$

donc dans le cas de la courbe (4) :

$$\lambda_2p_3 + \lambda_3p_2 = \rho x_1, \quad \lambda_3p_1 + \lambda_1p_3 = \rho x_2, \quad \lambda_1p_2 + \lambda_2p_1 = \rho x_3,$$

$\rho$ étant un facteur de proportionnalité. On en déduit

$$\lambda_1 = -\frac{\rho}{2p_2p_3}(-p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3), \ldots$$

En portant ces valeurs dans (6), il vient

$$S^2p_1p_2p_3(-p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3)(p_1x_1 - p_2x_2 + p_3x_3)(p_1x_1 + p_2x_2 - p_3x_3)$$
$$= a^2b^2[p_1x_1(-p_1 + p_2 + p_3) + p_2x_2(p_1 - p_2 + p_3) + p_3x_3(p_1 + p_2 - p_3)]^3 \quad (7)$$

Il résulte de là que le *lieu des pôles d'une droite fixe, par rapport à toutes les coniques touchant les côtés d'un triangle donné et ayant même produit des axes, est une courbe du troisième ordre.* En particulier, *le lieu des centres de ces courbes est une cubique ayant pour asymptotes les droites joignant les milieux des côtés du triangle donné.* On peut encore remarquer la proposition suivante, qui se déduit de l'égalité (7): *Le produit des carrés des demi-axes principaux d'une conique touchant les trois côtés d'un triangle donné est égal au produit des distances de son centre aux droites joignant les milieux des côtés du triangle, multiplié par le double du diamètre du cercle circonscrit.*

Dans l'égalité (7), considérons le point $(x_1, x_2, x_3)$ comme fixe et la droite $(p_1, p_2, p_3)$ comme variable; nous voyons alors que *la polaire d'un point fixe par rapport aux coniques qui touchent les côtés d'un triangle donné et ont même produit des axes, enveloppe une courbe de la sixième classe.* Si le point fixe coïncide avec le sommet $A_1$ du triangle donné $A_1A_2A_3$, on a $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, et l'équation (7) se réduit à

$$S^2 p_1 p_2 p_3 = a^2 b^2 (-p_1 + p_2 + p_3)^2.$$

Donc les *cordes de contact de l'angle* $A_2A_1A_3$ *avec les coniques inscrites au triangle* $A_1A_2A_3$ *et ayant même produit des axes enveloppent une courbe de la troisième classe.*

6. Considérons maintenant toutes les coniques touchant les côtés d'un quadrilatère donné $P_1P_2P_3P_4$. Soit comme ci-dessus,

$$P_n \equiv a_n v + b_n v + 1 = 0,$$

l'équation du sommet $P_n$. La courbe peut être représentée par

$$P_1P_3 + \lambda P_2P_4 = 0, \tag{8}$$

et le point de contact d'une tangente $(p_1, p_2, p_3, p_4)$, par

$$P_1 p_3 + P_3 p_1 + \lambda (P_2 p_4 + P_4 p_2) = 0. \tag{9}$$

Les coordonnées cartésiennes des points $P_1$, ... sont, évidemment, $(a_1, b_1)$ ..., et si l'on désigne par $u_1$, $v_1$ les coordonnées tangentielles d'une droite $d_1$, les quantités qui viennent d'être désignées par $p_1$, $p_2$, $p_3$, $p_4$ sont les valeurs particulières que prennent les trinômes $P_1 \equiv a_1 u + b_1 v + 1$... pour $u = u_1$, $v = v_1$, de sorte qu'elles sont proportionnelles aux distances des points $P_1$, $P_2$, $P_3$, $P_4$ à la droite. Le point de contact de la droite $P_1P_2$ avec la conique (8) s'obtient en remplaçant dans (9) les quantités $p_1$, $p_2$ par 0 et le rapport $p_3 : p_4$ par

celui des perpendiculaires abaissées de $P_3$, $P_4$ sur la droite $P_1P_2$ ou par celui des aires des triangles $P_3P_1P_2$, $P_4P_1P_2$. Représentons par $S_1$, $S_2$, $S_3$, $S_4$ les aires des triangles $P_2P_3P_4$, $P_3P_4P_1$, $P_4P_1P_2$, $P_1P_2P_3$, et par $M_1$, $M_2$, $M_3$, $M_4$ les points de contact des droites $P_1P_2$, $P_2P_3$, $P_3P_4$, $P_1P_4$ avec la conique (8); nous déduisons de (9) :

$$\frac{P_1M_1}{P_2M_1} = -\frac{\lambda S_3}{S_4}, \quad \frac{P_2M_2}{P_3M_2} = -\frac{S_4}{\lambda S_1}, \quad \frac{P_3M_3}{P_4M_3} = -\frac{\lambda S_1}{S_2}, \quad \frac{P_4M_4}{P_1M_4} = -\frac{\lambda S_2}{\lambda S_3}.$$

Si l'on identifie les équations (1) et (8), on trouve

$$B_{11} = 2(a_1a_3 + \lambda a_2a_4), \quad \ldots;$$

d'où

$$I = 2\lambda \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_4 & a_1 & a_3 \\ b_4 & b_1 & b_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 2\lambda^2 \begin{vmatrix} a_4 & a_1 & a_2 \\ b_4 & b_1 & b_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & a_3 & a_4 \\ b_2 & b_3 & b_4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 8\lambda S_2S_4 + 8\lambda^2 S_1S_3,$$

$$a^2b^2 = \frac{\lambda S_2S_4 + \lambda^2 S_1S_3}{(1+\lambda)^3}. \qquad (10)$$

On conclut de là *qu'il existe trois coniques touchant quatre droites données et ayant même produit des axes.*

L'équation du centre C de la courbe (8) s'obtient en cherchant celle du pôle de la droite de l'infini; on fait donc $p_1 = p_2 = p_3 = p_4$ dans l'équation (9), ce qui donne

$$P_1 + P_3 + \lambda(P_2 + P_4) = 0. \qquad (11)$$

Appelons $N_1$, $N_2$ les milieux des diagonales $P_1P_3$, $P_2P_4$. L'équation (11) montre que le point C divise la droite $N_1N_2$ dans le rapport $\lambda : (-1)$. Soient $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ les trois racines de l'équation (10) résolue par rapport à $\lambda$, et $C_1$, $C_2$, $C_3$ les centres des courbes correspondantes. On voit sans peine que le produit $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = -1$; donc

$$\frac{C_1N_1}{C_1N_2} \cdot \frac{C_2N_1}{C_2N_2} \cdot \frac{C_3N_1}{C_3N_2} = -1.$$

Si l'on prend pour inconnue le rapport $\lambda : (1+\lambda) = \mu$, l'équation (10) se change en celle-ci

$$a^2b^2 = \mu(1-\mu)^2 S_2S_4 + \mu^2(1-\mu) S_1S_3. \qquad (12)$$

Les fonctions $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3$ et $\mu_1\mu_2 + \mu_2\mu_3 + \mu_3\mu_1$ des racines de la nouvelle équation sont indépendantes de la valeur de $a^2b^2$. Comme $\mu_1 = C_1N_1 : N_2N_4$, le centre de gravité des points $C_1$, $C_2$, $C_3$ est fixe, il coïncide avec le centre de gravité des milieux des trois diagonales du quadrilatère complet $P_1P_2P_3P_4$, car les deux extrémités de chacune des diagonales représentent une conique du faisceau tangentiel, ayant un axe principal nul.

7 Le quadrilatère $P_1P_2P_3P_4$ étant supposé convexe, cherchons le maximum de l'ellipse inscrite.

L'équation (12) est de la forme

$$a^2b^2 = (S_2S_4 - S_1S_3)(\mu - m_1)(\mu - m_2)(\mu - m_3), \qquad (13)$$

$m_1$, $m_2$, $m_3$ étant les valeurs de $\mu$ qui correspondent à $a^2b^2 = 0$, c'est-à-dire aux milieux $N_1$, $N_2$, $N_3$ des trois diagonales du quadrilatère complet $P_1P_2P_3P_4$ ; on a $m_1 = 0$, $m_2 = 1$. En égalant à zéro la dérivée de $a^2b^2$ par rapport à $\mu$, on trouve

$$\frac{1}{\mu - m_1} + \frac{1}{\mu - m_2} + \frac{1}{\mu - \mu_3} = 0, \qquad (14)$$

ou, si C est le point qui correspond à une racine de cette équation,

$$\frac{1}{CN_1} + \frac{1}{CN_2} + \frac{1}{CN_3} = 0.$$

On peut supposer $m_2 < m_3$, ou que les points N se succèdent dans l'ordre $N_1, N_2, N_3$. Le quadrilatère simple $P_1P_2P_3P_4$ étant convexe et les aires $S_1, S_2, S_3, S_4$ ayant le même signe, on conclut de la relation $m_2m_3 = \frac{S_2S_4}{S_2S_4 - S_1S_3}$, que la différence $S_2S_4 - S_1S_4$ est positive. Par conséquent, le produit $a^2b^2$ est positif et la conique (8) est une ellipse, lorsque le centre tombe sur $N_1N_2$ ou au delà de $N_3$ ; cette courbe est une hyperbole lorsque le centre tombe sur $N_2N_3$ ou sur le segment indéfini situé au delà de $N_1$ par rapport aux points $N_2$, $N_3$.

L'équation (14), comme il est facile de le voir, a une racine comprise entre $m_1$ et $m_2$, une seconde entre $m_2$ et $m_3$ ; la première correspond à une ellipse maximum, la seconde à une hyperbole dont le produit des carrés des axes a une valeur absolue maximum.

L'analyse précédente doit être modifiée lorsque les droites $P_1P_2$, $P_3P_4$ sont parallèles ; alors $S_1 = S_2$, $S_3 = S_4$, et la formule (12) devient

$$a^2b^2 = \mu(1 - \mu)S_1S_3.$$

Le point $N_3$ s'est transporté à l'infini. Le maximum de $a^2b^2$ a lieu pour $\mu = \frac{1}{2}$ et correspond à une ellipse ayant son centre au milieu de $N_1N_2$ et touchant $P_1P_2$ et $P_3P_4$ en leurs milieux, $P_2P_3$ et $P_1P_4$ sur une parallèle à $P_1P_2$ menée par le point de concours des diagonales du trapèze $P_1P_2P_3P_4$.

## QUESTIONS D'ENSEIGNEMENT.

### Limite de la racine $m^{ième}$ d'une variable.

1. *Définition de* $\sqrt[m]{A}$. 1° Soient $l$ un nombre commensurable croissant, tel que $l^m$ ait une limite positive commensurable ou incommensurable A, $m$ étant un nombre entier positif; L, un nombre commensurable décroissant, tel aussi que $L^m$ ait pour limite A. On a donc, par hypothèse,

$$l^m < A < L^m.$$

2° Le nombre croissant $l$ a une limite $\omega$, d'après le principe fondamental de la méthode des limites(*). De même, le nombre décroissant L a une limite $\Omega$.

3° $\Omega = \omega$. En effet, puisque *la limite du produit de m facteurs est égale au produit des limites de ces facteurs*, on a

$$A = \lim (l^m) = (\lim l)^m = \omega^m,$$
$$A = \lim (L^m) = (\lim L)^m = \Omega^m,$$

donc $\Omega$ ne peut différer de $\omega$.

4° Ainsi $l$ et L ont une limite commune $\omega$. Par conséquent, on peut donner la définition suivante :

*La racine $m^{ième}$ de* A *est la limite* $\omega$ *des nombres commensurables* $l$, L, *l'un croissant, l'autre décroissant, dont les puissances $m^{ièmes}$,* $l^m$, $L^m$, *ont* A *pour limite.*

2. *La racine* $\omega$ *est unique.* Soient $l'$ un nombre commensurable croissant, L' un nombre commensurable décroissant, tels que $l'^m$, $L'^m$ aient A

(*) *Un nombre toujours croissant (ou toujours décroissant) a une limite finie ou infinie.* La limite est finie si la variable reste toujours inférieure, en valeur absolue, à une quantité finie donnée. Ici, $l$ est toujours inférieur à une des valeurs de L, puisque $l^m$ est inférieur à $L^m$.

pour limite. On prouve, comme plus haut, que $l'$ et L′ ont une limite $\omega'$. Je dis que $\omega' = \omega$. En effet, d'après la définition des nombres $l$, L, $l'$, L′, on a

$$l^m < L'^m, \quad l'^m < L^m,$$
$$l < L', \quad l' < L.$$

Donc, d'après un principe de la méthode des limites (*),

$$\lim l \gtrless \lim L', \quad \lim l' \gtrless L,$$

c'est-à-dire

$$\omega \gtrless \omega', \quad \omega' \gtrless \omega,$$

relations d'où il résulte que $\omega' = \omega$.

3. *Limite d'une racine $m^{ième}$.* Soient

$$\lim u = U, \quad \sqrt[m]{u} = v, \quad \sqrt[m]{U} = V.$$

Supposons, en premier lieu, V *différent de zéro* et, pour fixer les idées, positif. Soit $\delta$ une quantité positive aussi petite qu'on le veut et inférieure à V. La quantité $U = V^m$ est comprise entre $(V-\delta)^m$ et $(V+\delta)^m$. Puisque $u$ a pour limite U, on pourra faire en sorte que $u = v^m$ soit aussi compris entre $(V-\delta)^m$ et $(V+\delta)^m$ ; par suite, $v$ sera compris entre $V-\delta$ et $V+\delta$ et $v - V$ sera inférieur à $\delta$, en valeur absolue ; donc $\lim v = V$.

Supposons, en second lieu, $V = 0$. Alors $U = V^m$ est nul aussi et $v^m$ ou $u$ ayant pour limite $U = 0$, est compris entre 0 et $\delta^m$, puissance $m^{ième}$ d'un nombre commensurable $\delta$, aussi petit qu'on le veut. Donc $v$ est compris aussi, en valeur absolue, entre 0 et $\delta$, c'est-à-dire que $\lim v = 0$, ou

$$\lim \sqrt[m]{u} = \sqrt[m]{\lim u} \ (**).$$

*Autre démonstration dans le cas où* V *n'est pas nul.* Si V et $V^m = U$ sont différents de zéro, positifs par exemple, soit $P^m$, la puissance $m^{ième}$ d'un nombre P, tel que $P^m$ est inférieure à U. Puisque $u = v^m$ est

---

(*) *La limite d'une variable toujours supérieure à une autre variable est égale ou supérieure à la limite de celle-ci.*

(**) Duhamel (*Calcul infinitésimal*, Livre I, n° 8, 4°) et, après lui, beaucoup d'auteurs ont donné de ce théorème une démonstration insuffisante, que voici en substance : « $u$ étant le produit de $m$ facteurs égaux à $v$ doit avoir pour limite la puissance $m$ de la limite de $v$, et comme $u$ a pour limite U, il en résulte que U est la puissance $m$ de la limite de $v$, ou que $v$ a pour limite $\sqrt[m]{U}$ ». Cette démonstration renferme un postulat, savoir que *$v$ a une limite*.

aussi voisin qu'on le veut de U, on pourra faire en sorte que $u$ ou $v^m$ soit supérieur à $P^m$, ou $v$ à P. On a, à cause de $V < P$, $v < P$,

$$v - V = \frac{v^m - V^m}{v^{m-1} + v^{m-2}V + \cdots + V^{m-1}} < \frac{u - U}{mP^{m-1}} \text{ (en valeur absolue),}$$

ou puisque $u - U$ est aussi petit qu'on le veut,

$$\lim v = V = \sqrt[m]{U},$$

c'est-à-dire

$$\lim \sqrt[m]{u} = \sqrt[m]{\lim u}.$$

4. *Limite d'une puissance quelconque.* Il est facile maintenant de prouver que l'on a

$$\lim (u^n) = (\lim u)^n$$

pour toutes les valeurs entières ou fractionnaires, positives ou négatives de $n$.

1° Si $n = m$, $m$ étant entier positif,

$$\lim (u^m) = \lim u \times \lim u \times \cdots \times \lim u \ (m \text{ fois}) = (\lim u)^m$$

d'après le principe relatif à la limite d'un produit.

2° Si $n = -m$, $m$ étant entier positif,

$$\lim (u^{-m}) = \lim \frac{1}{u^m} = \frac{1}{\lim (u^m)} = \frac{1}{(\lim u)^m} = (\lim u)^{-m}$$

d'après les principes relatifs à la limite d'un quotient et d'une puissance entière positive.

3° Si $n = \frac{1}{m}$, $m$ étant entier positif,

$$\lim (u^{\frac{1}{m}}) = \lim \sqrt[m]{u} = \sqrt[m]{\lim u} = (\lim u)^{\frac{1}{m}},$$

d'après le principe établi au n° 3.

4° Si $n = \frac{p}{q}$, $p$ et $q$ étant des nombres entiers, dont l'un $p$, par exemple, peut être positif ou négatif,

$$\lim (u^{\frac{p}{q}}) = \lim \sqrt[q]{u^p} = \sqrt[q]{\lim (u^p)} = \sqrt[q]{(\lim u)^p} = (\lim u)^{\frac{p}{q}}$$

d'après les principes 3°, et 1° ou 2°, que nous venons d'établir.

Remarque. Dans ce qui précède, nous avons exclu la considération des racines des quantités négatives. Si les indices $m$ ou $q$ sont pairs, les racines $m^{ième}$ et $q^{ième}$ de $u$ ou $u^p$ supposés négatifs, cessent d'être réelles; au contraire, si $m$ ou $q$ sont impairs, les racines $m^{ième}$ ou $q^{ième}$ de $u$ ou $u^p$ supposés négatifs, sont égales aux racines de même indice de $-u$, ou $-u^p$, multipliées par $(-1)$. On étend donc aisément, à ces racines, les résultats précédents. (P. M.)

---

## REVUE BIBLIOGRAPHIQUE.

*Principes de la nouvelle géométrie du triangle*, par Aug. Poulain. Paris, Croville-Morant, 1892. In-8° de 46 pages. (Extrait du compte rendu du Congrès scientifique international des Catholiques de 1891.) Prix : 2 fr. 50.

Voici comment l'auteur fait connaître l'objet de cette brochure.

« Certaines revues renferment un grand nombre de travaux sur la géométrie récente du triangle. Mais il serait pénible d'en remonter la filière, pour retrouver les définitions et les principes fondamentaux. Pour s'initier à cette étude, il vaut mieux débuter par une vue d'ensemble. Je vais essayer de la donner en évitant à dessein d'entrer dans les théorèmes de détail, qui maintenant se comptent par centaines et s'augmentent tous les mois avec une rapidité presque décourageante.

« D'autres auteurs ont fait un travail analogue au mien. M. Vigarié en a publié un très remarquable, en 1887, dans le J. M. S et un autre, la même année, dans les comptes rendus de l'Association française. Ce dernier a été reproduit dans *Mathesis* en 1889. Mon plan est un peu différent et ne suppose pas que le lecteur ait une connaissance complète de la géométrie analytique. De plus, je démontre presque tous les théorèmes énoncés. — M. Casey a publié un autre résumé où dominent les procédés de la géométrie élémentaire (*Géométrie récente*, Gauthier-Villars, 1890; reproduit dans *Mathesis*, 1889-1890). Il en est de même de M. Neuberg, dans une note de 56 pages ajoutée à la 6e édition du *Traité de Géométrie* de MM. Rouché et de Comberousse. Enfin M. Lalbalettrier a traité ces questions à la fin de sa *Trigonométrie* (Croville, 1889). Pour l'historique, voir Vigarié (Association française, 1889; reproduit dans *Mathesis*, 1890). »

Voici la table des matières, qui fait connaître les questions traitées par M. Poulain.

Chapitre I. Objet de la nouvelle géométrie du triangle. — Quelques définitions. II. Des coordonnées trilinéaires et barycentriques. Méthode pour calculer $x, y, z, \alpha, \beta, \gamma$. III. Quelques équations trilatères. IV. Des points réciproques et inverses. V. Énumération des points dérivés d'un ou plusieurs autres à l'aide de leurs coordonnées trilatères. Points dérivés de plusieurs autres, $M_0, M_1$. Points dérivés d'un seul point M. VI. Des coordonnées tripolaires et angulaires. VII. Énumération des

points dérivés de M à l'aide de ses coordonnées tripolaires ou angulaires. VIII. Angles et distances. IX. Méthode pour démontrer les théorèmes. X. Encore quelques points ou lignes remarquables

Outre un bon résumé des principaux travaux *analytiques* sur la géométrie récente, notamment sur les *transformations*, le lecteur trouvera dans l'opuscule de M. Poulain quelques aperçus inédits ou peu étudiés, qui pourraient devenir le point de départ de nouveaux développements intéressants. (J. N.)

---

***Méthode nouvelle pour réduire l'équation d'une conique et déterminer ses axes ou son paramètre***, par M. V. Lac de Bosredon, Professeur à la Faculté catholique des sciences, à Angers (In-8° de 15 pages).

Cette méthode, qui a paru dans le compte rendu du Congrès scientifique international des Catholiques, tenu à Paris en 1891, peut intéresser nos lecteurs, surtout les élèves de nos classes scientifiques; c'est pourquoi nous jugeons utile de la résumer ici, bien qu'elle ne soit pas *entièrement nouvelle*.

Etant donné un système d'axes rectilignes $Ox$, $Oy$, faisant entre eux un angle $\theta$, proposons-nous d'abord de trouver les formules pour passer à de nouveaux axes CX, CY ayant pour équations

$$Ax + By + C = 0, \quad A'y + B'y + C' = 0. \tag{1}$$

Les nouveaux axes positifs sont supposés s'étendre *au-dessus* de l'axe $Ox$. Si $\omega$ est l'angle XCY, les nouvelles coordonnées (X, Y) d'un point M dont les anciennes coordonnées sont $(x, y)$, sont égales aux distances de M aux droites CX, CY, divisées par $\sin\omega$. On a donc

$$X = \frac{(A'x + B'y + C')\sin\theta}{\sqrt{A'^2 + B'^2 - 2A'B'\cos\theta}\,\sin\omega}, \quad Y = \frac{(Ax + By + C)\sin\theta}{\sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta}\,\sin\omega};$$

d'où

$$A'x + B'y + C' = mX, \quad Ax + By + C = nY, \tag{2}$$

les constantes $m$ et $n$ ayant les valeurs(*)

$$m = \frac{AB' - BA'}{\sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta}}, \quad n = \frac{-(AB' - BA')}{\sqrt{A'^2 + B'^2 - 2A'B'\cos\theta}}. \tag{3}$$

Cela posé, considérons l'équation générale des coniques

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dy + 2Ex + E = 0.$$

---

(*) On sait que

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{AB' - A'B}{AA' + BB' + (AB' + A'B)\cos\theta};$$

d'où l'on déduit $\sin\omega$; A et A' sont supposés positifs.

L'auteur passe par les formules ordinaires de transformation de coordonnées pour établir les égalités (2) et (3).

Si l'on suppose

$$A \gtrless 0, \quad \delta = AC - B^2 \gtrless 0,$$

on peut la décomposer en carrés de la manière suivante :

$$\delta(Ax + By + D)^2 + (\delta y + AE - BD)^2 + A\Delta = 0,$$

$\Delta$ désignant le discriminant. Prenons pour nouveaux axes des coordonnées les droites représentées par

$$Ax + By + D = 0, \quad \delta y + AE - BD = 0; \tag{4}$$

l'équation de la conique deviendra

$$\delta m^2 X^2 + n^2 Y^2 + A\Delta = 0. \tag{5}$$

La courbe se trouve ainsi rapportée à deux diamètres conjugués représentés par les équations (4) et dont les longueurs se déduisent de l'équation (5).

On trouve aisément

$$m = -A, \quad n = \frac{A\delta}{\sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta}}, \quad \sin^2\omega = \frac{A^2\sin^2\theta}{A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta}.$$

En faisant ensuite usage des théorèmes d'Apollonius exprimés par les égalités

$$a'^2 + b'^2 = a^2 + b^2, \quad a'b'\sin\omega = ab,$$

on forme aisément l'équation ayant pour racines $a^2$ et $b^2$.

Dans le cas de la parabole, on a $\delta = 0$, et l'équation de la courbe peut se mettre sous la forme

$$(Ax + By + D)^2 + 2(AE - BD)y - AF - D^2 = 0,$$

A étant supposé différent de zéro. On prend pour nouveaux axes les droites représentées par

$$Ax + By + D = 0, \quad 2(AE - BD)y + AF - D^2 = 0,$$

ce qui réduit l'équation à $n^2Y^2 + mX = 0$.

On en conclut le paramètre $p'$ relatif au diamètre CX, puis le paramètre principal $p$ au moyen de la relation $p = p'\sin^2\omega$. (J. N.)

---

*Die Brocardschen Gebilde und ihre Beziehungen zu den verwandten merkwürdigen Punkten und Kreisen des Dreieckes*, von Dr. Emmerich, Gymnasiallehrer zu Mülheim a. d. Ruhr. Berlin, Reimer, 1891 (XIV-154 pages, in-8°, avec 50 figures dans le texte et une planche). Prix : 5 marcs.

M. Emmerich, qui s'était déjà fait connaître par plusieurs études remarquables sur la géométrie récente du triangle (*Constructionsaufgaben zur Geometrie des Brocardschen Kreises; der Brocardsche Winkel des Dreiecks*, etc.) s'est proposé de faire un exposé des principales propriétés des points et du cercle de Brocard, et d'autres figures qui s'y rattachent étroitement. Cet exposé, qui ne s'appuie que

sur les connaissances enseignées dans les cours de mathématiques élémentaires et qui indique, autant que possible, le premier auteur d'une proposition ou d'une démonstration, convient parfaitement bien à ceux qui cherchent, dans la Géométrie récente, une mine d'exercices ou des sujets d'études nouvelles.

Voici les titres des différents chapitres de l'ouvrage : I. Angle de Brocard. II. Points de Brocard. III. Cercles de Lemoine. IV. Cercles de Tucker, cercle de Taylor. V. Cercles adjoints. VI. Cercle de Brocard. VII. Triangles équibrocardiens. VIII. Cercles de Neuberg et de M' Cay. Chaque chapitre est subdivisé en plusieurs paragraphes.

Ne pouvant analyser ici en détail l'ouvrage, qu'il nous suffise de dire qu'il est écrit avec ordre et simplicité; que les démonstrations sont suffisamment développées, tout en laissant au lecteur quelque chose à faire; que l'auteur a introduit par ci et par là des rapprochements et des aperçus instructifs et des propositions nouvelles. Nous aurions bien à faire des réserves au sujet de certaines indications historiques; mais il est à espérer que l'ouvrage parviendra rapidement à une seconde édition qui permettra à l'auteur des rectifications et des compléments.

L'exécution typographique du livre est extrêmement soignée. (J. N.)

---

*Récréations mathématiques*, par M. Édouard Lucas, professeur de Mathématiques spéciales au Lycée Saint-Louis. Tome premier. Deuxième édition, Paris, Gauthier-Villars, 1891. (Volume petit in-8, de XXIV-254 pages, caractères elzévirs, titres en deux couleurs). Prix : sur papier vélin : 7 fr. 50 c. ; sur papier hollande : 12 fr. 50 c.

La première édition du tome I des *Récréations Mathématiques* du regretté Ed. Lucas, a été annoncée dans *Mathesis*, 1882, (1), II, pp. 181-183. Pour en faire connaître la nouvelle édition, revue et augmentée, nous transcrivons ici la table des matières.

Première récréation. *Le jeu des traversées en bateau* : Historique, Biographie de Bachet; la traversée d'un régiment dans un batelet; la traversée du batelier; la traversée des trois ménages; l'erreur de Tartaglia; la traversée de quatre ménages; problème général des traversées; autre généralisation du problème; la station dans une île. — Deuxième récréation. *Le jeu des ponts et des îles* : Le mémoire d'Euler; les ponts de Paris en 1880; les figures d'un seul trait; la signature de Mahomet; les voyages d'un contrebandier. — Troisième récréation. *Le jeu des labyrinthes* : le petit Poucet; le fil d'Ariane; les labyrinthes de l'Égypte et de la Grèce; définition géométrique du problème des labyrinthes; solution de M. Trémaux; sur la théorie des arbres géométriques. — Quatrième récréation. *Le problème des huit reines au jeu des échecs* : Historique; notations et conventions; des solutions adjointes; des solutions irrégulières et semi-régulières; des solutions régulières; des solutions renversées; problème des tours; les permutations rectilignes; l'anagramme de Pascal; problème des fous; méthode de M. Günther; méthode de M. de la Noë, procédés mnémotechniques; moins de huit reines; les 92 positions des huit reines; méthode de Gauss; autre énoncé du problème des huit reines; désidératum; théorèmes d'arithmétique. — Cinquième récréation. *Le jeu*

*du solitaire :* Historique ; définition du solitaire ; règle du jeu du solitaire ; premiers exercices ; la croix de six boules ; la croix de neuf boules ; le triangle ; la cheminée ; le calvaire ; la pyramide ; la double croix ; les cinq croix entrelacées ; le pentagone ; le carré incliné ; l'octogone ; la triple croix ; problèmes sur le solitaire décentré ; le chapelet ; l'équateur ; la croix et sa couronne ; la pleine lune ; la croix de Malte ; quatre cavaliers cernés par seize soldats ; trois cavaliers cernés par seize soldats ; Adam et Ève dans le paradis terrestre ; le lecteur au milieu de son auditoire ; le jugement dernier : le grand bol ; les quatre Évangélistes et les douze Apôtres ; la Trinité et les douze Apôtres ; Jésus et les douze Apôtres ; le calice ; la Trinité ; les deux pôles ; le corsaire ; les lettres en boule ; la récréation de Paul ; la récréation de Madeleine ; les réussites du solitaire à trente-sept cases ; de la symétrie inclinée ; procédé général de réciprocité ; procédé général d'échange ; coups triples du solitaire accéléré ; marche accélérée du lecteur au milieu de son auditoire ; marche accélérée des douze Apôtres ; le quarré de vingt-cinq boules ; le tricolet ; réussite sur le solitaire de quarante et une cases ; extension du solitaire et de la règle du jeu ; des positions et des cases congruentes ; effets successifs de la règle complète ; résidu congruent sur un carré de neuf cases ; position réduite ; les seize formes de positions réduites ; applications de la théorie ; impossibilité du solitaire de trente-sept cases ; étude du solitaire de quarante et une cases ; étude du solitaire de trente-trois cases ; les réussites du docteur Reiss : des Solitaires des divers ordres. — SIXIÈME RÉCRÉATION. *La numération binaire.* De la numération ; système binaire ; système duodécimal ; avantages du système binaire ; le jekim ; les boîtes du poids ; l'éventail mystérieux ; la progression double ; les nombres parfaits. — SEPTIÈME RÉCRÉATION. *Le jeu du baguenaudier.* Historique ; biographie de Cardan ; biographie de Wallis ; imagination d'un clerc de notaire ; discussion étymologique de M. Gros ; description du baguenaudier ; du déplacement d'un anneau ; du déplacement de deux anneaux ; problème général du baguenaudier ; marche ordinaire ; nombre des coups de navette ; sur les combinaisons ; durée de la manœuvre ; marche accélérée : tableau des deux marches du baguenaudier. — HUITIÈME RÉCRÉATION. *Le jeu du taquin.* Historique ; définition du taquin ; les permutations rectilignes ; les permutations circulaires ; les dérangements ; les deux classes de permutations ; les échanges ; les cycles ; les écarts ; nombre des positions initiales ; les impossibilités de position ; la pratique du taquin ; ordre magique ; le taquin continental ; théorie du garage ; les impossibilités de forme ; le taquin à péninsule ; le taquin complet. — Note I : sur le jeu des traversées ; Note II : sur le jeu des ponts et des îles ; Note III : sur le jeu des labyrinthes ; Note IV : le problème des neuf reines et des dix reines ; Note V : sur le solitaire à quarante et une cases ; Note VI : sur les nombres parfaits. Index bibliographique.

## NOTES MATHEMATIQUES.

*1. *Sur la question* 724 (*Mathesis*, (2), II, p. 26), par M. SOLLERTINSKY. Voici une solution élémentaire. Si l'on fait tourner l'angle MCN autour de C, ses côtés marquent sur les deux circonférences des divisions semblables, dont on peut trouver le centre de similitude S. Le triangle SMN a une forme constante; donc, si sur SE on décrit un segment capable de l'angle connu SME, l'intersection de la circonférence de ce segment avec la circonférence A détermine un point de la sécante demandée.

2. *Sur la question* 736 (*Mathesis*, (2), I, p. 261). En posant $y = \frac{1}{z}$ on obtient la transformée

$$z' = 1 + \frac{x(x-z)}{1-x^2}$$

celle-ci devient, si l'on suppose $z - x = u$ :

$$\frac{u'}{u} = -\frac{x}{1-x^2}.$$

équation où les variables sont *séparées*; etc.

(*Extrait d'une lettre de* M. E. CATALAN.)

---

## SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES(*).

### Question 519.

(Voir *Mathesis*, (1), VI, p. 119, (2), I, p. 30.)

*Si les équations*

$$f(x) - x = 0, \quad f[f(x)] - x = 0$$

*ont une racine commune qui soit racine simple de la première et racine multiple de la seconde, l'ordre de multiplicité est impair.* (MOUTARD.)

*Solution par* M. SOONS (Tirlemont). Soit $a$ la racine commune. Comme elle est racine simple de la première équation, la fonction

---

(*) Nous avons reçu de MM. Cristesco et Liénard des solutions de la question 733 que nous n'avons pu mentionner dans la précédente livraison; de Mlle de Haas et de M. Liénard des solutions de la question 738; de M. Delahaye, une solution de 745. M. Sollerstinsky nous avait adressé à temps, de la question 729, une solution identique à celle de M. E. Catalan, solution qui a été égarée.

$f(x) - x$ peut être supposée positive, par exemple, au delà de $x = a$, jusqu'à $x = X$, X étant la racine de $f(x) - x = 0$, immédiatement supérieure à $a$; négative en deçà de $a$, depuis $x = x_0$, $x_0$ étant la racine de $f(x) - x = 0$, immédiatement inférieure à $a$.

La fonction étant continue, si $h$ représente une quantité positive, on a

$$\lim [f(a+h) - (a+h)] = 0, \quad \lim [f(a-h) - (a-h)] = 0$$

quand $h$ tend vers zéro. On a donc, pour $h$ suffisamment petit,

$$f(a+h) = a+k,$$
$$f(a-h) = a-l,$$

$k$ et $l$ étant des quantités qui s'annulent en même temps que $h$ et qui peuvent devenir et rester aussi petites que l'on veut si $h$ diminue indéfiniment. On pourra donc trouver pour $h$ une valeur suffisamment petite pour que les valeurs correspondantes de $a+k$, $a-l$ soient toujours comprises dans les intervalles $(a, X)$, $(x_0, a)$, quand $h$ tend vers zéro.

Mais alors l'expression

$$f[f(a+h)] - (a+k)$$

peut s'écrire

$$f[f(a+h)] - f(a+h) + f(a+h) - (a+k),$$

ou encore,

$$f(a+k) - (a+k) + f(a+h) - (a+h).$$

Elle se compose de deux parties qui restent constamment positives et tendent vers zéro en même temps que $h$. On en conclut que la fonction

$$f[f(x)] - x$$

est toujours positive pour $x$ variant de $a+h$ à $a$ et qu'elle a pour limite 0.

De même, la fonction

$$f[f(x)] - x$$

est toujours négative pour $x$ variant de $a-h$ à $a$ et tend vers zéro, puisque l'on a

$$f[f(a-h)] - (a-h) = f(a-l) - (a-l) + f(a-h) - (a-h)$$

quantité composée de deux parties négatives.

Donc, la fonction $f[f(x)] - x$ change de signe en s'annulant quand $x$ passe par $a$, et par suite

$$f[f(x)] - x = 0$$

admet $a$ comme racine d'un degré de multiplicité impair.

## Question 643.

(Voir *Mathesis*, (1), IX, p. 88.)

*Soient* A, B, C *trois points d'une courbe quelconque* Σ. *Il existe une conique inscrite au triangle* ABC *et ayant pour foyer un point donné* F. *Si les points* B *et* C *se rapprochent indéfiniment de* A, *le rayon de courbure de la conique au point* A *tend indéfiniment vers le quadruple de celui de la courbe* Σ *au même point*(*). (Cl. Servais.)

*Solution par* M. Lalisse. Transformons la figure par polaires réciproques par rapport au point F. La courbe Σ se transforme en une courbe Σ′. Aux points A, B, C de la courbe correspondent trois tangentes à Σ′ se coupant en *a*, *b* et *c*. La conique inscrite au triangle ABC se transforme en un cercle circonscrit au triangle *abc*. Passons à la limite dans les deux figures. Pour la courbe Σ nous aurons une conique touchant cette courbe Σ en A. La courbe Σ′ nous donnera un cercle tangent à celle-ci en un point A′ correspondant au point A. Soient R,R′ les rayons de courbure des deux courbes en A et A′, φ l'angle des deux normales en ces points. On a entre ces éléments la relation suivante $RR' \cos^2\varphi = K^2$ (*J. de Liouville*, 1866, p. 195), $K^2$ étant une constante ; c'est la relation qui lie les rayons de courbure en deux points correspondants de deux courbes polaires réciproques. Une relation analogue doit exister entre le rayon du cercle limite et le rayon de courbure de la conique en A quand on passe à la limite. Or l'angle φ est conservé ; donc en désignant par ρ et ρ′ les rayons on a la relation suivante : $\rho\rho' \cos^2\varphi = K^2$.

Mais on a (Voir *Mathesis*, (1), IX, p. 105) : $\rho = \frac{1}{4}$ R. Il suit de là que $\rho' = 4R'$.

Note. M. Bruyr a résolu la même question en s'appuyant sur les théorèmes suivants, énoncés par M. Servais dans *Mathesis*, t. IX, pp. 105 et 136 :

*Soient* A, B, C *trois points infiniment voisins d'une courbe* Σ, *et soient a*, *b*, *c les tangentes en ces points*. *Lorsque les points* B *et* C *se rapprochent*

(*) Il serait plus exact de dire que la conique a pour limite celle qui touche Σ en A et dont le rayon de courbure en ce point est quadruple de celui de la courbe Σ.

(J. N.)

*indéfiniment de* A, 1° *le cercle circonscrit au triangle formé par* $a, b, c$ *a pour limite un cercle touchant* $\Sigma$ *en* A *et ayant un rayon égal au quart du rayon de courbure de* $\Sigma$ *en* A : 2° *un cercle exinscrit au triangle* ABC *a pour limite le cercle de courbure de* $\Sigma$ *en* A.

Supposons que les points B, C dépendent l'un de l'autre(*) d'après une loi constante telle, qu'ils arrivent simultanément en A; une telle loi serait, par exemple, arc AC = 2 arc AB. Voici, dans ce cas, une nouvelle démonstration des théorèmes précédents. Nous commençons par établir le second théorème et nous en déduirons le premier.

Le cercle osculateur en A est la limite d'un cercle touchant $a$ et $b$ et passant par A. En effet, soient C′ l'intersection de $a$ avec $b$, D le point de rencontre de la normale en A à $\Sigma$ avec la bissectrice de l'angle AC′B, $\omega$ le centre de courbure de $\Sigma$ en A. Représentons par C′ l'angle supplémentaire de AC′B, par B l'angle ABC. Le triangle rectangle AB′D donne

$$AD = AC' \cot g \tfrac{1}{2} C' = AB \frac{\sin B \cot g \tfrac{1}{2} C'}{\sin C'} = AB \frac{\sin B}{2 \sin^2 \tfrac{1}{2} C'}.$$

Pour trouver la limite de AD, on peut remplacer le cercle AB par la différentielle $ds$ de l'arc, $\sin \frac{1}{2} C'$ par $\frac{1}{2} \varepsilon$, $\sin B$ par $\frac{1}{2} \varepsilon$, $\varepsilon$ désignant l'angle de contingence. Ces substitutions donnent $\lim AD = \frac{ds}{\varepsilon}$.

Soit ensuite B′ l'intersection de $c$ avec $a$. D'après ce qui vient d'être démontré, les bissectrices des angles AC′B, AB′C tendent à couper la normale Aω au même point A, lorsque les cordes AB, AC qu'on suppose du même ordre infinitésimal, décroissent vers zéro. Donc leur point de concours, qui est le centre d'un cercle tangent à $a, b, c$ a pour limite ω.

Le second théorème étant ainsi établi, désignons par R, $r$, $r_a$, $r_b$, $r_c$ les rayons du cercle circonscrit, du cercle inscrit et des cercles exinscrits au triangle A′B′C′ ; on a

$$r_a + r_b + r_c = r + 4R.$$

Si B et C se rapprochent de A, trois des cercles tangents à $a, b, c$ tendent vers zéro, le quatrième vers le cercle de courbure ; donc $\lim 4R = A\omega$, $\lim R = \frac{1}{4} A\omega$.

Passons maintenant à la question 643. Soit Δ une conique assujettie

---

(*) M. Servais nous fait observer que l'on peut aussi faire la démonstration dans le cas où A et B sont confondus.

à toucher les côtés du triangle ABC et à satisfaire à deux autres conditions constantes $\alpha$ et $\beta$. Lorsque B et C tendent à se confondre avec A, $\Delta$ tend vers une courbe limite $\Delta_1$, qui touche $a$ en A et satisfait aux conditions $\alpha$ et $\beta$; l'un des cercles exinscrits au triangle ABC a pour limite le cercle osculateur à $\Delta_1$ au point A (d'après le 2e théorème de M. Servais); ce même cercle a aussi pour limite un cercle touchant $\Sigma$ en A et ayant un rayon égal au quadruple du rayon de courbure de $\Sigma$ en A. Donc la question 643 est démontrée.

Telle est en substance, la démonstration de M. Bruyr. Elle donne lieu à une critique : On raisonne sur la conique $\Delta$ comme si elle était fixe. — Nous avons substitué à la condition du foyer fixe deux autres conditions $\alpha$, $\beta$. (J. N.)

---

## ×Question 727.

(Voir *Mathesis*, (2), I, p. 152.)

*Soient* A'B'C', A''B''C'' *deux triangles inscrits au triangle* ABC *et homologiques avec ce dernier. Soient* A''', B''', C''' *les intersections des côtés homologues des triangles* A'B'C', A''B''C''. *Démontrer que le triangle* A'''B'''C''' *est homologique avec chacun des triangles* ABC, A'B'C', A''B''C''. (Lachlan.)

*Solution par* MM. Déprez *et* Listray. Soient $(x', y', z')$, $(x'', y'', z'')$ les coordonnées des centres d'homologie du triangle ABC comparé à A'B'C' et A''B''C''. Les équations des droites A'B', A''B'' seront

$$\frac{x}{x'}+\frac{y}{y'}-\frac{z}{z'}=0, \quad \frac{x}{x''}+\frac{y}{y''}-\frac{z}{z''}=0;$$

par suite, si l'on désigne par X, Y, Z les déterminants formés avec deux colonnes du système

$$\begin{matrix} \frac{1}{x'} & \frac{1}{y'} & \frac{1}{z'} \\ \frac{1}{x''} & \frac{1}{y''} & \frac{1}{z''}, \end{matrix}$$

les coordonnées des points A''', B''', C''' seront

$$-X, Y, Z; \quad X, -Y, Z; \quad X, Y, -Z.$$

On en conclut que les droites AA''', BB''', CC''' concourent en un même point ayant pour coordonnées X, Y, Z.

Les coordonnées de A' étant 0, $y'$, $z'$, la droite A'A''' et par analogie les droites B'B''', C'C''' ont pour équations

$$\frac{x}{x'}\left(\frac{Y}{y'}-\frac{Z}{z'}\right)+\frac{X}{x'}\left(\frac{y}{y'}-\frac{z}{z'}\right)=0,\quad \frac{y}{y'}\left(\frac{Z}{z'}-\frac{X}{x'}\right)+\frac{Y}{y'}\left(\frac{z}{z'}-\frac{x}{x'}\right)=0,$$

$$\frac{z}{z'}\left(\frac{X}{x'}-\frac{Y}{y'}\right)+\frac{Z}{z'}\left(\frac{x}{x'}-\frac{y}{y'}\right)=0.$$

La somme de ces égalités donne $0=0$; donc les trois droites concourent en un même point. En résolvant deux des équations, on trouve que les coordonnées du centre d'homologie des triangles A'B'C', A'''B'''C''' sont $X^2 : x'$, $Y^2 : y'$, $Z^2 : z'$.

Remarques. I. Soient E, D les centres d'homologie des couples de triangles (A'B'C', A'''B'''C''') et (A''B''C'', A'''B'''C'''). La droite DE a pour équation

$$\frac{x}{X}+\frac{y}{Y}+\frac{z}{Z}=0;$$

c'est donc la polaire du centre d'homologie des triangles A'B'C', A''B''C'' par rapport au triangle ABC. (Déprez.)

II. On sait que les six points A', B', C', A'', B'', C'' appartiennent à une même conique ayant pour équation (*Mathesis*, (1) I, p. 276)

$$\mathbf{S}\frac{x^2}{x'x''}-\mathbf{S}\,xy\left(\frac{1}{x'y''}+\frac{1}{x''y'}\right)=0.$$

Cette courbe passe également par les points D, E; c'est ce qu'on peut prouver en considérant l'hexagone A'B'D C'C'''A'' dont les côtés opposés se coupent en trois points qui sont en ligne droite. (Déprez.)

---

## Question 739.

(Voir *Mathesis*, (2), I, p. 240.)

*On donne une circonférence* Δ, *un diamètre* AB *et une perpendiculaire* Δ' *à* AB. *Une droite quelconque menée par* A *coupe* Δ *en* M, Δ' *en* N. *On tire par* M *une perpendiculaire à* AB *et par* N *une parallèle à* AB; *ces droites se rencontrent en* P. *Trouver les points d'inflexion du lieu de* P.

— *Même question, lorsque* Δ′ *est parallèle à* AB *et que* MP, NP *sont respectivement parallèle et perpendiculaire à* AB. (J. Neuberg.)

*Solution par* MM. Absolonne, Bellens, V. Cristesco et Déprez. 1° Si R est le rayon de Δ, et $d$ la distance de Δ′ à l'origine A des coordonnées, on a $\overline{AM}^2 = 2Rx$, $\overline{AN}^2 = d^2 + y^2$; d'où, en multipliant et en observant que $AM \cdot AN = 2Rd$, l'équation du lieu :

$$x(d^2 + y^2) - 2Rd^2 = 0.$$

On en déduit

$$y = d\sqrt{\frac{2R - x}{x}}, \quad y' = -\frac{Rd}{\sqrt{(2R - x)x^3}}, \quad y'' = Rd\frac{3Rx^2 - 2x^3}{[(2R - x)x^3]^{\frac{3}{2}}}.$$

Comme $y''$ change de signe lorsque $x$ passe par la valeur $\frac{3}{4}R$ qui annule cette dérivée, deux points d'inflexion correspondent à $x = \frac{3}{4}R$, $y = \pm\frac{d}{\sqrt{3}}$.

2° Soient $y = b$ l'équation de Δ′, et $y = mx$ celle de AM; l'ordonnée de M est $y = \frac{2Rm}{1 + m^2}$; l'abscisse de N, $x = \frac{b}{m}$. Ce sont là les coordonnées de P; donc en éliminant $m$ on a pour l'équation du lieu de P :

$$y = \frac{2Rbx}{b^2 + x^2}.$$

Ensuite,

$$y' = \frac{2Rb(b^2 - x^2)}{(b^2 + x^2)^2}, \quad y'' = \frac{4Rbx(x^2 - 3b^2)}{(b^2 + x^2)^2}.$$

La courbe a donc deux points d'inflexion dont les coordonnées sont

$$x = \pm b\sqrt{3}, \quad y = \pm\frac{R\sqrt{3}}{2}.$$

L'origine des coordonnées étant un centre de symétrie et appartenant à la courbe est un troisième point d'inflexion; c'est ce que l'on déduit aussi de la valeur de $y''$.

*Solution par* M. Morel (Creusot). 1° Soient $x^2 + y^2 - R^2 = 0$, $z - a = 0$ les équations de Δ et Δ′; le lieu de P est représenté par

$$f = xy^2 + Ry^2 + K^2x - RK^2 = 0,$$

où $K^2 = (a + R)^2$. Les points d'inflexion sont situés sur la courbe hessienne définie par la relation

$$\varphi \equiv \begin{vmatrix} f'_{xx} & f'_{xy} & f'_{xz} \\ f'_{yx} & f'_{yy} & f'_{yz} \\ f'_{zx} & f'_{zy} & f'_{zz} \end{vmatrix} = 0;$$

dans notre cas particulier,

$$\varphi = xy^2 - 5Ry^2 + K^2x + K^2R = 0.$$

Les courbes $f$ et $\varphi$ se coupent aux points cherchés :

$$x = \frac{1}{2}R, \quad y = \pm\frac{a+R}{\sqrt{3}}.$$

On peut observer que la courbe $\varphi$ a même forme que la courbe $f$, sauf qu'elle est retournée.

2° En prenant pour origine le point A, on trouve pour le lieu de P,

$$f \equiv yx^2 + b^2y - 2bRx = 0;$$

puis pour la hessienne de $f$,

$$\varphi \equiv b^2x^2y - 2bRx^3 + 4b^3Rx + b^4y = 0.$$

La résolution des équations $f = 0$, $\varphi = 0$ donne $x = \pm b\sqrt{3}$, $y = \pm \frac{1}{4}R\sqrt{3}$. Un troisième point d'inflexion est en A.

Mlle Pompilianu et MM. Joachimescu et Greenstreet ont résolu la même question. — Si l'on désigne par $\alpha$ l'angle BAM, on trouve pour les coordonnées de P : dans le premier cas : $x = 2R\cos^2\alpha$, $y = d\,\mathrm{tg}\,\alpha$; dans le second cas : $x = b\,\mathrm{cotg}\,\alpha$, $y = 2R\sin\alpha\cos\alpha$. En désignant par $x'$, $y'$, $x''$, $y''$ les dérivées de ces valeurs par rapport à $\alpha$, on a, en un point d'inflexion, $x'y'' - x''y' = 0$; pour les deux courbes, on trouve $\mathrm{tg}\,\alpha = (1 : \sqrt{3})$ ou $\alpha = 30°$.

Les lignes qui font l'objet de la question 739 sont, la première, la *courbe d'Agnesi*, la seconde, la *serpentine* (Voir de Longchamps, *Géométrie de la règle et de l'équerre*, pp. 108 et 110, et *Congrès de Nancy*, p. 5 et J. M. S., 1885, p. 199, 265 et 1886, p. 223.)

M. Déprez remplace $\Delta'$ par une droite quelconque; il trouve alors que les abscisses des points d'inflexion sont données par une équation du troisième degré. Pour la construction de la tangente au lieu de P, il renvoie à une méthode de M. Godefroy. (J. M. S., 1886, p. 222.)

## Question 740.

(Voir *Mathesis*, (2), I, p. 240.)

***Mettre la relation***

$$\cos\tfrac{1}{4}(a+b+c-\pi)+8\cos\tfrac{1}{4}(3a-b-c+\pi)=0 \qquad (1)$$

***sous la forme***

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{4}(a+b-c)\operatorname{tg}\tfrac{1}{4}(a-b+c)\operatorname{tg}\tfrac{1}{4}(b+c-a)=1. \qquad \text{(E. Gelin).}$$

*Solution par* M. Joachimescu. La relation proposée se transforme aisément en celle-ci :

$$(1)\ \cos\frac{a}{2}\cos\left(\frac{a-b-c}{4}+\frac{\pi}{4}\right)+2\cos\frac{b-c}{2}\cos\left(\frac{b+c-a}{4}+\frac{\pi}{4}\right)=0;$$

il suffit de changer la somme de deux cosinus en un produit. Si l'on observe que

$$\cos\left(\frac{a-b-c}{4}+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{a-b-c}{4}\right),$$

l'égalité précédente donne

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{b+c-a}{4}\right)=-\frac{\cos\dfrac{b-c}{2}}{\cos\dfrac{a}{2}},$$

d'où en développant le premier membre,

$$\frac{1+\operatorname{tg}\dfrac{b+c-a}{4}}{1-\operatorname{tg}\dfrac{b+c-a}{4}}=-\frac{\cos\dfrac{b-c}{2}}{\cos\dfrac{a}{2}}.$$

Résolvons par rapport à $\operatorname{tg}\frac{1}{4}(b+c-a)$; il vient

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{4}(b+c-a)=\frac{\cos\dfrac{a}{2}+\cos\dfrac{b-c}{2}}{-\cos\dfrac{a}{2}+\cos\dfrac{b-c}{2}}=\operatorname{cotg}\frac{a+c-b}{4}\operatorname{cotg}\frac{a+b-c}{4},$$

ce qui résout la question proposée.

Autres solutions par MM. Cristesco et François.

Mlle de Haas et MM. Delahaye, Greenstreet, Absolonne et Decamps transforment l'égalité (1) au moyen de la formule

$$\cos(x+\tfrac{1}{4}\pi)=(\cos x-\sin x)\frac{1}{\sqrt{2}},$$

réunissent deux à deux les quatre termes de la nouvelle équation, et parviennent ainsi à la relation

$$\cos\tfrac{1}{2}(-a+b+c)\cos\tfrac{1}{2}(a-b+c)\cos\tfrac{1}{2}(a+b-c)$$
$$-\sin\tfrac{1}{2}(-a+b+c)\sin\tfrac{1}{2}(a-b+c)\sin\tfrac{1}{2}(a+b-c)=0.$$

## ×QUESTIONS D'EXAMEN.

**516.** Que devient l'expression $(u^2-v^2)^2+u^2+v^2+m(u+v)$ lorsqu'on remplace $u$ par $x+1$ et $v$ par $x-1$? Pour quelle valeur de $m$ le polynôme ainsi obtenu est-il le double d'un carré parfait?

**517.** Une droite est donnée par ses projections; construire l'angle qu'elle fait avec la ligne de terre.

## QUESTIONS PROPOSÉES.

**×755.** Démontrer que l'expression

$$\tfrac{1}{3}\,S\,a^2(b-c)(ab+ac-2bc)^2$$

est un carré parfait. (DE LONGCHAMPS.)

**756.** Une ellipse donnée glisse dans son plan de manière à passer par deux points fixes; trouver le lieu décrit par le centre. (E. CATALAN.)

**×757.** Discuter les racines de l'équation

$$x^4+[2d(d-a)-b]x^2+d^2[(d-a)^2-b]=0,$$

où $d$ est un paramètre variable de $-\infty$ à $+\infty$; $a$, $b$ sont des nombres positifs constants. Trouver la condition pour que le produit de deux racines soit égal à la somme des deux autres. (*Baccal.*, POITIERS, 1891.)

**758.** On donne une sphère de rayon R, rapportée à trois diamètres rectangulaires. On considère la section ZOX et on suppose que celle-ci tourne autour de OZ d'un mouvement uniforme, pendant que le rayon OA de cette section, partant de la position OZ se déplace autour de O avec la même vitesse. Étudier la courbe ainsi décrite sur la sphère par le point A. (H. BROCARD.)

---

**Rectifications.** Page 21, lignes 4 et 7, lire : Monchamp, au lieu de Monchamps. *Question* 712, page 25, ligne 6. Lire : *progression géométrique* au lieu de *proportion harmonique*. *Question* 724, p. 26. La solution est due à M. Déprez, qui a aussi considéré le problème analogue relatif à deux petits cercles tracés sur une même sphère. M. Déprez est aussi l'auteur de la question 752.

# NÉCROLOGIE.

## LOUIS-PHILIPPE GILBERT.

Nous avons le regret d'annoncer à nos lecteurs la mort de l'un de nos plus anciens et plus fidèles collaborateurs, LOUIS-PHILIPPE GILBERT, professeur à l'Université catholique de Louvain, ancien associé de l'Académie royale de Belgique, correspondant de l'Institut de France.

L.-PH. GILBERT est né à Beauraing le 7 février 1832 et est mort à Louvain, le 4 février 1892. Depuis 1855, il était professeur à l'Université de Louvain; à l'époque de sa mort, il y était chargé des cours d'analyse infinitésimale, de mécanique analytique et de physique mathématique.

On lui doit de nombreux et savants mémoires sur toutes les parties de son vaste enseignement : existence de la dérivée, développement des fonctions implicites, intégrales définies, séries de Fourier, fonction gamma, équations différentielles linéaires, équations aux dérivées partielles, théorie générale des surfaces, cinématique des mouvements relatifs, théorie de la rotation des corps, hydrodynamique, principes de la thermodynamique, de l'optique et de l'électrodynamique, etc. Il a publié trois éditions successives de son *Cours d'Analyse infinitésimale* et son *Cours de Mécanique analytique*, l'un et l'autre aussi remarquables au point de vue scientifique qu'au point de vue pédagogique. Une quatrième édition du *Cours d'Analyse* était sous presse au moment de la mort de l'auteur.

On doit aussi à GILBERT des articles de haute vulgarisation scientifique (constitution du soleil, géodésie d'Éthiopie, géographie de l'Afrique, progrès récents de l'optique, etc.), des notices historiques remarquables (Chasles, Puiseux, etc.), puis des études sur Galilée écrites avec une compétence et une connaissance des sources qui seront difficilement surpassées.

Le travail le plus remarquable de GILBERT, celui qui sans doute lui a ouvert les portes de l'Institut de France, est son *Mémoire sur l'Application de la Méthode de Lagrange à divers problèmes de mouvement relatif*. C'est là que se trouve exposée la théorie de son *barogyroscope*, cet admirable instrument qui met en évidence le mouvement de rotation de la terre par rapport aux étoiles fixes et peut servir, en l'absence du ciel, à déterminer la méridienne et même la latitude du lieu d'observation.

P M. et J. N.

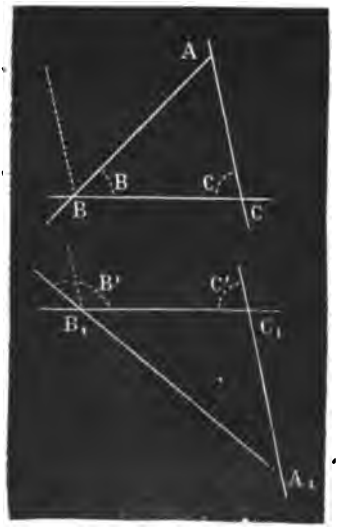
# ÉTUDE SUR UNE NOUVELLE TRANSFORMATION,

## dite Transformation continue (*);

par M. E. LEMOINE, ingénieur à Paris.

Soit une droite indéfinie BC sur laquelle je marque deux points B et C; je conviens que sur cette droite et sur les droites parallèles à BC, je compterai les longueurs positives dans le sens BC.

BC sépare le plan en deux parties, l'une au-dessus, l'autre au-dessous de BC. Coupons BC par une droite quelconque; je définis *sur cette droite* le sens dans lequel je compte les longueurs positives, en disant que c'est le sens du chemin suivi par un mobile qui, partant sur cette droite du point de son intersection avec BC, suivrait la partie située au-dessus de BC.




Cela posé, formons le triangle ABC, A étant au-dessus de BC. Si, $a, b, c$ sont les trois côtés; on aura donc: $BC = +a$, $CA = +b$, $AB = -c$.

Je suppose que j'aie démontré, sur cette figure, une relation générale quelconque entre les côtés $a, b, c$ et les angles A, B, C d'un triangle. Soit

$$f(a, b, c, A, B, C) = 0; \qquad (k)$$

cette relation. Je pourrai évidemment l'écrire

$$f(BC, CA, BA, A, B, C) = 0. \qquad (l)$$

Je suppose maintenant que je fasse tourner BA autour de B dans le sens BCA jusqu'à ce qu'elle dépasse la parallèle à CA menée par B, la relation $(l)$ subsistera évidemment d'après le principe de continuité entre les quantités qui représentent ce que sont devenus BC, CA, BA, A, B, C de la première figure en passant à la

(*) Depuis que le manuscrit de cet article nous a été remis, M. E. LEMOINE a publié, sur la même question, un article dans le *Bulletin de la Société mathématique de France*, 1891, p. 136-141, et dans le Recueil de l'Association française (≡ A. F.) pour l'avancement des sciences, congrès de Marseille, 1891. La *transformation continue* s'applique au tétraèdre, comme l'auteur espère le montrer ultérieurement.

seconde. A, intersection de CA et de BA, est venu en $A_1$ dans la partie du plan située au-dessous de BC. Considérons maintenant le triangle $A_1B_1C_1$ et appelons $a_1, b_1, c_1$, $A_1$, $B_1$, $C_1$ ses côtés et ses angles.

BC, CA, BA de la première figure seront devenus $B_1C_1$, $C_1A_1$, $B_1A_1$ sur la seconde; c'est-à-dire que $a$, $b$, $c$ seront devenus $a_1$, $-b_1$, $-c_1$.

Les angles en B et en C seront devenus B′ et C′ ou $180^\circ - B_1$ et $180^\circ - C_1$; comme on a toujours $A + B + C = 180^\circ$, si l'on désigne par A′ ce que l'angle A est devenu, on aura $A' + B' + C' = 180^\circ$ ou $A' + 180^\circ - B_1 + 180 - C_1 = 180^\circ$ ou $A' + 180^\circ - B_1 - C_1 = 0$ ou $A' + A_1 = 0$ ou $A' = -A_1$; ainsi A est devenu $-A_1$.

En résumé, la formule $(l)$ qui sera devenue

$$f(B_1C_1, C_1A_1, B_1A_1, A', B', C') = 0$$

pourra s'écrire

$$f(a_1, -b_1, -c_1, -A_1, \pi - B_1, \pi - C_1) = 0,$$

ou en effaçant les indices

$$f(a, -b, -c, -A, \pi - B, \pi - C) = 0,$$

relation qui représentera une propriété générale des triangles.

Si $(k)$ contient d'autres éléments du triangle que $a$, $b$, $c$, A, B, C; par exemple R, S, $r$, $r_a$ ... $p$, $p - a$, ..., comme ceux-ci s'expriment en fonction de $a$, $b$, $c$, A, B, C, il faudra remplacer ces éléments par ce qu'ils deviennent dans la transformation que nous venons de définir; ainsi $p$, $p - a$, $p - b$, $p - c$ deviennent respectivement $-(p - a)$, $-p$, $p - c$, $p - b$; S, c'est-à-dire $\frac{1}{2} bc \sin A$, devient $-\frac{1}{2} bc \sin A$ ou $-S$; R, c'est-à-dire $\frac{1}{4}\frac{abc}{S}$, devient $\frac{1}{4}\frac{-abc}{S}$ ou $-R$; $r$, c'est-à-dire $\frac{S}{p}$ devient $\frac{-S}{-(p-a)}$ ou $r_a$; $r_a$ devient $r$; $r_b$ devient $-r_c$, $r_c$ devient $-r_b$, etc.

Il peut se faire que cette transformation appliquée à certaines formules la reproduise simplement. Exemples :

$$a = b\cos C + c\cos B; \quad \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}; \quad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A;$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}.$$

Mais les égalités

$$a(p - a) = r(\delta - r_a); \quad r_a^2 + r_b^2 + r_c^2 = \delta^2 - p^2;$$

$$\Sigma \sin A = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2},$$

donnent respectivement,

$$ap = r_a(\delta_a + r); \quad r^2 + r_b^2 + r_c^2 = \delta_a^2 - (p-a)^2;$$
$$-\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}, \text{ etc.}$$

formules différentes. Nous avons désigné ici, ainsi que nous le faisons d'ordinaire, par $\delta$, $\delta_a$ etc. les quantités $4R+r$, $4R-r_a$ etc., qui reviennent très fréquemment dans les formules relatives au triangle.

Nous appellerons la transformation précédente : *transformation continue en* A; il est à peine besoin de faire remarquer que $(k)$ étant donné, il y a aussi les *transformations continues en* B *et en* C.

Voici le tableau de la transformation continue en A des principaux éléments du triangle :

$$a, b, c, p, p-a, p-b, p-c, S, R, r_a, r_b, r_c, r, \delta, \delta_a, \delta_b, \delta_c, h_a, h_b, h_c,$$
$$l_a, l_b, l_c, l'_a, l'_b, l'_c, A, B, C, \omega \text{ etc.}$$

se changent respectivement en :

$$a, -b, -c, -(p-a), -p, p-c, p-b, -S, -R, r, -r_c, -r_b, r_a,$$
$$-\delta_a, -\delta, -\delta_c, -\delta_b, -h_a, h_b, h_c, -l_a, -l'_b, -l'_c - l'_a, -l_b, -l_c,$$
$$-A, \pi - B, \pi - C, -\omega, \text{ etc.}$$

$l_a, l_b, l_c$, étant les bissectrices intérieures, $l'_a, l'_b, l'_c$ les bissectrices extérieures, $h_a, h_b, h_c$ les trois hauteurs, $\omega$ l'angle de Brocard.

La transformation continue est intéressante à plusieurs titres; *elle donne la loi*, non clairement explicitée avant elle, qui permet de passer d'une formule ou d'un théorème à ses analogues; ainsi, l'on avait parfaitement remarqué diverses liaisons intimes entre certains éléments du triangle; par exemple, si l'on avait démontré une relation où entrassent, entre autres éléments, les côtés et le rayon du cercle inscrit, on en découvrait le plus souvent trois autres où les côtés et le rayon d'un cercle ex-inscrit entraient d'une façon analogue, mais il fallait une nouvelle recherche pour spécifier les nouvelles formules et les démontrer, recherche et démonstration devenues inutiles avec la *transformation continue*.

Ainsi, je suppose que l'on ait démontré les formules :

$$bc + ca + ab = p^2 + r\delta, \quad (b+c)(c+a)(a+b) = 2p[p^2 + r(2R+r)],$$

on en déduira immédiatement

$$bc - ca - ab = (p-a)^2 - r_a\delta_a;$$
$$(b+c)(a-b)(a-c) = 2(p-a)[(p-a)^2 - r_a(2R - r_a)].$$

Cette transformation conduit naturellement à de nombreuses formules

auxquelles on songerait difficilement et dont la démonstration directe offrirait quelquefois des difficultés parce que les calculs ne seraient pas guidés par la symétrie. Ainsi, lorsqu'on a trouvé

$$\Sigma a(p-a)^2 \cos A = \frac{2S}{R}[3R^2 - (R+r)^2],$$

$$\Sigma a^2 \cos A = \frac{r}{R}[3p^2 - \delta(2R+r)], \text{ etc.};$$

on en conclut immédiatement par transformation continue en A :

$$ap^2 \cos A + b(p-c)^2 \cos B + c(p-b)^2 \cos C = \frac{2S}{R}[3R^2 - (R-r_a)^2]$$

$$-a^2 \cos A + b^2 \cos B + c^2 \cos C = \frac{r_a}{R}[3(p-a)^2 - \delta_a(2R-r_a)], \text{ etc.}$$

Dans un *très remarquable* article de M. E. Lucas *Sur l'emploi dans la Géométrie d'un nouveau principe des signes* (Voir N. C. M., 1876, p. 384 et 1877, p. 1) se trouve, implicitement, la transformation que nous venons d'indiquer, mais la forme un peu abstraite sous laquelle elle est exposée a peut-être empêché qu'on ait aperçu la grande importance de l'idée nouvelle, dans la Géométrie du triangle; aussi je crois utile d'y revenir et de montrer comment elle s'est présentée à moi sans que je connusse le travail de M. Ed. Lucas, parce qu'il me semble avoir évité les difficultés provenant de l'interprétation du principe des signes. Ce principe pour être très simple, au fond, est cependant une source perpétuelle d'erreurs et de confusions à cause du défaut de concordance des conventions qui sont différentes en Trigonométrie, en Géométrie analytique, en Mécanique et variables avec chaque auteur en Géométrie. Nous citerons un célèbre exemple d'erreurs y relatives : M. Chasles (voir préface de la Géométrie supérieure, p. IX) croyait que le principe des signes n'était point applicable aux théorèmes de géométrie se rapportant à des grandeurs comptées sur des droites différentes; il a ainsi compliqué par la discussion de tous les cas possibles de position, un grand nombre de questions dont la démonstration devait être générale (voir Laguerre, N. A. M. 1870, p. 175 et suivantes). La nécessité s'impose, à mon avis, d'unifier toutes les conventions et surtout, *dès le commencement* dans les ouvrages didactiques, de ne plus parler de *droites*, mais de *directions*.

M. E. Lucas, lui même, s'était trompé dans l'article cité; car la transformation à laquelle son travail conduirait serait que dans une formule relative au triangle on peut *toujours* changer A, B, C en A, B — π, C — π

ce qui est inexact comme on peut le voir en l'appliquant à la formule : $\Sigma \sin A = 4 \cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$, exemple que M. Poulain n'a indiqué.

M. Neuberg (*Mathesis* (1), III, 1883, p. 168) revient incidemment sur l'article de M. Lucas à propos du groupe de formules indiquées par M. Main et donnant l'aire du triangle; mais dans cette note, la loi de transformation des éléments du triangle est énoncée, pour ainsi dire, sans démonstration.

Pour montrer l'utilité de *la transformation continue* dans la Géométrie du triangle nous donnons plus loin, en l'appliquant à chacune, un tableau de nombreuses formules.

Nous remarquerons qu'à cette transformation correspond une transformation analytique qui paraît nouvelle.

Soient $x$, $y$, $z$ les coordonnées normales absolues d'un point M, coordonnées supposées fonctions des éléments du triangle (comme le sont celles de tous les points remarquables du triangle).

J'ai

$$ax + by + cz = 2S, \tag{1}$$

supposons que $f$, $\varphi$, $\psi$ soient les fonctions qui donnent $x$, $y$, $z$; nous aurons

$$af + b\varphi + c\psi = 2S. \tag{2}$$

Appelons $f_a$, $\varphi_a$, $\psi_a$ ce que deviennent $f$, $\varphi$, $\psi$ par transformation continue en A, et transformons (2) en A; il vient :

$$af_a - b\varphi_a - c\psi_a = -2S; \tag{3}$$

cette identité montre qu'il y a un point $M_a$ dont les coordonnées normales absolues sont $-f_a$, $\varphi_a$, $\psi_a$ et c'est ce point que nous appelons le transformé de M par *transformation continue* en A.

On voit par l'équation (3) qu'il n'y a pas de point dont les coordonnées normales absolues soient $f_a$, $\varphi_a$, $\psi_a$; on comprend qu'il n'y a de transformé en M que si M est déterminé *en fonction* des éléments du triangle; ainsi un point marqué au hasard sur le plan n'a pas de transformé continu, cela ne signifie plus rien. Il en résulte qu'il n'y a pas de construction générale pour passer de M à son transformé et qu'il faut chercher la construction dans chaque cas particulier, suivant la façon dont M est lié au triangle. On déduit encore de ce qui précède que si l'on a une équation quelconque représentant un lieu géométrique lié au triangle,

$$F(x, y, z, P, Q, R \ldots) = 0,$$

P, Q, R ... étant par conséquent des fonctions des éléments du triangle,

le lieu géométrique donné par *transformation continue* en A et correspondant à la propriété transformée sera :

$$F(-x, y, z, P_a, Q_a, R_a \ldots) = 0,$$

en désignant par $P_a$, $Q_a$, $R_a$ ... ce que deviennent P, Q, R ... par transformation continue en A.

*Exemples :* Prenons le centre 0 du cercle inscrit, qui a pour coordonnées $r, r, r$; son homologue, qui a pour coordonnées $-r_a, r_a, r_a$ sera le centre $O_a$ du cercle ex-inscrit tangent au côté BC.

L'équation du cercle inscrit :

$$\cos\tfrac{1}{2}A\sqrt{x} + \cos\tfrac{1}{2}B\sqrt{y} + \cos\tfrac{1}{2}C\sqrt{z} = 0$$

devient

$$\cos\tfrac{1}{2}A\sqrt{-x} + \sin\tfrac{1}{2}B\sqrt{y} + \sin\tfrac{1}{2}C\sqrt{z} = 0,$$

équation du cercle ex-inscrit $O_a$.

Le barycentre, le point de *Lemoine*, le centre du cercle circonscrit, l'orthocentre, les points de *Brocard*, etc., sont leurs propres transformés.

Le point de *Gergonne* proprement dit, $\frac{1}{a(p-a)}, \frac{1}{b(p-b)}, \frac{1}{c(p-c)}$, étant transformé en A devient le point : $\frac{1}{ap}, \frac{1}{b(p-c)}, \frac{1}{c(p-b)}$, point de *Gergonne* du cercle ex-inscrit $O_a$.

Le point $(p-a)$, $(p-b)$, $(p-c)$ devient le point $p$, $(p-c)$, $(p-b)$. Ces points se sont souvent rencontrés (voir A.F., Congrès de Rouen, 1883, pp. 123 et suiv., nous les y nommions $\omega$ et $\omega_1$. Congrès de Toulouse, 1887, pages 25 et suiv. etc.).

L'ellipse $E_e$ qui a pour foyers A et B et passe en C et qui a par conséquent, pour axe transverse $a+b$ devient l'hyperbole $H_e$ de mêmes foyers et qui a pour axe transverse $a-b$. L'équation de $E_e$ étant :

$$(p-a)(p-b)(ax-by)^2 - ab(x+y)[a^2x + b^2y + cz(a+b)] = 0$$

celle de $H_e$ sera :

$$p(p-c)(ax-by)^2 - ab(x-y)[a^2x - b^2y + cz(a-b)] = 0.$$

Le point $\Theta_1$ (voir A.F., *Congrès de la Rochelle*, 1882, p. 110) dont les coordonnées normales sont :

$$\frac{2a-p}{a}, \text{ etc.} \quad \text{ou} \quad \frac{r_a r_b + r_a r_c - r_b r_c}{a} \text{ etc.}$$

est tel que l'on a : $\frac{\Theta_1 G}{\Theta_1 O} = \frac{4}{3}$.

Il est sur la droite qui joint le barycentre G au centre du cercle inscrit $o$. On en déduit le pont $\Theta_a$ :

$$\frac{3a+b+c}{a},\quad \frac{-3b+c-a}{b},\quad \frac{-3c-a+b}{c}$$

ou

$$\frac{r(r_b+r_c)+r_br_c}{a},\quad \frac{r(r_c-r_b)-r_br_c}{b},\quad \frac{r(r_b-r_c)-r_br_c}{c}.$$

$\Theta_a$ est sur la droite $Go_a$, et l'on a $\frac{\Theta_a o_a}{\Theta_a G}=\frac{4}{3}$.

Notons que dans presque tous nos mémoires sur la Géométrie du triangle, nous aurions beaucoup abrégé la recherche des résultats et quelquefois nous les aurions exprimés d'une façon plus complète, si nous avions eu la connaissance de la *transformation continue*.

On en trouve *à chaque instant* l'application ; ainsi les questions 704, 708, 710, de ce journal (1891, pp. 146 et 205) donnent les formules nouvelles :

$$(a\operatorname{tg}B+2r_a)(b\operatorname{tg}C-2r_a)(c\operatorname{tg}A-2r_a)=$$

$$(a\operatorname{tg}C+2r_a)(b\operatorname{tg}A-2r_a)(c\operatorname{tg}B-2r_a)=\frac{4r_a^3[(p-a)^2-r_a(2R-r_a)]}{(2R-r_a)^2-(p-a)^2}$$

$$(a\operatorname{tg}B-2r_b)(b\operatorname{tg}C-2r)(c\operatorname{tg}A+2r_c)=$$

$$-(a\operatorname{tg}C-2r_c)(b\operatorname{tg}A-2r_b)(c\operatorname{tg}B-2r)=\frac{2(p-a)^2(b-c)(b+a)(c+a)}{r_a[(p-a)^2-(2R-r_a)^2]}.$$

Si l'on a $(r+r_b+r_c)(r-r_b+r_c)(r+r_b-r_c)=8rr_br_c$, on aura aussi $2(p-a)=r_b+r_c-r$.

De même, la solution de la question 690 (tome X, 1890, p. 239), conduit par *transformation continue* en A à la formule nouvelle

$$b\left(\operatorname{cotg}\frac{B}{2}-\operatorname{tg}\frac{A}{2}\right)+c\left(\operatorname{cotg}\frac{c}{2}-\operatorname{tg}\frac{A}{2}\right)=4R.$$

Remarquons encore que dans une équation en coordonnées barycentriques $\alpha, \beta, \gamma$, soumise à la *transformation continue* en A, $\alpha, \beta, \gamma$ restent $\alpha, \beta, \gamma$; dans une équation rapportée à BC comme axe des $x$, à BA comme axe des $y$, $x$ reste $x$, $y$ devient $-y$ etc., etc.

(*A continuer.*)

## CARACTÈRES DE DIVISIBILITÉ(*);

par M. l'abbé E. Gelin, professeur au Collège Saint-Quirin à Huy.

1. Soient, dans un système quelconque de numération, 1, $a$, $b$, $c$, $d$, etc., les restes de la division des puissances successives de la base, 1, 10, 100, 1000, 10000, etc., par un diviseur D : un nombre est divisible par D, lorsque la somme des produits de ses chiffres, à partir de la droite (**), respectivement par 1, $a$, $b$, $c$, $d$, etc., est divisible par D.

On peut remplacer un reste quelconque par son complément au diviseur, et soustraire au lieu d'ajouter le produit correspondant à ce reste.

Dans le système décimal, par exemple, le reste de la division par 3 ou par 9 d'une puissance quelconque de 10 est 1 : donc *un nombre est divisible par* 3 *ou par* 9 *lorsque la somme de ses chiffres est divisible par* 3 *ou par* 9.

Les restes de la division par 6 ou par 18 des puissances successives de 10 sont 1, 4, 4, etc.; donc *un nombre est divisible par* 6 *ou par* 18 *lorsque la somme du chiffre de ses unités et de quatre fois la somme des autres chiffres est divisible par* 6 *ou par* 18.

Les restes de la division par 15 ou par 45 des puissances successives de 10 sont 1, 10, 10, etc.: donc *un nombre est divisible par* 15 *ou par* 45 *lorsque la somme du chiffre de ses unités et de dix fois la somme des autres chiffres est divisible par* 15 *ou par* 45.

Les restes de la division par 8 des puissances successives de 10 sont 1, 2, 4, 0 : donc *un nombre est divisible par* 8 *lorsque la somme du chiffre des unités, de deux fois le chiffre des dizaines et de quatre fois le chiffre des centaines est divisible par* 8.

Les restes de la division par 125 des puissances successives de 10 sont

---

(*) Ces caractères de divisibilité (ou, plus exactement pour la plupart des cas, ces théorèmes sur la divisibilité) ne sont nouveaux que par la forme générale sous laquelle l'auteur les présente. Ainsi, dans *Mathesis*, t. III, p. 104, nous avons donné des caractères de divisibilité par 7, 17, 19, 13, 37, 43, 67 compris dans le présent travail, en avertissant le lecteur que « ces théorèmes, sans être nouveaux, ne sont pas de ceux qui courent les rues » et en exprimant l'espoir que « nos jeunes lecteurs nous sauront gré de les publier ici. » (Rédaction.)

(**) Le rang d'un chiffre, dans un nombre, se compte à partir du chiffre des unités, c'est-à-dire de droite à gauche Pareillement, le partage d'un nombre en tranches de plusieurs chiffres se fait de droite à gauche, et le rang d'une tranche se compte à partir de la première à droite.

1, 10, 100, 0 : donc *un nombre est divisible par* 125 *lorsque le nombre formé par ses trois premiers chiffres à droite est divisible par* 125.

Les restes de la division par 7 des puissances successives de 10 sont périodiquement 1, 3, 2, 6, 4, 5 ou 1, 3, 2, —1, —3, —2 : donc *un nombre est divisible par* 7, *lorsqu'ayant été partagé en tranches de six chiffres, la somme des produits des chiffres de chaque tranche, respectivement par* 1, 3, 2, 6, 4, 5 *est divisible par* 7 ; ou, *lorsqu'ayant été partagé en tranches de trois chiffres, la différence entre la somme des produits des chiffres des tranches de rang impair, respectivement par* 1, 3, 2, *et la somme des produits des chiffres des tranches de rang pair, respectivement par les mêmes nombres, est divisible par* 7.

Les restes de la division par 11 des puissances successives de 10 sont alternativement 1 et 10, ou 1 et — 1 : donc *un nombre est divisible par* 11 *lorsque la somme de ses chiffres de rang impair et de dix fois la somme de ses chiffres de rang pair est divisible par* 11 ; ou *lorsque la différence entre la somme de ses chiffres de rang impair et la somme de ses chiffres de rang pair est divisible par* 11.

**2.** Plus généralement, soient 1, $a$, $b$, $c$, $d$, etc., les restes de la division des puissances 1, $10^n$, $10^{2n}$, $10^{3n}$, $10^{4n}$, etc., de la base, par un diviseur D : un nombre est divisible par D, lorsque la somme des produits de ses tranches de $n$ chiffres, à partir de la droite, respectivement par 1, $a$, $b$, $c$, $d$, etc., est divisible par D.

Par exemple, le reste de la division par 11 des puissances 1, $10^2$, $10^4$, $10^6$, $10^8$, etc., est 1 : donc *un nombre est divisible par* 11, *lorsque la somme de ses tranches de deux chiffres est divisible par* 11.

Les restes de la division par 13 des puissances 1, $10^3$, $10^6$, $10^9$, $10^{12}$, etc., sont alternativement 1 et 12, ou 1 et — 1 : donc *un nombre est divisible par* 13, *lorsqu'ayant été partagé en tranches de trois chiffres, la différence entre la somme des tranches de rang impair et la somme des tranches de rang pair est divisible par* 13.

Les restes de la division par 17 des puissances 1, $10^4$, $10^8$, $10^{12}$, $10^{16}$, etc., sont périodiquement 1, 4, 16, 13 ou 1, 4, — 1, — 4 : donc *un nombre est divisible par* 17, *lorsqu'ayant été partagé en tranches de quatre chiffres, la somme des produits des tranches successives respectivement par* 1, 4, — 1, — 4 *est divisible par* 17.

**3.** Plus généralement encore, soient 1, $a$, $b$, $c$, $d$, etc., les restes de la

division des puissances $1, 10^m, 10^{m+n}, 10^{m+n+p}, 10^{m+n+p+q}$, etc., de la base, par un diviseur D : un nombre est divisible par D, lorsqu'ayant été partagé en tranches respectivement de $m$, $n$, $p$, $q$, etc., chiffres, la somme des produits de ces tranches respectivement par $1, a, b, c$, etc., est divisible par D.

Par exemple, *un nombre est divisible par* 17, *lorsqu'ayant été partagé en tranches alternativement de* 2 *et de* 6 *chiffres, la somme des produits des tranches successives respectivement par* 1, — 2, — 1, 2 *est divisible par* 17; car les restes de la division par 17 des puissances 1, $10^2$, $10^8$, $10^{10}$, $10^{16}$, etc., sont périodiquement 1, 15, 16, 2 ou 1, — 2, — 1, 2.

*Un nombre est divisible par* 19, *lorsqu'ayant été partagé en tranches alternativement de* 5 *et de* 4 *chiffres, la somme des produits des tranches successives respectivement par* 1, 3, — 1, — 3 *est divisible par* 19; car les restes de la division par 19 des puissances $1, 10^5, 10^9, 10^{14}, 10^{18}$, etc., sont périodiquement 1, 3, 18, 16 ou 1, 3, — 1, — 3.

*Un nombre est divisible par* 23, *lorsqu'ayant été partagé en tranches alternativement de* 5, 3 *et* 3 *chiffres, la somme des produits des tranches successives respectivement par* 1, — 4, 2, — 1, 4, — 2 *est divisible par* 23; car les restes de la division par 23 des puissances $1, 10^5, 10^8, 10^{11}, 10^{16}, 10^{19}$, $10^{22}$, etc., sont périodiquement 1, 19, 2, 22, 4, 21 ou 1, — 4, 2, — 1, 4, — 2.

*Un nombre est divisible par* 29, *lorsqu'ayant été partagé en tranches alternativement de* 4, 4, 3 *et* 3 *chiffres, la somme des produits des tranches successives respectivement par* 1, — 5, — 4, 2, — 1, 5, 4, — 2 *est divisible par* 29; car les restes de la division par 29 des puissances $1, 10^4, 10^8, 10^{11}, 10^{14}, 10^{18}, 10^{22}, 10^{25}, 10^{28}$, etc., sont périodiquement 1, 24, 25, 2, 28, 5, 4, 27 ou 1, — 5, — 4, 2, — 1, 5, 4, — 2.

Ainsi le nombre 21975197656441 est divisible par 23, parce que la somme 56441 — 3904 + 1502 — 219 = 53820 est divisible par 23.

Le même nombre est divisible par 17, par 19 et par 29.

Dans la pratique, on peut diminuer un groupe quelconque de chiffres du nombre donné d'un multiple du diviseur.

Ainsi le nombre 21975197656441, par rapport au diviseur 23, peut être remplacé par 21050505610211, ou par 21004041010211, lequel est divisible par 23, parce que la somme 10211 — 1640 + 80 — 210 = 8441 est divisible par 23.

4. Un nombre est divisible par un diviseur D de $10^n$, lorsque le nombre formé par ses $n$ premiers chiffres à droite est divisible par D.

Dans le système décimal, on déduit, de ce théorème, les caractères de divisibilité par 2 et par 5; par 4 et par 25; par 8 et par 125; etc.

**5.** Un nombre est divisible par un diviseur D de $10^n - 1$, lorsque la somme de ses tranches de $n$ chiffres est divisible par D.

Dans le système décimal, on déduit, de ce théorème, les caractères de divisibilité par 3 et 9; par 11, diviseur de 99; par 27 et 37, diviseurs de 999; par 101, diviseur de 9999; par 41 et 271, diviseurs de 99999; etc.

**6.** Un nombre est divisible par un diviseur D de $10^n + 1$, lorsqu'ayant été partagé en tranches de $n$ chiffres, l'excès de la somme des tranches de rang impair sur la somme des tranches de rang pair est divisible par D.

Dans le système décimal, on déduit, de ce théorème, les caractères de divisibilité par 11; par 101; par 7, 11 et 13, diviseurs de 1001; par 73 et 137, diviseurs de 10001; par 9091, diviseur de 100001; etc.

Dans le cas où la division ne se fait pas exactement, les six théorèmes qui précèdent font connaître le reste de la division.

**7.** Un nombre est divisible par un diviseur D de $m.10^n - 1$, lorsque, ayant séparé $n$ chiffres sur la droite de ce nombre, la somme du nombre de gauche et de $m$ fois le nombre de droite est divisible par D.

En d'autres termes, soit $m - 1$ le nombre des *dizaines* ou des *centaines* ou des *mille*... d'un multiple de D, terminé par 9 ou 99 ou 999... : un nombre est divisible par D, lorsque le nombre de ses *dizaines* ou de ses *centaines* ou de ses *mille*..., augmenté de $m$ fois le nombre formé par son *premier* ou ses *deux premiers* ou ses *trois premiers*... chiffres à droite, est divisible par D.

Par exemple, *un nombre est divisible par* 29 *ou par* 31, diviseurs de 899 ou 900 — 1, *lorsque le nombre de ses centaines, augmenté de* 9 *fois le nombre formé par ses deux premiers chiffres à droite, est divisible par* 29 *ou par* 31.

*Un nombre est divisible par* 31 *ou par* 43, diviseurs de 3999 ou 4000 — 1, *lorsque le nombre de ses mille, augmenté de* 4 *fois le nombre formé par ses trois premiers chiffres à droite, est divisible par* 31 *ou par* 43.

*Un nombre est divisible par* 131 *ou par* 229, diviseurs de 29999 ou 30000 — 1, *lorsque le nombre de ses dizaines de mille, augmenté de* 3 *fois le nombre formé par ses quatre premiers chiffres à droite, est divisible par* 131 *ou par* 229.

Dans la pratique, on applique plusieurs fois de suite la même règle, jusqu'à ce que l'on arrive à une somme évidemment divisible ou non divisible par le diviseur considéré.

On peut aussi, dans chaque somme, supprimer les facteurs premiers avec le diviseur.

Soit proposé, par exemple, de reconnaître si le nombre 4069698461 est divisible par 89, 233, 857, 229, diviseurs respectivement de 89, 699, 5999, 29999.

On disposera les calculs comme il suit :

| 89 | 233 | 857 | 229 |
|---|---|---|---|
| 90 — 1 | 700 — 1 | 6000 — 1 | 30000 — 1 |
| 4069698461 | 4069698461 | 4069698461 | 4069698461 |
| 9 | 427 | 2766 | 25383 |
| 406969855 | 40697411 | 4072464 | 432352 |
| 45 | 77 | 2784 | 7056 |
| 40697030 | 407051 | 6856 = 857.8 | 7099 = 229.31 |
| 27 | 357 | | |
| 406997 | 4427 | | |
| 63 | 189 | | |
| 40762 | 233 | | |
| 18 | | | |
| 4094 | | | |
| 36 | | | |
| 445 | | | |
| 45 | | | |
| 89 | | | |

Ainsi le nombre 4069698461 est divisible par 89, 233, 857, 229.

On peut, en effet, vérifier qu'il est le produit de ces quatre nombres.

8. Un nombre est divisible par un diviseur D de $m.10^n + 1$, lorsque, ayant séparé $n$ chiffres sur la droite de ce nombre, la différence entre le nombre de gauche et $m$ fois le nombre de droite est divisible par D.

En d'autres termes, soit $m$ le nombre des *dizaines* ou des *centaines* ou des *mille*... d'un multiple de D, terminé par 1 ou 01 ou 001... : un nombre est divisible par D, lorsque le nombre de ses *dizaines* ou de ses *centaines* ou de ses *mille*..., diminué de $m$ fois le nombre formé par son *premier* ou ses *deux premiers* ou ses *trois premiers*... chiffres à droite, est divisible par D (*).

(*) Ce caractère de divisibilité a été donné par M. Loir. Voir les *Comptes rendus*

Par exemple, *un nombre est divisible par* 17 *ou par* 53, diviseurs de 901, *lorsque le nombre de ses centaines, diminué de* 9 *fois le nombre formé par ses deux premiers chiffres à droite, est divisible par* 17 *ou par* 53.

*Un nombre est divisible par* 23 *ou par* 29, diviseurs de 2001, *lorsque le nombre de ses mille, diminué de* 2 *fois le nombre formé par ses trois premiers chiffres à droite, est divisible par* 23 *ou par* 29.

*Un nombre est divisible par* 59 *ou par* 113, diviseurs de 20001, *lorsque le nombre de ses dizaines de mille, diminué de* 2 *fois le nombre formé par ses quatre premiers chiffres à droite, est divisible par* 59 *ou par* 113.

Soit proposé, par exemple, de reconnaître si le nombre 4147851311 est divisible par 71, 167, 353, 991, diviseurs respectivement de 71, 501, 6001, 110001.

On disposera les calculs comme il suit :

| **71** | **167** | **353** | **991** |
|---|---|---|---|
| **70 + 1** | **500 + 1** | **6000 + 1** | **110000 + 1** |
| 4147851311 | 4147851311 | 4147851311 | 4147851311 |
| 7 | 55 | 1866 | 14421 |
| 414785124 | 41478458 | 4145985 | 400364 |
| 28 | 290 | 5910 | 4004 |
| 41478484 | 414494 | 1765 = 353 5 | 3964 = 991.4 |
| 28 | 470 | | |
| 4147820 | 3674 | | |
| 14 | 370 | | |
| 41464 | 334 = 167.2 | | |
| 28 | | | |
| 4118 | | | |
| 56 | | | |
| 355 | | | |
| 35 | | | |
| 0 | | | |

Ainsi le nombre 4147851311 est divisible par 71, 167, 353, 991.

On peut, en effet, vérifier qu'il est le produit de ces quatre nombres.

Dans le cas où la division ne se fait pas exactement, les deux théorèmes qui précèdent ne sont pas applicables à la recherche du reste.

---

de l'Académie des Sciences de Paris, 9 avril 1888, ou le *Journal de Mathématiques élémentaires* de Bourget, tome XII, 1888, pages 121, 208, 241, 265 et tome XIII, 1889, page 121. M Van Dorsten a fait observer qu'il avait déjà été rencontré par le géomètre hollandais Jacob de Gelder (*Traité d'Arithmétique*, Rotterdam 1793). Le théorème qui précède et ceux qui suivent sont peut-être nouveaux.

**9.** Soit D un diviseur de $10^n - p$ : un nombre est divisible par D, lorsque, ayant séparé $n$ chiffres à la droite de ce nombre, la somme de $p$ fois le nombre de gauche et du nombre de droite est divisible par D.

Par exemple, *un nombre est divisible par* 47, diviseur de 94 ou 100 — 6, *lorsque le produit du nombre de ses centaines par* 6, *augmenté du nombre formé par ses deux premiers chiffres à droite, est divisible par* 47.

*Un nombre est divisible par* 83, diviseur de 996 ou 1000 — 4, *lorsque le produit du nombre de ses mille par* 4, *augmenté du nombre formé par ses trois premiers chiffres à droite, est divisible par* 83.

*Un nombre est divisible par* 19 *ou par* 263, diviseurs de 9994 ou 10000 — 6, *lorsque le produit du nombre de ses dizaines de mille par* 6, *augmenté du nombre formé par ses quatre premiers chiffres à droite, est divisible par* 19 *ou par* 263.

Soit proposé, par exemple, de reconnaître si le nombre 1560633977 est divisible par 49, 83, 499, 769, diviseurs respectivement de 98, 996, 998, 9997.

On disposera les calculs comme il suit :

| **49** | **83** | **499** | **769** |
|---|---|---|---|
| **100 — 2** | **1000 — 4** | **1000 — 2** | **10000 — 3** |
| 1560633977 | 1560633977 | 1560633977 | 1560633977 |
| 31212678 | 6242532 | 3121266 | 468189 |
| 77 | 977 | 977 | 3977 |
| 31212755 | 6243509 | 3122243 | 472166 |
| 624254 | 24972 | 6244 | 141 |
| 55 | 509 | 243 | 2166 |
| 624309 | 25481 | 6487 | 2307 = 769.3 |
| 12486 | 100 | 12 | |
| 9 | 481 | 487 | |
| 12495 | 581 = 83.7 | 499 | |
| 248 | | | |
| 95 | | | |
| 343 | | | |
| 49 | | | |

Ainsi le nombre 1560633977 est divisible par 49, 83, 499, 769.

On peut, en effet, vérifier qu'il est le produit de ces quatre nombres.

Soit encore proposé de trouver les restes de la division de 1000000000 par les mêmes nombres.

On disposera les calculs comme il suit :

| 49 | 83 | 499 | 769 |
|---|---|---|---|
| $100-2$ | $1000-4$ | $1000-2$ | $10000-3$ |
| 1000000000 | 1000000000 | 1000000000 | 1000000000 |
| 20000000 | 4000000 | 2000000 | 300000 |
| 400000 | 16000 | 4000 | 90 |
| 8000 | 64 | 8 | |
| 160 | | | |
| 13 | | | |

Ainsi les restes de la division de 1000000000 par 49, 83, 499, 769 sont respectivement 13, 64, 8, 90.

**10.** Soit D un diviseur de $10^n + p$ : un nombre est divisible par D, lorsque, ayant séparé $n$ chiffres à la droite de ce nombre, la différence entre $p$ fois le nombre de gauche et le nombre de droite est divisible par D.

Par exemple, *un nombre est divisible par* 53, diviseur de 106, *lorsque le produit du nombre de ses centaines par* 6, *diminué du nombre formé par ses deux premiers chiffres à droite, est divisible par* 53.

*Un nombre est divisible par* 19 *ou par* 53, diviseurs de 1007, *lorsque le produit du nombre de ses mille par* 7, *diminué du nombre formé par ses trois premiers chiffres à droite, est divisible par* 19 *ou par* 53.

*Un nombre est divisible par* 23 *ou par* 29, diviseurs de 10005, *lorsque le produit du nombre de ses dizaines de mille par* 5, *diminué du nombre formé par ses quatre premiers chiffres à droite, est divisible par* 23 *ou par* 29.

Soit proposé, par exemple, de reconnaître si le nombre 8290781 est divisible par 17, 67, 251, 29, diviseurs respectivement de 102, 1005, 1004, 10005.

On disposera les calculs comme il suit :

| 17 | 67 | 251 | 29 |
|---|---|---|---|
| $100+2$ | $1000+5$ | $1000+4$ | $10000+5$ |
| 8290781 | 8290781 | 8290781 | 8290781 |
| 165814 | 41450 | 33160 | 4145 |
| 81 | 781 | 781 | 781 |
| 165733 | 40669 | 32379 | 3364 \| 29 |
| 3314 | 200 | 128 | 46 \| 116 |
| 33 | 669 | 379 | 174 |
| 3281 | 469 = 67.7 | 251 | 0 |
| 64 | | | |
| 81 | | | |
| 17 | | | |

Ainsi le nombre 8290781 est divisible par 17, 67, 251, 29.

On peut, en effet, vérifier qu'il est le produit de ces quatre nombres.

Soit encore proposé de trouver les restes de la division de 1000000000 par les mêmes nombres.

On disposera les calculs comme il suit :

| 17 | 67 | 251 | 29 |
|---|---|---|---|
| $100+2$ | $1000+5$ | $1000+4$ | $10000+5$ |
| 1000000000 | 1000000000 | 1000000000 | 1000000000 |
| 20000000 | 5000000 | 4000000 | 500000 |
| 400000 | 25000 | 16000 | 250 \| 29 |
| 8000 | 125 | 64 | 232 \| 8 |
| 160 | 58 | | 18 |
| 7 | | | |

Ainsi les restes de la division de 1000000000 par 17, 67, 251, 20 sont respectivement 7, 58, 64, 18.

**11.** Soit D un diviseur de $m:10^n-p$, et D premier avec $m$: un nombre est divisible par D, lorsque, ayant séparé $n$ chiffres à la droite de ce nombre, la somme de $p$ fois le nombre de gauche et de $m$ fois le nombre de droite est divisible par D.

Soit, en effet,

$$m10^n - p = \text{[illegible]}.D,$$
$$N = A10^n + B = \text{[illegible]}.D.$$

Si l'on multiplie la première égalité par A et la seconde par $m$, puis que l'on soustraie la première de la seconde, on a

$$pA + mB = \text{[illegible]}.D.$$

Réciproquement, soit

$$m10^n - p = \text{[illegible]}.D,$$
$$pA + mB = \text{[illegible]}.D.$$

Si l'on multiplie la première égalité par A, puis qu'on la soustraie de la seconde, on a

$$m(A10^n + B) = \text{[illegible]}.D,$$

d'où, $m$ étant premier avec D,

$$N = A10^n + B = \text{[illegible]}.D.$$

Par exemple, *un nombre est divisible par* 53 *ou par* 283, diviseurs de 29998 ou 30000 — 2, *lorsque la somme de* 2 *fois le nombre de ses dizaines de mille et de* 3 *fois le nombre formé par ses quatre premiers chiffres à droite est divisible par* 53 *ou par* 283.

Ce théorème, probablement nouveau ainsi que le suivant, renferme, comme cas particuliers, les théorèmes 7 et 9.

Il n'est applicable, ainsi que le suivant, à la recherche du reste, que si $m = 1$.

12. Soit D un diviseur de $m.10^n + p$, et D premier avec $m$ : un nombre est divisible par D, lorsque, ayant séparé $n$ chiffres sur la droite de ce nombre, la différence entre $p$ fois le nombre de gauche et $m$ fois le nombre de droite est divisible par D.

Par exemple, *un nombre est divisible par* 53 *ou par* 151, diviseurs de 8003, *lorsque la différence entre* 3 *fois le nombre de ses mille et* 8 *fois le nombre formé par ses trois premiers chiffres à droite est divisible par* 53 *ou par* 151.

Ce théorème renferme, comme cas particuliers, les théorèmes 8 et 10.

(*A continuer.*)

---

## NOTRE SUPPLÉMENT.

Nous publions aujourd'hui, en supplément, un important Mémoire de notre zélé collaborateur M. Brocard : *Le trifolium*, dont il a bien voulu mettre des exemplaires à la disposition de nos abonnés(*) et qui est une étude complète sur la courbe de la question 346 (*Mathesis*, (1) t. V, p. 143).

Nous profitons de l'annonce du supplément pour signaler le mode suivant de description du trifolium droit (p. 27) qui vient de nous être indiqué par l'auteur du Mémoire :

Soit figurée la circonférence ayant pour centre C et pour rayon $CO = CO'$. On mène par le point O' une corde O'M, on projette M en D sur OO'. On trace ensuite DL parallèle à O'M et on projette C en L sur DL. Le lieu (L) est le trifolium droit.

La courbe (F,F') (p. 36) représentée par l'équation

$$\rho = 3a\cos\omega - 2a\cos^3\omega$$

ou, ce qui revient au même,

$$\rho = 3a\sin\omega - 2a\sin^3\omega$$

peut s'obtenir directement par une construction graphique.

Soient, en effet, I le centre du cercle de rayon $a$ ; OX une droite fixe, tangente au cercle en O ; OA une corde, B la projection du point A sur le diamètre B'IB parallèle à OX, F la projection de B sur OA. La courbe (F) rapportée à l'axe polaire OX a pour équation

$$\rho = 3a\sin\omega - 2a\sin^3\omega.$$

---

(*) Rectifications à introduire dans le texte : p. 36, l. 22, au lieu de *triangle équilatéral*, lire *triangle isoscèle* ; p. 22, l. 16, au lieu de *triangle*, lire *rectangle*.

## BIBLIOGRAPHIE.

*A Treatise on the Geometry of the circle and Some Extensions to Conic Sections by the Method of Reciprocation* with Numerous Examples, by W. J. M$^{c}$ CLELLAND, London, Macmillan and C$^{o}$, 1891. (In-16, de XVI-300 pages, avec de nombreuses figures dans le texte.)

« En publiant un traité sur la géométrie moderne, dit l'auteur dans la Préface, je me suis proposé de présenter aux meilleurs élèves de nos écoles publiques et aux aspirants aux grades mathématiques de nos Universités un exposé concis des propositions que je considère comme fondamentales, et d'en faciliter l'étude au moyen de nombreux exemples.

J'ai fait figurer comme corollaires de ces propositions les conséquences immédiates (cas particuliers ou généralisations).

Les exercices, imprimés en petits caractères, sont rangés à la suite des articles qui contiennent les éléments de la solution. Ceux qui présentent des difficultés ont été complètement développés; les autres sont souvent suivis d'une indication sommaire, mais suffisante pour suggérer la solution.

Pour comprendre ce traité, il suffit que le lecteur possède les six premiers livres d'Euclide avec leurs conséquences immédiates, et qu'il sache manier les formules élémentaires de la trigonométrie plane ».

L'ouvrage de M. M$^{c}$ Clelland réunit un grand nombre de théorèmes et de problèmes remarquables; les démonstrations ou solutions se distinguent souvent par une extrême élégance. Ne pouvant l'analyser ici en détail, nous nous contentons d'une traduction *libre* de la table des matières.

CHAPITRE PREMIER (pp. 1-14). Rapport anharmonique (définition). Théorème de Stewart (l'auteur l'attribue à Euler). Enveloppes. Théorème de Bobillier : Quand deux droites d'une figure plane de forme invariable roulent sur des cercles, toute autre droite de la figure roule aussi sur un cercle. Théorème de Mannheim : Étant donnés un cercle O et un angle circonscrit, le cercle circonscrit au triangle formé par cet angle avec une tangente variable a pour enveloppe un cercle. Théorème de Casey : Si quatre cercles, 1, 2, 3, 4, sont touchés par un même cinquième, et si l'on désigne par 12 la longueur de la tangente commune aux cercles 1, 2 dont le contact est analogue à celui de ces cercles avec le cinquième cercle, on a $23.14 + 31.24 + 12.34 = 0$. — Théorème de Feuerbach et sa généralisation par Hart, comme corollaires du théorème de Casey.

CHAPITRE II (pp. 15-60). Maximums et Minimums. — Bon choix d'exemples fort intéressants et traités très simplement. Une section de ce chapitre est consacrée au théorème sur le point O : Étant donné un triangle PQR inscrit au triangle ABC, les cercles AQR, BRP, CPQ se coupent en un même point O, qui est le centre de similitude des triangles semblables à PQR et inscrits à ABC; le triangle polaire de Q est le minimum de cette série de triangles.

CHAPITRE III (pp. 61-84). L'auteur rattache au théorème sur le point O les propo-

sitions sur les points et le cercle de Brocard, et sur les cercles de Tucker (cas particuliers, les cercles de Lemoine et de Taylor).

CHAPITRE IV (pp. 84-112). Théorie générale du centre des moyennes distances d'un système donné de points. — Coordonnées barycentriques. — Points isogonaux ou isotomiques. — Théorème de Laisant et de Brocard : Si sur les côtés d'un polygone on construit des triangles semblables, les nouveaux sommets de ces triangles ont même centre des moyennes distances que les sommets du polygone. — Théorème de Weill : Si un polygone variable est inscrit à un cercle fixe et circonscrit à un autre cercle fixe, le centre des moyennes distances des points de contact de ses côtés avec le second cercle est fixe. — Axe central d'un système donné de droites $a, b, c, \ldots l$, pour les coefficients donnés $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \lambda$, (lieu d'un point dont les distances à $a, b, \ldots l$, multipliées par $\alpha, \beta, \ldots \lambda$ donnent une somme nulle).

CHAPITRE V (pp. 112-139). Théorèmes de Ceva, Menelaüs, Desargues, Pascal et Brianchon. — Propriétés harmoniques du quadrilatère.

CHAPITRE VI (pp. 139-149). Points inverses par rapport à un cercle.

CHAPITRE VII (pp. 149-173). Pôle et polaire par rapport à un cercle. — Triangle autopolaire. — Théorème de Salmon sur la transformation des propriétés métriques dans la méthode des polaires réciproques.

CHAPITRE VIII (pp. 173-204). Faisceau de cercles. — Faisceaux orthogonaux réciproques. — Cercle de similitude de deux cercles donnés (cercle ayant pour diamètre la distance des centres de similitude). — Théorème de Poncelet : Si un polygone variable de $n$ côtés est inscrit à un cercle fixe d'un faisceau et si $(n-1)$ côtés roulent sur des cercles fixes du faisceau, le dernier côté enveloppe un cercle du même faisceau.

CHAPITRE IX (pp. 204-221). Propriétés d'un système de trois figures semblables (d'après *Mathesis*, t. II, p. 72). — Cercles de McCay.

CHAPITRE X (pp. 221-224). Points homologues et antihomologues de deux cercles. Cercle touchant trois cercles donnés (solution de Gergonne).

CHAPITRE XI (pp. 234-261). Théorie de l'inversion. — Centres isodynamiques d'un triangle. — Polygones harmoniques. Généralisation du théorème de Mannheim : Si un cercle variable $\omega$ touche extérieurement deux cercles donnés O, O′ et rencontre les tangentes communes intérieures aux points A et C, B et D, les droites AB, CD sont parallèles aux tangentes communes extérieures, et les droites BC, AD enveloppent des cercles ayant pour centres les points-limites des cercles O, O′.

CHAPITRES XII-XIII-XIV (pp. 260-300). Notions sommaires sur le rapport anharmonique, l'homographie et l'involution.

Le *Traité de la Géométrie du cercle* peut être étudié avec fruit par tous ceux qui veulent se mettre au courant des méthodes de la Géométrie moderne et en connaître les plus belles applications, surtout celles « qui sont plus souvent citées que démontrées ».

L'exécution typographique est extrêmement soignée. (J. N.)

## SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

### ×Question 728.

(Voir *Mathesis*, (2), I, p. 152.)

***Trouver dans le plan d'un triangle*** ABC ***un point*** P ***tel que les puissances des points*** A, B, C ***par rapport aux cercles*** BPC, CPA, APB ***soient proportionnelles aux quantités données*** $\alpha$, $\beta$, $\gamma$.

***Solution par*** M. Emmerich. Soit F le point de rencontre de CP avec AB, et soient V, W les points où les circonférences BCP, CAP coupent le côté AB. Puisque CP est l'axe radical des cercles BCP, CAP, on a

$$FV.FB = FW.FA,$$

$$\frac{FV}{FW} = \frac{FA}{FB} = \frac{FV + FA}{FW + FB} = \frac{AV}{BW}.$$

AV.AB et BW.BA étant les puissances des points A et B par rapport aux cercles BCP, CAP, on est conduit à ce résultat fort simple

$$FA : FB = \alpha : \beta.$$

Le point cherché se trouve à l'intersection des transversales angulaires AD, BE, CF qui divisent les côtés opposés respectivement dans les rapports

$$\beta : \gamma, \quad \gamma : \alpha, \quad \alpha : \beta.$$

Ainsi, le point P a pour coordonnées barycentriques $\alpha^{-1}$, $\beta^{-1}$, $\gamma^{-1}$.

Exemples : 1° P $\equiv$ G (*centre de gravité*). Soient Q le second point de rencontre de AP avec la circonférence BCP, et D le milieu de BC; posons

$$BC = a, \quad CA = b, \quad AB = c, \quad AD = g_a.$$

Comme $PD = \frac{1}{3} g_a$ et $PD.DQ = BD.DC$, on trouve $DQ = \frac{3a^2}{4g_a}$; donc

$$AP.AQ = \frac{2}{3} g_a \left( g_a + \frac{3a^2}{4g_a} \right) = \frac{1}{6}(4g_a^2 + 3a^2) = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2);$$

car $4g_a^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2$.

2° P $\equiv$ K (*point de Lemoine*). AK coupe BC en $K_a$ et la circonférence

BCK en K'. Des formules suivantes, où ω désigne l'angle de Brocard,

$$AK = g_a \frac{\operatorname{tg}\omega}{\sin A}, \quad AK_\alpha = 2g_a \frac{\sin\omega}{\sin(A+\omega)}, \quad KK_\alpha = g_a \frac{\operatorname{tg}\omega \sin(A-\omega)}{\sin A \sin(A+\omega)},$$

$$BK_\alpha = \frac{ac}{b} \cdot \frac{\sin\omega}{\sin(A+\omega)}, \quad CK_\alpha = \frac{ab}{c} \cdot \frac{\sin\omega}{\sin(A+\omega)},$$

$$K_\alpha K' = \frac{a^2}{g_a} \cdot \frac{\sin A \sin\omega \cos\omega}{\sin(A-\omega)\sin(A+\omega)},$$

on déduit

$$AK' = \frac{3bc}{2g_a}, \quad AK \cdot AK' = \frac{3}{2} bc \cdot \frac{\operatorname{tg}\omega}{\sin A} = \frac{1}{a^2} \cdot 12r^2\delta \operatorname{tg}\omega.$$

3° $P \equiv \Omega$ et $\Omega'$ (*points de Brocard*). Les puissances de A, B, C par rapport aux cercles adjoints qui se coupent en Ω, sont $b^2, c^2, a^2$; par rapport aux cercles adjoints qui se coupent en Ω', $c^2, a^2, b^2$. — En effet, on a

$$B\Omega_\alpha : C\Omega_\alpha = c^2 : a^2, \text{ etc.}$$

M. Déprez a résolu la même question et l'a étendue au tétraèdre.

---

## Question 746.

(Voir *Mathesis*, (2), I, p. 264.)

*Une conique est inscrite dans un parallélogramme* ABCD. *La tangente menée en un point* M *de la courbe rencontre les côtés* BC, CD *en* R *et* Q; *la parallèle à* BC *en* M *coupe* AB *en* L *et la parallèle à* CD *en* M *coupe* AD *en* N. *Démontrer que les triangles* LMQ, NMR *sont équivalents.* (Genese.)

*Solution par* M. Absolonne. Prenons pour axes les diagonales du parallélogramme qui sont deux diamètres conjugués de la conique, et soit

$$\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} = 1$$

l'équation de cette courbe.

La tangente en $M(x_1, y_1)$ sera représentée par

$$\frac{xx_1}{a'^2} + \frac{yy_1}{b'^2} = 1$$

et les côtés du parallèlogramme par

$$\pm\frac{xx_0}{a'^2} \pm \frac{yy_0}{b'^2} = 1,$$

$x_0, y_0$ étant les coordonnées d'un des points de contact.

Les ordonnées des points Q, R, E, F où la tangente en M rencontre DC, BC, AD, AB s'obtiendront en éliminant $x$ entre les équations précédentes. On trouve, par exemple,

$$y_Q = \frac{(x_0 - x_1)b'^2}{x_0 y_1 - x_1 y_0}.$$

Or

$$\frac{QM}{MR} = \frac{y_Q - y_1}{y_1 - y_R}, \quad \frac{ME}{MF} = \frac{y_E - y_1}{y_1 - y_F};$$

en remplaçant les ordonnées par leurs valeurs et $b'^2$ par sa valeur

$$\frac{x_0^2 y_1^2 - x_1^2 y_0^2}{x_0^2 - x_1^2}$$

tirée des équations

$$\frac{x_1^2}{a'^2} + \frac{y_1^2}{b'^2} = 1, \quad \frac{x_0^2}{a'^2} + \frac{y_0^2}{b'^2} = 1,$$

on obtient

$$\frac{QM}{MR} = \frac{ME}{MF} = \frac{h}{h'},$$

où $h$, $h'$ sont les hauteurs des triangles NMR, QML. Par conséquent

$$QM \cdot h' = MR \cdot h.$$

MM. Mandart, Listray et Déprez ont résolu la même question.

---

## QUESTIONS D'EXAMEN.

**518.** Trouver le maximum du produit $xyz$ sachant que

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{z}{c}\right)^{\frac{2}{3}} = 1.$$

On cherche le maximum de $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}}\left(\frac{z}{c}\right)^{\frac{2}{3}}$.

**519.** Résoudre le système d'équations

$$2\alpha_1 = -x_1 + x_2 + x_3 + x_4, \quad 2\alpha_2 = x_1 - x_2 + x_3 + x_4,$$
$$2\alpha_3 = x_1 + x_2 - x_3 + x_4, \quad 2\alpha_4 = x_1 + x_2 + x_3 - x_4,$$

et calculer les sommes

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2,$$
$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4.$$

**580.** Pour quelles valeurs de $n$ l'expression

$$(x+y)^n - x^n - y^n$$

est-elle divisible par

$$x^2 + xy + y^2 ? \qquad (n = 6p \pm 1).$$

---

## QUESTIONS PROPOSÉES.

***758.** Par un point fixe A d'une circonférence donnée, on mène deux cordes AB et AC dont le produit a une valeur constante $m^2$, puis on joint BC. Démontrer 1° que le lieu du pied D de la bissectrice de l'angle BAC du triangle ABC est une droite; 2° que le centre I du cercle inscrit et le centre I′ du cercle exinscrit dans l'angle BAC décrivent une même circonférence; 3° que les centres I″, I‴ des deux autres cercles exinscrits décrivent aussi une même circonférence. (P. AUBERT.)

**760.** I. La série $u_1 + u_2 + u_3 + \text{etc.}$, où

$$\lim_{n} u_n = 1 - k(\log n : n)$$

est convergente si $k$ est supérieur à 1, divergente si $k$ est inférieur ou égal à 1. Les logarithmes sont supposés népériens.

II. Si $x_n$ tend vers zéro avec $(1 : n)$, la série

$$\Sigma(1 - x_n)^n$$

sera convergente si le rapport $(nx_n : \log n)$ tend vers une limite supérieure à 1, quand $n$ est de plus en plus grand, divergente si ce rapport tend vers une limite inférieure à 1, ou s'il tend vers l'unité, en lui restant sans cesse inférieur. (V. JAMET.)

**761.** Soient un cercle O, un diamètre fixe AB et un point M variable sur le cercle. On mène un cercle C passant par le point O et tangent en M à la droite BM. Trouver les lieux géométriques décrits par les extrémités P et Q du diamètre du cercle C, qui est symétrique de AM par rapport à AB. (MANDART.)

**762.** Si les axes de deux paraboles circonscrites à un triangle sont parallèles aux axes de l'ellipse de Steiner, ils se coupent au milieu du segment de droite qui sert le point de Steiner au centre de l'hyperbole de Kiepert. (E. CESÀRO.)

# ÉTUDE SUR UNE NOUVELLE TRANSFORMATION,

## dite Transformation continue;

par M. E. LEMOINE, ingénieur à Paris.

(*Suite et fin*, voir pp. 58-64).

### FORMULES RELATIVES AU TRIANGLE.

1. $r_a r_b = p(p-c)$, $rr_c = (p-a)(p-b)$.

2. $ar_b - br_a = \dfrac{r_a r_b}{r_c}(b-a)$, $ar_c - br = \dfrac{rr_c}{r_b}(b+a)$.

3. $a(p-a) = r(\delta - r_a)$, $ap = r_a(\delta_a + r)$.

4. $S = pr_a\left(1 - \dfrac{2r}{h_a}\right)$, $S = (p-a)\,r\left(1 + \dfrac{2r_a}{h_a}\right)$.

5. $S = \dfrac{ar_b r_c}{\delta - r_a}$, $S = \dfrac{arr_a}{\delta_b - r_c}$, par transformation en B.

6. $S = \dfrac{r_b r_c (r_a - r)}{a}$, $S = \dfrac{rr_a(r_b + r_c)}{a}$, par transformation en B.

7. $a = \dfrac{r_a}{p}(\delta - r_a) = \dfrac{r}{p-a}(\delta_a - r)$.

8. $\begin{cases} a = \dfrac{p^2(r+r_c) + r_c^2(r_a - r_b)}{2pr_c}, \\ a = \dfrac{(p-a)^2(r_a - r_b) + r_b^2(r+r_c)}{2(p-a)r_b}. \end{cases}$

9. $\begin{cases} a, b, c \text{ sont proportionnels à : } 1 - \dfrac{r}{r_a},\ 1 - \dfrac{r}{r_b},\ 1 - \dfrac{r}{r_c}, \\ a, -b, -c \text{ sont proportionnels à : } \dfrac{r_a}{r} - 1,\ -1 - \dfrac{r_a}{r_c},\ -1 - \dfrac{r_a}{r_b}. \end{cases}$

10. $p = \dfrac{ar_a}{r_a - r}$ ; $p - a = \dfrac{ar}{r_a - r}$ ; $p - b = \dfrac{ar_c}{r_b + r_c}$ ; $p - c = \dfrac{ar_b}{r_b + r_c}$.

11. $\begin{cases} a(br_c - cr_b) = r(r_c^2 - r_b^2); \quad b(cr_a - ar_c) = r(r_a^2 - r_c^2); \\ \qquad c(ar_b - br_a) = r(r_b^2 - r_a^2). \\ a(br_b - cr_c) = r_a(r_b^2 - r_c^2); \quad b(ar_b - cr) = r_a(r_b^2 - r^2); \\ \qquad c(ar_c - br) = r_a(r_c^2 - r^2). \\ a(br_a - cr) = r_b(r_a^2 - r^2); \quad b(cr_c - ar_a) = r_b(r_c^2 - r_a^2); \\ \qquad c(br_a - ar) = r_b(r_c^2 - r^2). \\ a(cr_a - br) = r_c(r_a^2 - r^2); \quad b(cr_b - ar) = r_c(r_b^2 - r^2); \\ \qquad c(ar_a - br_b) = r_c(r_a^2 - r_b^2). \end{cases}$

**12.** $\begin{cases} (b-c)(c-a)(a-b) = \dfrac{r}{p}(r_b-r_c)(r_c-r_a)(r_a-r_b), \\ (b-c)(c+a)(a+b) = \dfrac{r_a}{p-a}(r_b-r_c)(r_b+r)(r_c+r). \end{cases}$

**13.** $\begin{cases} (b+c)(c+a)(a+b) = \dfrac{p}{r}(r_a+r)(r_b+r)(r_c+r) = 2p[p^2+r(2R+r)], \\ (b+c)(b-a)(c-a) = \dfrac{p-a}{r_a}(r_a+r)(r_b-r_a)(r_c-r_a) \\ \qquad = 2(p-a)[(p-a)^2 - r_a(2R-r_a)]. \end{cases}$

**14.** $\begin{cases} ar_a + br_b + cr_c = 2p(2R-r), \\ ar + br_c + cr_b = 2(p-a)(2R+r_a). \end{cases}$

**15.** $\begin{cases} br_b + cr_c - ar_a = 2p(2R-r_a), \\ br_c + cr_b - ar = 2(p-a)(2R+r). \end{cases}$

**16.** $\begin{cases} a(r_b+r_c) + b(r_c+r_a) + c(r_a+r_b) = 4p(R+r), \\ -a(r_b+r_c) + b(r_b-r) + c(r_c-r) = 4(p-a)(R-r_a). \end{cases}$

**17.** $\begin{cases} ar_br_c + (b+c)rr_a = 2S(2R+r), \\ ar_br_c - (b+c)rr_a = 2S(2R-r_a). \end{cases}$

**18.** $\begin{cases} \Sigma(b+c)r_a = \Sigma(r_b+r_c)a = 4p(R+r), \\ -(b+c)r + (c-a)r_c + (b-a)r_b \text{ ou } -a(r_b+r_c) + b(r_b-r) \\ \qquad + c(r_c-r) = 4(p-a)(R-r_a). \end{cases}$

**19.** $\begin{cases} \Sigma ar_br_c = 2S\delta, \\ ar_br_c + br r_b + crr_c = 2S\delta_a. \end{cases}$ **20.** $\begin{cases} \Sigma bcr_a = r(\delta^2+p^2), \\ bcr_a + acr_c + abr_b = r_a[\delta_a^2 + (p-a)^2]. \end{cases}$

**21.** $\begin{cases} \Sigma a^2r_a = 4p^2(R-r), \\ -a^2r + b^2r_c + c^2r_b = 4(p-a)^2(R+r_a). \end{cases}$

**22.** $\begin{cases} \Sigma ar_a^2 = 2p(4R\delta - p^2), \\ -ar^2 + br_c^2 + cr_b^2 = 2(p-a)[4R\delta_a - (p-a)^2]. \end{cases}$

**23.** $\begin{cases} \Sigma a^2r_a = 2p(r^2\delta + 2Rp^2 - 3rp^2), \\ a^2r + b^2r_c + c^2r_b = 2(p-a)[r_a^2\delta_a + 2R(p-a)^2 + 3r_a(p-a)^2]. \end{cases}$

**24.** $\begin{cases} \Sigma ar_a^2 = 2p[2R\delta^2 - 6Rp^2 + rp^2], \\ ar^2 + br_c^2 + cr_b^2 = 2(p-a)[2R\delta_a^2 - 6R(p-a)^2 - r_a(p-a)^2]. \end{cases}$

**25.** $\begin{cases} \Sigma a^4r_a = 2p^2[2p^2R - 4p^2r + 4r^2 + 10Rr^2], \\ -a^4r + b^4r_c + c^4r_b = 2(p-a)^2[2(p-a)^2R + 4(p-a)^2r_a \\ \qquad - 4r_a^2 + 10Rr_a^2]. \end{cases}$

**26.** $\begin{cases} \Sigma a r_a^4 = 2p\,[p^4 - 32p^3R^2 - 2p^3Rr + 2R\partial^3], \\ -ar^4 + br_c^4 + cr_b^4 = 2(p-a)\,[(p-a)^4 - 32(p-a)^2R^2 \\ \qquad + 2(p-a)^3Rr_a + 2R\partial_a^3]. \end{cases}$

**27.** $\begin{cases} \Sigma a^2 r_a^2 = 2p^3(8R^2 + r^2 - p^2), \\ a^2r^2 + b^2r_c^2 + c^2r_b^2 = 2(p-a)^3\,[8R^2 + r_a^2 - (p-a)^2]. \end{cases}$

**28.** $\begin{cases} \Sigma a^2 r_a^3 = 4p^2\,[4R^2\partial - 3Rp^2 + rp^2], \\ -a^2r^3 + b^2r_c^3 + c^2r_b^3 = 4(p-a)^2[4R^2\partial_a - 3R(p-a)^2 - r_a(p-a)^2]. \end{cases}$

**29.** $\begin{cases} \Sigma a^2 r_a^2 = 2p^2\,[8R^2 - 2Rr + 3r^2 - p^2], \\ -a^2r^2 + b^2r_c^2 + c^2r_b^2 = 2(p-a)^2\,[8R^2 + 2Rr_a + 3r_a^2 - (p-a)^2]. \end{cases}$

**30.** $\begin{cases} \Sigma a^2 r_b r_c = 4pS\,(R + r), \\ -a^2r_br_c + b^2rr_c + c^2rr_b = 4\,(p-a)\,S\,(R - r_a). \end{cases}$

**31.** $\begin{cases} \Sigma a^2 r_b^2 r_c^2 = 2S^2\,(\partial^2 - p^2), \\ a^2r_b^2r_c^2 + b^2r^2r_c^2 + c^2r^2r_b^2 = 2S^2\,[\partial_a^2 - (p-a)^2]. \end{cases}$

**32.** $\begin{cases} \Sigma r_a^2 = \partial^2 - 2p^2, \\ r^2 + r_b^2 + r_c^2 = \partial_a^2 - 2\,(p-a)^2. \end{cases}$

**33.** $\begin{cases} \Sigma r_a^3 = \partial^3 - 12Rp^2, \\ -r^3 + r_b^3 + r_c^3 = \partial_a^3 - 12R\,(p-a)^2. \end{cases}$

**34.** $\begin{cases} \Sigma r_a^4 = (\partial^2 - 2p^2)^2 - 2p^2\,(p^2 - 2r\partial), \\ r^4 + r_b^4 + r_c^4 = [\partial_a^2 - 2\,(p-a)^2]^2 - 2\,(p-a)^2\,[(p-a)^2 + 2r_a\partial_a]. \end{cases}$

**35.** $\begin{cases} \Sigma r_br_c = p^2, \\ r_br_c - rr_b - rr_c = (p-a)^2. \end{cases}$ **36.** $\begin{cases} r_ar_b + r_ar_c - r_br_c = p(2a-p), \\ rr_c + rr_b + r_br_c = p^2 - a^2. \end{cases}$

**37.** $\begin{cases} (r_b + r_c)\,(r_c + r_a)\,(r_a + r_b) = 4Rp^2, \\ (r_b + r_c)\,(r_b - r)\,(r_c - r) = 4R\,(p-a)^2. \end{cases}$

**38.** $\begin{cases} (r_a - r)\,(r_b - r)\,(r_c - r) = 4Rr^2, \\ (r_a - r)\,(r_c + r_a)\,(r_b + r_a) = 4Rr_a^2. \end{cases}$

**39.** $\begin{cases} \Sigma r_b^2 r_c^2 = p^2\,(p^2 - 2r\partial), \\ r_b^2r_c^2 + r^2r_b^2 + r^2r_c^2 = (p-a)^2\,[(p-a)^2 + 2r_a\partial_a]. \end{cases}$

**40.** $\begin{cases} \Sigma r_b^2 r_c^2 = p^4\,(p^2 - 12Rr), \\ r_b^2r_c^2 - r^2r_b^2 - r^2r_c^2 = (p-a)^4\,[(p-a)^2 + 12Rr_a]. \end{cases}$

**41.** $\begin{cases} \Sigma \dfrac{1}{r_b + r_c} = \dfrac{\partial^2 + p^2}{4Rp^2}, \\ \dfrac{1}{r_b + r_a} + \dfrac{1}{r_b - r} + \dfrac{1}{r_c - r} = \dfrac{\partial_a^2 + (p-a)^2}{4R\,(p-a)^2}. \end{cases}$

42. $$\begin{cases} \Sigma \dfrac{1}{r_a - r} = \dfrac{p^2 - 8Rr + r^2}{4Rr^2}, \\ \dfrac{1}{r_a - r} + \dfrac{1}{r_b + r_a} + \dfrac{1}{r_c + r_a} = \dfrac{(p-a)^2 + 8Rr_a + r_a^2}{4Rr_a^2}. \end{cases}$$

43. $$\begin{cases} \Sigma \dfrac{r_a^2}{r_a - r} = \dfrac{p^2 + \delta^2}{4R}, \\ \dfrac{r_a^2}{r_a - r} + \dfrac{r_b^2}{r_b + r_a} + \dfrac{r_c^2}{r_c + r_a} = \dfrac{(p-a)^2 + \delta_a^2}{4R}, \end{cases}$$

44. $$\begin{cases} \Sigma \dfrac{r_a - r}{r_a^2} = \dfrac{2\delta}{p^2}, \\ \dfrac{r_a - r}{r_a^2} + \dfrac{r_b + r_a}{r_b^2} + \dfrac{r_c + r_a}{r_c^2} = \dfrac{2\delta_a}{(p-a)^2}. \end{cases}$$

45. $$\begin{cases} \Sigma \dfrac{r_b r_c}{r_a} = \dfrac{p^2 - 2r\delta}{r}, \\ \dfrac{r_b r_c}{r} + \dfrac{r_c r}{r_b} + \dfrac{r_b r}{r_c} = \dfrac{(p-a)^2 + 2r_a\delta_a}{r_a}. \end{cases}$$

46. $$\begin{cases} \Sigma \dfrac{r_a}{r_b r_c} = \dfrac{1}{p^2 r}(\delta^2 - 2p^2), \\ \dfrac{r}{r_b r_c} + \dfrac{r_b}{r r_c} + \dfrac{r_c}{r r_b} = \dfrac{1}{(p-a)^2 r_a}[\delta_a^2 - 2(p-a)^2]. \end{cases}$$

47. $$\begin{cases} \Sigma \dfrac{1}{r_b^2 r_c^2} = \dfrac{\delta^2 - 2p^2}{p^2 S^2}, \\ \dfrac{1}{r_b^2 r_c^2} + \dfrac{1}{r^2 r_b^2} + \dfrac{1}{r^2 r_c^2} = \dfrac{\delta_a^2 - 2(p-a)^2}{(p-a)^2 S^2}. \end{cases}$$

48. $$\begin{cases} \Sigma \dfrac{r_b r_c}{r_a^2} = \dfrac{1}{r^2}(p^2 - 12Rr), \\ \dfrac{r_b r_c}{r^2} + \dfrac{r_c r}{r_a^2} + \dfrac{r r_b}{r_c^2} = \dfrac{1}{r_a^2}[(p-a)^2 + 12Rr_a]. \end{cases}$$

49. $$\begin{cases} \Sigma \dfrac{r_b r_c}{r_a^2} = p^2 \Sigma \dfrac{1}{r_a^2} = \dfrac{1}{S^2 r_a}[p^4 + 2r^2\delta^2 - 16p^2 Rr], \\ \dfrac{r_b r_c}{r^2} + \dfrac{r_c r}{r_a^2} + \dfrac{r r_b}{r_c^2} = (p-a)^2 r_a \left[\dfrac{1}{r^2} + \dfrac{1}{r_b^2} + \dfrac{1}{r_c^2}\right] \\ = \dfrac{1}{S^2 r_a}[(p-a)^4 + 2r_a^2\delta_a^2 + 16(p-a)^2 Rr_a]. \end{cases}$$

**50.** $\begin{cases} \left(\dfrac{r_a r_b}{r r_c}+1\right)(r_c-r)=4R, \\ \left(\dfrac{r r_c}{r_a r_b}+1\right)(r_b+r_a)=4R. \end{cases}$ **51.** $\begin{cases} S^2\left(\dfrac{1}{r^2}-\dfrac{1}{r_c^2}\right)=(r+r_c)(\delta-r_c), \\ S^2\left(\dfrac{1}{r_a^2}-\dfrac{1}{r_b^2}\right)=(r_b-r_a)(\delta-r_b). \end{cases}$

**52.** $\begin{cases} \Sigma\dfrac{a}{r_a}=\dfrac{2\delta}{p}, \\ \dfrac{a}{r}+\dfrac{b}{r_c}+\dfrac{c}{r_b}=\dfrac{2\delta_a}{p-a}. \end{cases}$ **53.** $\begin{cases} \Sigma\dfrac{r_a}{a}=\dfrac{p^2+\delta^2}{4pR}, \\ \dfrac{r}{a}+\dfrac{r_c}{b}+\dfrac{r_b}{c}=\dfrac{(p-a)^2+\delta_a^2}{4(p-a)R}. \end{cases}$

**54.** $\begin{cases} \Sigma\dfrac{r_b r_c}{a}=\dfrac{p}{4Rr}(p^2+r^2-8Rr), \\ \dfrac{r_b r_c}{a}+\dfrac{r r_b}{b}+\dfrac{r r_c}{c}=\dfrac{p-a}{4Rr_a}[(p-a)^2+r_a^2+8Rr_a], \end{cases}$

**55.** $\begin{cases} \Sigma\dfrac{a}{r_b r_c}=\dfrac{2}{S}(2R-r), \\ \dfrac{a}{r_b r_c}+\dfrac{b}{r r_b}+\dfrac{c}{r r_c}=\dfrac{2}{S}(2R+r_a). \end{cases}$

**56.** $\begin{cases} \Sigma\dfrac{a^2}{r_a^2}=\dfrac{2}{p^2}(\delta^2-p^2), \\ \dfrac{a^2}{r^2}+\dfrac{b^2}{r_c^2}+\dfrac{c^2}{r_b^2}=\dfrac{2}{(p-a)^2}[\delta_a^2-(p-a)^2]. \end{cases}$

**57.** $\begin{cases} \Sigma\dfrac{r_a^2}{a^2}=\left(\dfrac{p^2+\delta^2}{4pR}\right)^2-\dfrac{\delta}{R}, \\ \dfrac{r^2}{a^2}+\dfrac{r_c^2}{b^2}+\dfrac{r_b^2}{c^2}=\left[\dfrac{(p-a)^2+\delta_a^2}{4(p-a)R}\right]^2-\dfrac{\delta_a}{R}. \end{cases}$

**58.** $\begin{cases} \Sigma\dfrac{a r_b r_c}{r_a}=2p(2R-r), \\ \dfrac{a r_b r_c}{r}-\dfrac{b r r_b}{r_c}-\dfrac{c r r_c}{r_b}=2(p-a)(2R+r_a). \end{cases}$

**59.** $\begin{cases} \Sigma\dfrac{a r_b r_c}{r_a^2}=\dfrac{2}{S}[2p^2R-r\delta^2), \\ \dfrac{a r_b r_c}{r^2}+\dfrac{b r r_b}{r_c^2}+\dfrac{c r r_c}{r_b^2}=\dfrac{2}{S}[2(p-a)^2R+r_a\delta_a^2]. \end{cases}$

**60.** $\begin{cases} a^3+b^3+c^3=2p(p^2+6Rr-3r\delta), \\ -a^3+b^3+c^3=2(p-a)[(p-a)^2-6Rr_a+3r_a\delta_a]. \end{cases}$

61. $\begin{cases} \Sigma bc = p^2 + r\vartheta, \\ bc - ca - ab = (p-a)^2 - r_a\vartheta_a. \end{cases}$

62. $\begin{cases} a^5 + b^5 + c^5 = 2p\,[p^4 - 10p^2r\,(\mathrm{R}+r) + 5r^2\vartheta\,(2\mathrm{R}+r)], \\ -a^5 + b^5 + c^5 = 2\,(p-a)\,[(p-a)^4 + 10\,(p-a)^2\,r_a\,(\mathrm{R}-r_a) \\ \qquad + 5r_a^2\vartheta_a\,(2\mathrm{R}-r_a)], \end{cases}$

63. $\begin{cases} \Sigma b^5c^5 = (p^2 + r\vartheta)\,[(p^2 + r\vartheta)^2 - 24p^2\mathrm{R}r] + 48p^2\mathrm{R}^2r^2, \\ b^5c^5 - c^5a^5 - a^5b^5 = [(p-a)^2 - r_a\vartheta_a] \\ \quad [[(p-a)^2 - r_a\vartheta_a]^2 + 24\,(p-a)^2\,\mathrm{R}r_a] + 48\,(p-a)^2\,\mathrm{R}^2r_a^2. \end{cases}$

64. $\begin{cases} \Sigma a\,(p-a) = 2r\vartheta, \\ ap + b\,(p-c) + c\,(p-b) = 2r_a\vartheta_a, \end{cases}$

65. $\begin{cases} a\,(p-a) + b\,(p-b) - c\,(p-c) = 2rr_c, \\ ap + b\,(p-c) - c\,(p-b) = 2r_ar_b. \end{cases}$

66. $\begin{cases} \Sigma a\,(p-a)^2 = 2\mathrm{S}\,(2\mathrm{R}-r), \\ ap^2 - b\,(p-c)^2 - c\,(p-b)^2 = 2\mathrm{S}\,(2\mathrm{R}+r_a). \end{cases}$

67. $\begin{cases} \Sigma a^2\,(p-a) = 4\mathrm{S}\,(\mathrm{R}+r), \\ -a^2p + b^2\,(p-c) + c^2\,(b-p) = 4\mathrm{S}\,(\mathrm{R}-r_a). \end{cases}$

68. $\begin{cases} \Sigma a^2\,(p-a)^2 = 2r^2\,(\vartheta^2 - p^2), \\ a^2p^2 + b^2\,(p-c)^2 + c^2\,(p-b)^2 = 2r_a^2\,[\vartheta_{a'}^2 - (p-a)^2]. \end{cases}$

69. $\begin{cases} \Sigma a^2\,(p-a)^3 = 4pr^2\vartheta\,(\mathrm{R}-r), \\ a^2p^3 - b^2\,(p-c)^3 - c^2\,(p-b)^3 = 4\,(p-a)\,r_a^2\vartheta_a\,(\mathrm{R}+r_a). \end{cases}$

70. $\begin{cases} \Sigma a^2\,(p-a)^4 = 2r^2\,[p^2\,(8\mathrm{R}^2 + r^2) - r\vartheta^2], \\ a^2p^4 + b^2(p-c)^4 + c^2\,(p-b)^4 = 2r_a^2\,[(p-a)^2\,(8\mathrm{R}^2 + r_a^2) + r_a\vartheta_a^2]. \end{cases}$

71. $\begin{cases} \Sigma\,(p-b)\,(p-c) = \dfrac{1}{2}\,\Sigma bc - \dfrac{1}{4}\,\Sigma a^2 = bc - (p-a)^2 = \dfrac{abc + pr^2}{p} \\ \qquad = a\,(p-a) + (p-b)\,(p-c) = r\vartheta, \\ ap - (p-b)\,(p-c) = \frac{1}{2}\,(-bc + ca + ab) + \frac{1}{4}\,\Sigma a^2 = p^2 - bc \\ \qquad = \dfrac{abc - (p-a)\,r_a^2}{p-a} = r_a\vartheta_a. \end{cases}$

72. $\begin{cases} \frac{1}{2}\,\Sigma\,(b-c)^2 = p^2 - 3r\vartheta, \\ \frac{1}{2}\,[(b-c)^2 + (c+a)^2 + (a+b)^2] = (p-a)^2 + 3r_a\vartheta_a. \end{cases}$

73. $\begin{cases} \Sigma a\,(b-c)^2 = 2p\,[p^2 - 14\mathrm{R}r + r^2], \\ -a(b-c)^2 + b(c+a)^2 + c(b+a)^2 = 2(p-a)[(p-a)^2 + 14\mathrm{R}r_a + r_a^2] \end{cases}$

74. $$\begin{cases} \Sigma a\,(b^2+c^2) = 2p\,(p^2-2\mathrm{R}r+r^2), \\ -a\,(b^2+c^2)+b\,(c^2+a^2)+c\,(b^2+a^2) \\ \qquad = 2\,(p-a)\,[(p-a)^2+2\mathrm{R}r_a+r_a^2]. \end{cases}$$

75. $$\begin{cases} \Sigma a^2\,(b-c)^2 = 2\,[(p^2-r\delta)^2-4p^2r\,(2\mathrm{R}-r)], \\ a^2\,(b-c)^2+b^2\,(c+a)^2+c^2\,(b+a)^2 \\ \qquad = 2\,\big[[(p-a)^2+r_a\delta_a]^2+4\,(p-a)^2\,r_a\,(2\mathrm{R}+r_a)\big]. \end{cases}$$

76. $$\begin{cases} \Sigma a^3\,(b+c) = 2p^2\,(p^2-4\mathrm{R}r)-2r^2\delta^2, \\ a^3\,(b+c)+b^3\,(a-c)+c^3\,(a-b) \\ \qquad = 2r_a^2\delta_a^2-2\,(p-a)^2\,[(p-a)^2+4\mathrm{R}r_a]. \end{cases}$$

77. $$\begin{cases} \Sigma a^3\,(b-c)^2 = 2p\,[4\mathrm{S}^2+(p^2-r\delta)^2]-4\mathrm{RS}\,(5p^2-3r\delta), \\ -a^3\,(b-c)^2+b^3\,(c+a)^2+c^3\,(b+a)^2 \\ \quad = 2\,(p-a)\,[4\mathrm{S}^2+(p^2-r\delta)^2]+4\mathrm{RS}\,[5\,(p-a)^2+3r_a\delta_a]. \end{cases}$$

78. $$\begin{cases} \Sigma\dfrac{(b-c)^2}{a} = \dfrac{1}{p\mathrm{R}}[(2\mathrm{R}-r)\,p^2-r\delta^2], \\ -\dfrac{(b-c)^2}{a}+\dfrac{(a+c)^2}{b}+\dfrac{(a+b)^2}{c} \\ \qquad = \dfrac{1}{(p-a)\,\mathrm{R}}\,[(2\mathrm{R}+r_a)\,(p-a)^2+r_a\delta_a^2]. \end{cases}$$

79. $$\begin{cases} \Sigma\,(c-a)^2\,(b-a)^2 = (p^2-3r\delta)^2, \\ (a+c)^2\,(a+b)^2+(b+a)^2\,(b-c)^2+(c-a)\,(c-b)^2 \\ \qquad = [(p-a)^2+3r_a\delta_a]^2. \end{cases}$$

80. $$\begin{cases} \Sigma a(b-a)\,(a-c) = 4\mathrm{S}\,(2r-\mathrm{R}) = 8pr^2-abc = -\Sigma(p-a)\,(b-c)^2, \\ a(a+b)(a+c)-b(b-c)\,(b+a)+c(b-c)(c+a) = 4\mathrm{S}\,(2r_a+\mathrm{R}) \\ = 8(p-a)r_a^2+abc = -p(b-c)^2+(p-b)(a+b)^2+(p-c)(a+c)^2. \end{cases}$$

81. $$\begin{cases} \Sigma a^2\,(a-b)\,(a-c) = 4r^2\,(\delta^2-3p^2), \\ a^2\,(a+b)\,(a+c)+b^2\,(b+a)\,(b-c)+c^2\,(c+a)\,(c-b) \\ \qquad = 4r_a^2\,[\delta_a^2-3\,(p-a)^2]. \end{cases}$$

82. $$\begin{cases} \Sigma a^3\,(a-b)\,(a-c) = 16\mathrm{S}r\,[(\mathrm{R}+r)\,\delta-p^2], \\ a^3\,(a+b)\,(a+c)-b^3\,(b-c)\,(b+a)-c^3\,(c-b)\,(c+a) \\ \qquad = -16\mathrm{S}r_a\,[(\mathrm{R}-r_a)\,\delta_a-(p-a)^2]. \end{cases}$$

83. $$\begin{cases} \Sigma\,a^2\,(c-a)^2\,(a-b)^2 = 16\mathrm{S}^2\,(\mathrm{R}-2r)^2+2(b-c)^2\,(c-a)^2\,(c-b)^2, \\ a^2\,(c+a)^2\,(a+b)^2+b^2\,(a+b)^2\,(b-c)^2+c^2\,(a+c)^2\,(b-c)^2 = \\ \qquad 16\mathrm{S}^2\,(\mathrm{R}+2r_a)+2\,(b-c)^2\,(a+c)^2\,(a+b)^2. \end{cases}$$

84. $$\frac{\Sigma a^3 - \Sigma a^2(b+c) + 3abc}{4S} = \frac{\Sigma a^2 - 2\Sigma bc + 18Rr}{2r} = R - 2r,$$
$$\frac{a^3 - b^3 - c^3 + a^2(b+c) - b^2(a-c) - c^2(a-b) + 3abc}{4S} = \frac{-a^2 - b^2 - c^2 + 2bc - 2ca - 2ab + 18Rr_a}{2r_a} = R + 2r_a.$$

85. $$\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = 1 + \frac{R}{r},$$
$$\cos A - \cos B - \cos C = 1 - 4\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} = 1 - \frac{r_a}{R}.$$

86. $$\Sigma \cos B\cos C = \frac{p^2 + r^2}{4R^2} - 1,$$
$$\cos B\cos C - \cos C\cos A - \cos A\cos B = \frac{(p-a)^2 + r_a^2}{4R^2} - 1.$$

87. $$\Sigma \sin^2\frac{A}{2} = 1 - \frac{r}{2R}; \qquad \sin^2\frac{A}{2} + \sin^2\frac{B}{2} - \sin^2\frac{C}{2} = 1 - \frac{r_c}{2R}.$$
$$\sin^2\frac{A}{2} + \cos^2\frac{B}{2} + \cos^2\frac{C}{2} = 1 + \frac{r_a}{2R}; \quad \sin^2\frac{A}{2} + \cos^2\frac{B}{2} - \cos^2\frac{C}{2} = 1 - \frac{r_b}{2R}.$$

88. $$\Sigma \cos^2\frac{A}{2} = \frac{\delta}{2R}; \qquad \cos^2\frac{A}{2} + \cos^2\frac{B}{2} - \cos^2\frac{C}{2} = \frac{r_c}{2R},$$
$$\cos^2\frac{A}{2} + \sin^2\frac{B}{2} + \sin^2\frac{C}{2} = \frac{\delta_a}{2R}; \quad \cos^2\frac{A}{2} + \sin^2\frac{B}{2} - \sin^2\frac{C}{2} = \frac{r_b}{2R}.$$

89. $$\operatorname{cotg}\frac{A}{2}\operatorname{cotg}\frac{B}{2}\operatorname{cotg}\frac{C}{2} = \frac{p}{r},$$
$$\operatorname{cotg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2} = \frac{p-a}{r_a}.$$

90. $$\sin^2\frac{A}{2} = \frac{r_a - r}{4R}; \quad \sin^2\frac{B}{2} = \frac{r_b - r}{4R}; \quad \sin^2\frac{C}{2} = \frac{r_c - r}{4R},$$
$$\cos^2\frac{B}{2} = \frac{r_a + r_c}{4R}; \quad \cos^2\frac{C}{2} = \frac{r_a + r_b}{4R}.$$

91. $$\cos^2\frac{A}{2} = \frac{r_b + r_c}{4R}; \quad \cos^2\frac{B}{2} = \frac{r_a + r_c}{4R}; \quad \ldots,$$
$$\sin^2\frac{B}{2} = \frac{r_b - r}{4R}, \quad \ldots,$$

**92.** $$\begin{cases} \Sigma a^2 \cos A = \dfrac{r}{R}[3p^2 - \delta(2R + r)], \\ -a^2 \cos A + b^2 \cos B + c^2 \cos C = \dfrac{r_a}{R}[3(p-a)^2 - \delta_a(2R - r_a)]. \end{cases}$$

**93.** $$\begin{cases} \Sigma a \operatorname{cotg} A = 2(R + r), \\ -a \operatorname{cotg} A + b \operatorname{cotg} B + c \operatorname{cotg} C = 2(r_a - R). \end{cases}$$

**94.** $$\begin{cases} \dfrac{\Sigma \operatorname{tg} A}{a} = \dfrac{1}{2R} \cdot \dfrac{p^2 - 4R^2 + r^2}{p^2 - 4R^2 - r\delta}, \\ \dfrac{\operatorname{tg} A}{a} - \dfrac{\operatorname{tg} B}{b} - \dfrac{\operatorname{tg} C}{c} = \dfrac{1}{2R} \cdot \dfrac{(p-a)^2 - 4R^2 + r_a^2}{(p-a)^2 - 4R^2 + r_a\delta_a}. \end{cases}$$

**95.** $$\begin{cases} \Sigma \dfrac{2p + a}{3} \operatorname{tg} \dfrac{A}{2} = 4R \quad (\textit{Mathesis}, 1888, \text{p. } 134), \\ -\dfrac{2(p-a) - a}{3} \operatorname{tg} \dfrac{A}{2} + \dfrac{2(p-a) + b}{3} \operatorname{cotg} \dfrac{B}{2} + \dfrac{2(p-a) + c}{3} \operatorname{cotg} \dfrac{C}{2} \\ = 4R. \end{cases}$$

**96.** $$\begin{cases} \Sigma a(p-a) \cos A = \dfrac{r}{R}[\delta(2R + r) - p^2], \\ -ap \cos A + b(p-c) \cos B + c(p-b) \cos C \\ = \dfrac{r_a}{R}[-\delta_a(2R - r_a) + (p-a)^2]. \end{cases}$$

**97.** $$\begin{cases} \Sigma a(p-a)^2 \cos A = \dfrac{2S}{R}[2R(R + r) - r\delta], \\ ap^2 \cos A + b(p-c)^2 \cos B + c(p-b)^2 \cos C \\ = \dfrac{2S}{R}[2R(R - r_a) + r_a\delta_a]. \end{cases}$$

**98.** $$\begin{cases} \Sigma bc(p-b)(p-c) \cos A = r^2[5p^2 - \delta^2], \\ -bc(p-b)(p-c) \cos A + cap(p-b) \cos B + abp(p-c) \cos C \\ = r_a^2[\delta_a^2 - 5(p-a)^2]. \end{cases}$$

**99.** $$\begin{cases} \Sigma(p-b)(p-c) \cos A = \dfrac{R}{r}(p^2 - R\delta), \\ (p-b)(p-c) \cos A + p(p-b) \cos B + p(p-c) \cos C \\ = \dfrac{r_a}{R}[-(p-a)^2 + R\delta_a]. \end{cases}$$

**100.** $$\begin{cases} \Sigma bc(p-b)^2(p-c)^2\cos A = r^3\,[p^2(12R+\delta)-\delta^2], \\ bc(p-b)^2(p-c)^2\cos A + cap^2(p-b)^2\cos B + abp^2(p-c)^2\cos C \\ \qquad = r_a^3\,[-(p-a)^2(12R+\delta_a)+\delta_a^2]. \end{cases}$$

**101.** $$\begin{cases} \Sigma\dfrac{a\cos A}{r_a} = \dfrac{1}{pR}[\delta(2R+r)-p^2], \\ \dfrac{a\cos A}{r} - \dfrac{b\cos B}{r_c} - \dfrac{c\cos C}{r_b} = \dfrac{1}{(p-a)R}[\delta_a(2R-r_a)-(p-a)^2]. \end{cases}$$

**102.** $$\begin{cases} \Sigma r_a\cos A = \dfrac{p^2-R\delta}{R}, \\ r\cos A + r_b\cos C + r_c\cos B = \dfrac{(p-a)^2-R\delta_a}{R}. \end{cases}$$

**103.** $$\begin{cases} \Sigma(r_b-r_c)\cos A = 0, \\ (r_c-r_b)\cos A - (r_b+r)\cos B + (r_c+r)\cos C = 0. \end{cases}$$

**104.** $$\begin{cases} \Sigma r_a^2\cos A = \dfrac{p^2(4R-r)-R\delta^2}{R}, \\ r^2\cos A - r_b^2\cos C - r_c^2\cos B = \dfrac{(p-a)^2(4R+r_a)-R\delta_a^2}{R}. \end{cases}$$

Il peut arriver diverses particularités dans l'application de cette transformation, par exemple celle qui se présente aux formules 90 et 91, il n'y a pas lieu de s'y arrêter; notons cependant que quelquefois la formule se reproduit par transformation continue en A, mais en donne une nouvelle par transformation continue en B; par exemple :

**105.** $ar_br_c = S(\delta - r_a)$ se reproduit en A parce que $\delta_a - r = \delta - r_a$; et en B, elle donne la formule : $arr_a = S(r_a - r)$.

**106.** $(b-c)r_br_c = S(r_b - r_c)$ se reproduit en A; et en B donne : $(b+c)rr_a = S(r+r_a)$.

**107.** $S^2\left(\dfrac{1}{r^2}+\dfrac{1}{r_a^2}\right) = p^2+(p-a)^2 = \dfrac{1}{2}[(b+c)^2+a^2]$ donne en B :

$$S^2\left(\frac{1}{r_b^2}+\frac{1}{r_c^2}\right) = (p-b)^2+(p-c)^2 = \frac{1}{2}[(b-c)^2+a^2].$$

De même,

**108.** $R = \dfrac{(r_b+r_c)(r_br_c+rr_a)}{4r_br_c}$ donne en B : $R = \dfrac{(r_a-r)(r_br_c+rr_a)}{4rr_a}$.

**109.** $R = \dfrac{2R+r-r_a}{2R}$ donne en B : $R = \dfrac{r_b+r_c-2R}{2R}$.

**110.** $a^2 = (r_a - r)(\partial - r_a)$ ou $(r_a - r)(\partial_a + r)$ donne en B : $a^2 = (r_b + r_c)(4R - r_b - r_c)$.

**111.** $\dfrac{b+c}{a} = \dfrac{r_a + r}{r_a - r}$ donne en B : $\dfrac{b-c}{a} = \dfrac{r_b - r_c}{r_b + r_c}$.

**112.** $b + c = \dfrac{p}{r_a}(r + r_a) = \dfrac{p-a}{r}(r + r_a)$ donne en B : $b - c$

$= \dfrac{p-b}{r_c}(r_b - r_c) = \dfrac{p-c}{r_b}(r_b - r_c) = \dfrac{r_a}{p}(r_b - r_c) = \dfrac{r}{p-a}(r_b - r_c)$.

**112bis.** $a(b+c) = (r + r_a)(\partial - r_a) = S^2\left(\dfrac{1}{r^2} - \dfrac{1}{r_a^2}\right)$ donne en B :

$$a(b-c) = (r_a - r)(r_b - r_c) = S^2\left(\frac{1}{r_b^2} - \frac{1}{r_c^2}\right).$$

Voici un certain nombre de formules qui se reproduisent par transformation continue en A, en B et en C.

**113.** $bc \cos A = \frac{1}{2}(b^2 + c^2 - a^2) = r_b r_c - r r_a$.

**114.** $\operatorname{tg} A \,.\, \operatorname{tg} B \,.\, \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = \dfrac{2S}{p^2 - (2R + r)^2}$

$$= \frac{2S}{(p-a)^2 - (2R - r_a)^2}.$$

**115.** $a \sin B \cos C + b \sin C \cos A + c \sin A \cos B = a \sin C \cos B + \cdots$

$$= \frac{1}{2}\Sigma a \sin A = \frac{p^2 - r\partial}{2R}.$$

**116.** $\Sigma \dfrac{a^2}{\operatorname{tg} A} = 4S$. **117.** $\dfrac{a^2}{\operatorname{tg} B} + \dfrac{b^2}{\operatorname{tg} C} + \dfrac{c^2}{\operatorname{tg} A} = \dfrac{a^2}{\operatorname{tg} C} + \cdots = \dfrac{a^4 + b^4 + c^4}{4S}$.

**118.** $\Sigma a^2 \cos A = \dfrac{4S}{R}[p^2 - r\partial - 3R^2]$.

**119.** $4R^2 \cos A \cos B \cos C = p^2 - (2R + r)^2 = (p-a)^2 - (2R - r_a)^2$.

**120.** $bc \cos A + ac \cos B - ab \cos C - 2S[\operatorname{cotg} A + \operatorname{cotg} B - \operatorname{cotg} C]$

$$= \frac{3c^2 - a^2 - b^2}{2}.$$

**121.** $\Sigma a \cos A = \dfrac{2S}{R}$. **122.** $a \cos A + b \cos B - c \cos C = 2c \cos A \cos B$.

**123.** $\Sigma a \cos B \cos C = \dfrac{S}{R}$. **124.** $\Sigma a \cos (B - C) = \dfrac{4S}{R}$.

**125.** $bc(\cos^2 B + \cos^2 C) - a^2 \cos B \cos C = \dfrac{a^4 + (b^2 - c^2)^2}{2a^2} \cos A.$

**126.** $b^3 \cos C + c^3 \cos B = \dfrac{a^2(b^2 + c^2) + (b^2 - c^2)^2}{2a}.$

**127.** $b^3 \cos C - c^3 \cos B = \dfrac{(p^2 - r\partial)(b^2 - c^2)}{a}.$

**128.** $\Sigma bc \cos B \cos C = \dfrac{1}{4R^2}[(p^2 - r\partial)^2 + 4S^2] - (p^2 - r\partial)$

$$= \frac{1}{4R^2}(n^4 - 2m^2R^2).$$

**129.** $\Sigma \cos^2 B \cos^2 C = \left[\dfrac{p^2 + r^2}{4R^2} - 1\right]^2 - \dfrac{R + r}{2R^2}[p^2 - (2R + r)^2]$

$$= \left[\frac{(p-a)^2 + r_a^2}{4R^2} - 1\right]^2 - \frac{R - r_a}{4R^2}[(p-a)^2 - (2R - r_a)^2].$$

Cette valeur ne dépend que des rapports $\dfrac{p}{R}, \dfrac{r}{R}$ ou de $\dfrac{p-a}{R}, \dfrac{r_a}{R}$.

**130.** $a^2 + b^2 + c^2 = 2(p^2 - r\partial) = 2[(p-a)^2 + r_a\partial_a]$

$$= 8R^2(1 + \cos A \cos B \cos C) = 4S\Sigma \operatorname{cotg} A = 4R^2\Sigma \sin^2 A.$$

**131.** $a^4 + b^4 + c^4 = 2[(p^2 - r\partial)^2 - 4S^2]$. **132.** $\Sigma b^2c^2 = (p^2 - r\partial)^2 + 4S^2$.

**133.** $\Sigma b^4c^4 = [4S^2 + (p^2 - r\partial)^2]^2 - 64R^2S^2(p^2 - r\partial) = n^8 - 32R^2S^2m^2$.

**134.** $\Sigma a^2(b^2 - c^2)^2 = 2(p^2 - r\partial)[4S^2 + (p^2 - r\partial)^2] - 144R^2S^2$

$$= m^2n^4 - 9a^2b^2c^2.$$

**135.** $a^2(b^2 - c^2) = (r_b^2 - r_c^2)(r_a^2 - r^2)$.

**136.** $a^2 - b^2 = (r_a - r_b)(r + r_c)$. **137.** $bc = r_br_c + rr_a$.

**138.** $p^3 - (p-a)^3 - (p-b)^3 - (p-c)^3 = 3abc$.

**139.** $\dfrac{r_b^2 + r_c^2 - r_a^2 - r^2}{\cos A - \cos B \cos C} = 8R^2$.

**140.** $\dfrac{rr_a}{r_a - r} = \dfrac{r_br_c}{r_b + r_c}$.

**141.** $\Sigma\left(\dfrac{b^2 - c^2}{a}\right)^2 = 6(p^2 - r\partial) - \dfrac{1}{R^2}[(p^2 - r\partial)^2 + 4S^2] = 3m^2 - \dfrac{n^4}{R^2}$.

**142.** $\dfrac{1}{r^2} + \dfrac{1}{r_a^2} + \dfrac{1}{r_b^2} + \dfrac{1}{r_c^2} = \dfrac{m^2}{S^2} = \dfrac{4 \operatorname{cotg} \omega}{S}$.

Les quantités $m^2$ et $n^4$ représentent $a^2 + b^2 + c^2$ et $b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2$ ; $\omega$ est l'angle de Brocard.

## ×QUESTION D'EXAMEN.

**521.** A, B, C étant les angles d'un triangle, vérifier les identités

$$\Sigma(\sin A - \sin B)\operatorname{tg}\frac{A+B}{2} = 0, \quad \Sigma(\sin A + \sin B)\operatorname{tg}\frac{A-B}{2} = 0,$$

$$\Sigma \sin A(\sin B - \sin C)\operatorname{cotg}\frac{2A}{2} = 0.$$

On peut s'appuyer sur la formule

$$\sin(x+y)\sin(x-y) = \sin^2 x - \sin^2 y. \quad (\textit{Journal de Vuibert.})$$

---

## ×CARACTÈRES DE DIVISIBILITÉ;

par M. l'abbé E. Gelin, professeur au Collège Saint-Quirin, à Huy.

(*Suite et fin*; voir pp. 65-74).

**18.** Un nombre est divisible par un diviseur D de $m.10^n - 1$, lorsque, ayant séparé $n$ chiffres à la droite de ce nombre, le quotient du nombre de gauche par $m$, augmenté du nombre formé en écrivant le nombre de droite à la droite du reste, est divisible par D.

En d'autres termes, soit $m - 1$ le nombre des *dizaines* ou des *centaines* ou des *mille*... d'un multiple de D, terminé par 9 ou 99 ou 999... : un nombre est divisible par D, lorsque le quotient du nombre de ses *dizaines* ou de ses *centaines* ou de ses *mille*... par $m$, augmenté du nombre formé en écrivant à la droite du reste son *premier* ou ses *deux premiers* ou ses *trois premiers*... chiffres à droite, est divisible par D.

Par exemple, *un nombre est divisible par* 29 *ou par* 31, diviseurs de 899 ou 900 — 1, *lorsque le quotient du nombre de ses centaines par* 9, *augmenté du nombre formé en écrivant à la droite du reste ses deux premiers chiffres à droite, est divisible par* 29 *ou par* 31.

*Un nombre est divisible par* 31 *ou par* 43, diviseurs de 3999 ou 4000 — 1, *lorsque le quotient du nombre de ses mille par* 4, *augmenté du nombre formé en écrivant à la droite du reste ses trois premiers chiffres à droite, est divisible par* 31 *ou par* 43.

*Un nombre est divisible par* 131 *ou par* 229, diviseurs de 29999 ou 30000 — 1, *lorsque le quotient du nombre de ses dizaines de mille par* 3, *augmenté du nombre formé en écrivant à la droite du reste ses quatre premiers chiffres à droite, est divisible par* 131 *ou par* 229.

Soit proposé, par exemple, de reconnaître si le nombre 4069698461

est divisible par 89, 233, 857, 229, diviseurs respectivement de 89, 699, 5999, 29999.

On disposera les calculs comme il suit :

| 89 | 233 | 857 | 229 |
|---|---|---|---|
| 90 — 1 | 700 — 1 | 6000 — 1 | 30000 — 1 |
| 4069698461 | 4069698461 | 4069698461 | 4069698461 |
| 45218871 | 5813854 | 678283 | 135656 |
| 71 | 661 | 461 | 18461 |
| 45218942 | 5814515 | 678744 | 154117 |
| 502432 | 8306 | 113 | 5 |
| 62 | 315 | 744 | 4117 |
| 502494 | 8621 | 857 | 4122 = 229.18 |
| 5583 | 12 | | |
| 24 | 221 | | |
| 5607 | 233 | | |
| 62 | | | |
| 27 | | | |
| 89 | | | |

Ainsi le nombre 4069698461 est divisible par 89, 233, 857, 229.

Soit encore proposé de trouver les restes de la division de 1000000000 par les mêmes nombres.

On disposera les calculs comme il suit :

| 89 | 233 | 857 | 229 |
|---|---|---|---|
| 90 — 1 | 700 — 1 | 6000 — 1 | 30000 — 1 |
| 1000000000 | 1000000000 | 1000000000 | 1000000000 |
| 11111111 | 1428571 | 166666 | 33333 |
| 10 | 300 | 4000 | 10000 |
| 11111121 | 1428871 | 170666 | 43333 |
| 123456 | 2041 | 28 | 1 |
| 81 | 171 | 2666 | 13333 |
| 123537 | 2212 | 2694 \| 857 | 13334 \| 229 |
| 1372 | 3 | 2571 \| 3 | 1145 \| 58 |
| 57 | 112 | 123 | 1884 |
| 1429 | 115 | | 1832 |
| 15 | | | 52 |
| 79 | | | |
| 94 | | | |
| 5 | | | |

Ainsi les restes de la division de 1000000000 par 89, 233, 857, 229 sont respectivement 5, 115, 123, 52.

**14.** Un nombre est divisible par un diviseur D de $m10^n + 1$, lorsque,

ayant séparé $n$ chiffres à la droite de ce nombre, le quotient du nombre de gauche par $m$, diminué du nombre formé en écrivant le nombre de droite à la droite du reste, est divisible par D.

En d'autres termes, soit $m$ le nombre des *dizaines* ou des *centaines* ou des *mille*... d'un multiple de D, terminé par 1 ou 01 ou 001... : un nombre est divisible par D, lorsque le quotient du nombre de ses *dizaines* ou de ses *centaines* ou de ses *mille*... par $m$, diminué du nombre formé en écrivant à la droite du reste son *premier* ou ses *deux premiers* ou ses *trois premiers*... chiffres à droite, est divisible par D.

Par exemple, *un nombre est divisible par* 17 *ou par* 53, diviseurs de 901, *lorsque le quotient du nombre de ses centaines par* 9, *diminué du nombre formé en écrivant à la droite du reste ses deux premiers chiffres à droite, est divisible par* 17 *ou par* 53.

*Un nombre est divisible par* 23 *ou par* 29, diviseurs de 2001, *lorsque le quotient du nombre de ses mille par* 2, *diminué du nombre formé en écrivant à la droite du reste ses trois premiers chiffres à droite, est divisible par* 23 *ou par* 29.

*Un nombre est divisible par* 59 *ou par* 113, diviseurs de 20001, *lorsque le quotient du nombre de ses dizaines de mille par* 2, *diminué du nombre formé en écrivant à la droite du reste ses quatre premiers chiffres à droite, est divisible par* 59 *ou par* 113.

Soit proposé, par exemple, de reconnaître si le nombre 4147851311 est divisible par 71, 167, 353, 991, diviseurs respectivement de 71,501,6001,110001.

On disposera les calculs comme il suit :

| **71** | **167** | **353** | **991** |
|---|---|---|---|
| **70 + 1** | **500 + 1** | **6000 + 1** | **110000 + 1** |
| 4147851311 | 4147851311 | 4147851311 | 4147851311 |
| 59255018 | 8295702 | 691308 | 37707 |
| 51 | 311 | 3311 | 81311 |
| 59254967 | 8295391 | 687997 | 43604 = 991.44 |
| 846499 | 16590 | 114 | |
| 37 | 391 | 3997 | |
| 846462 | 16199 | 3883 = 353.11 | |
| 12092 | 32 | | |
| 22 | 199 | | |
| 12070 | 167 | | |
| 17 | | | |
| 17 | | | |
| 0 | | | |

Ainsi le nombre 4147851311 est divisible par 71, 167, 353, 991.

Soit encore proposé de trouver les restes de la division de 1000000000 par les mêmes nombres.

On disposera les calculs comme il suit :

| 71 | 167 | 353 | 991 |
|---|---|---|---|
| $70+1$ | $500+1$ | $6000+1$ | $110000+1$ |
| 1000000000 | 1000000000 | 1000000000 | 1000000000 |
| 14285714 | 2000000 | 166666 | 9090 |
| 20 | 4000 | 4000 | 100000 |
| 14285694 | −8 | 162666 | −90910 \| 991 |
| 204081 | 159 | 27 | 8919 \| 92 |
| 24 | | 666 | 1720 |
| 204057 | | −639 \| 353 | 1982 |
| 2915 | | 706 \| 2 | 262 |
| 7 | | 67 | |
| 2908 | | | |
| 41 | | | |
| 38 | | | |
| 3 | | | |

Ainsi les restes de la division de 1000000000 par 71, 167, 353, 991 sont respectivement 3, 159, 67, 262.

**15.** Soit D un diviseur de $m.10^n - p$ : un nombre est divisible par D, lorsque, ayant séparé $n$ chiffres à la droite de ce nombre et divisé le nombre de gauche par $m$, la somme de $p$ fois le quotient et du nombre formé en écrivant le nombre de droite à la droite du reste est divisible par D(*).

En effet, soit

$$m10^n - p = \text{M}.D,$$
$$N = A10^n + B = \text{M}.D,$$
$$A = mQ + R.$$

Si l'on soustrait les deux premières égalités, après avoir multiplié la première par Q et remplacé, dans la seconde, A par $mQ + R$, on trouve

$$pQ + R10^n + B = \text{M}.D.$$

(*) Ce théorème et le suivant ont été donnés, pour le cas où $n = 1$, par M. Morel, dans le *Journal de Mathématiques élémentaires* de Bourget, tome III, 1879, page 137. Voir aussi mon *Traité d'Arithmétique élémentaire*, cinquième édition, page 100.

Réciproquement, soit

$$m.10^n - p = \mathfrak{M}.D,$$
$$A = mQ + R,$$
$$pQ + R.10^n + B = \mathfrak{M}.D.$$

Si l'on ajoute ces trois égalités, après avoir multiplié la première par Q, et la seconde par $10^n$, on a

$$N = A.10^n + B = \mathfrak{M}.D.$$

Par exemple, *un nombre est divisible par* 571, diviseur de 3997 ou 4000 — 3, *lorsque, ayant divisé par* 4 *le nombre de ses mille, la somme de* 3 *fois le quotient et du nombre formé en écrivant à la droite du reste ses trois premiers chiffres à droite est divisible par* 571.

*Un nombre est divisible par* 673, *diviseur de* 69992 *ou* 70000 — 8, *lorsque, ayant divisé par* 7 *le nombre de ses dizaines de mille, la somme de* 8 *fois le quotient et du nombre formé en écrivant à la droite du reste ses quatre premiers chiffres à droite est divisible par* 673.

Ce théorème renferme, comme cas particuliers, les théorèmes **9** et **13**.

Il est applicable, ainsi que le suivant, à la recherche du reste de la division.

**16.** Soit D un diviseur de $m.10^n + p$ : un nombre est divisible par D, lorsque, ayant séparé $n$ chiffres à la droite de ce nombre et divisé le nombre de gauche par $m$, la différence entre $p$ fois le quotient et le nombre formé en écrivant le nombre de droite à la droite du reste est divisible par D.

Par exemple, *un nombre est divisible par* 53 *ou par* 151, diviseurs de 8003, *lorsque, ayant divisé le nombre de ses mille par* 8, *la différence entre* 3 *fois le quotient et le nombre formé en écrivant à la droite du reste ses trois premiers chiffres à droite est divisible par* 53 *ou par* 151.

*Un nombre est divisible par* 37 *ou par* 811, *diviseurs de* 30007, *lorsque, ayant divisé le nombre de ses dizaines de mille par* 3, *la différence entre* 7 *fois le quotient et le nombre formé en écrivant à la droite du reste ses quatre premiers chiffres à droite est divisible, par* 37 *ou par* 811.

Ce théorème renferme, comme cas particuliers, les théorèmes 10 et 14.

17. Si $mn$ est un multiple de D, plus 1, un nombre quelconque, écrit dans la base $m$, et le même nombre renversé et supposé écrit dans la base $n$, sont simultanément divisibles ou non divisibles par D.

Soient les deux nombres

$$N = a + bm + cm^2 + dm^3,$$
$$N' = d + cn + bn^2 + an^3.$$

On a

$$\begin{aligned} Nn^3 &= an^3 + bn^2.mn + cn.m^2n^2 + d.m^3n^3 \\ &= an^3 + bn^2(\mathfrak{M}.D + 1) + cn(\mathfrak{M}.D + 1)^2 + d(\mathfrak{M}.D + 1)^3 \\ &= \mathfrak{M}.D + an^3 + bn^2 + cn + d \\ &= \mathfrak{M}.D + N', \end{aligned}$$

d'où

$$Nn^3 - N' = \mathfrak{M}.D.$$

Puisque D est premier avec $n$, N et N′ sont donc simultanément divisibles ou non divisibles par D.

Par exemple, 3.10 étant un multiple de 29, plus 1, le nombre 270541, écrit dans la base 10, est divisible par 29, si le même nombre renversé 145072, supposé écrit dans la base 3, est divisible par 29. Or, le nombre 145072, base 3, vaut, dans la base 10, $2 + 7.3 + 0.9 + 5.27 + 4.81 + 1.243 = 2 + 21 + 135 + 324 + 243 = 725$. Le nombre 527, base 3, vaut, dans la base 10, $7 + 2.3 + 5.9 = 7 + 6 + 45 = 58 = 29.2$. Donc le nombre 270541, base 10, est divisible par 29.

Il est indifférent, comme on le voit, que certains chiffres soient égaux ou supérieurs à la base $m$ ou $n$.

D'ailleurs ce caractère de divisibilité est plutôt curieux qu'utile.

Si l'on fait $m = 10$, $n = 1$, $D = 3$ ou 9, on retrouve le caractère ordinaire de divisibilité par 3 ou par 9.

18. Dans la table suivante, nous donnons les multiples des nombres premiers de 13 à 997, de la forme $m.10^n + p$ ou $m.10^n - p$, qui permettent d'appliquer à ces nombres les caractères de divisibilité exposés dans ce travail.

Cette table renferme 246 décompositions relatives à 86 nombres premiers.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 13 | 90 + 1 | 107 | 3 000 − 4 | 293 | 80 000 − 11 | 599 | 600 − 1 |
| „ | 100 − 9 | „ | 20 000 + 9 | 307 | 4 000 − 9 | 607 | 20 000 + 31 |
| „ | 100 + 4 | 109 | 100 + 9 | „ | 70 000 − 4 | „ | 400 000 + 13 |
| „ | 300 − 1 | „ | 6 000 − 5 | 311 | 70 000 − 25 | 613 | 8 000 − 31 |
| „ | 1 000 + 1 | „ | 40 000 + 3 | 313 | 5 000 + 8 | „ | 100 000 − 81 |
| 17 | 50 + 1 | 113 | 7 000 + 6 | „ | 200 000 + 7 | 617 | 8 000 + 21 |
| „ | 100 + 2 | „ | 20 000 + 1 | 317 | 110 000 − 1 | 619 | 13 000 − 1 |
| „ | 800 − 1 | „ | 100 000 + 5 | 331 | 1 000 − 7 | 631 | 70 000 + 41 |
| „ | 900 + 1 | 127 | 8 000 + 1 | 337 | 1 000 + 11 | 641 | 100 000 − 4 |
| „ | 1 000 + 3 | 131 | 8 000 − 9 | „ | 30 000 − 7 | 643 | 9 000 + 2 |
| 19 | 20 − 1 | „ | 90 000 − 1 | 347 | 700 − 6 | 673 | 70 000 − 8 |
| „ | 100 − 5 | 137 | 10 000 + 1 | „ | 110 000 − 1 | 677 | 2 000 + 31 |
| „ | 400 − 1 | 139 | 10 000 + 8 | 349 | 700 − 2 | „ | 700 000 + 18 |
| „ | 1 000 + 7 | 149 | 7 000 + 3 | „ | 30 000 + 14 | 683 | 30 000 + 52 |
| 23 | 100 − 8 | „ | 90 000 − 4 | 353 | 6 000 + 1 | 691 | 9 000 − 17 |
| „ | 300 − 1 | „ | 700 000 + 2 | „ | 700 000 − 1 | „ | 700 000 − 17 |
| „ | 2 000 + 1 | 151 | 8 000 + 3 | 359 | 70 000 + 5 | 701 | 700 + 1 |
| „ | 10 000 + 5 | „ | 90 000 − 4 | 367 | 40 000 + 3 | 709 | 100 000 − 31 |
| 29 | 30 − 1 | „ | 400 000 − 1 | 373 | 10 000 + 71 | 719 | 10 000 + 66 |
| „ | 900 − 1 | 157 | 8 000 + 7 | 379 | 11 000 − 9 | 727 | 8 000 − 3 |
| „ | 2 000 + 1 | „ | 100 000 + 9 | 383 | 90 000 + 5 | 733 | 11 000 − 5 |
| „ | 10 000 + 5 | 163 | 7 000 + 9 | 389 | 7 000 + 2 | „ | 700 000 + 15 |
| 31 | 30 + 1 | „ | 30 000 − 8 | 397 | 400 − 3 | 739 | 20 000 − 47 |
| „ | 100 − 7 | „ | 200 000 + 1 | „ | 900 000 − 1 | 743 | 20 000 + 61 |
| „ | 900 − 1 | 167 | 500 + 1 | 401 | 400 + 1 | 751 | 3 000 + 4 |
| „ | 1 000 − 8 | „ | 1 000 + 2 | „ | 10 000 + 25 | 757 | 50 000 − 38 |
| 37 | 1 000 − 1 | 173 | 9 000 − 4 | 409 | 9 000 − 2 | 761 | 70 000 + 12 |
| 41 | 40 + 1 | „ | 100 000 − 6 | „ | 200 000 + 1 | 769 | 10 000 − 3 |
| „ | 10 000 + 4 | 179 | 900 − 5 | 419 | 300 000 + 4 | 773 | 10 000 + 49 |
| „ | 100 000 − 1 | „ | 70 000 − 11 | 421 | 8 000 − 1 | 787 | 100 000 − 51 |
| 43 | 300 + 1 | „ | 300 000 + 4 | 431 | 100 000 − 8 | 797 | 4 000 − 15 |
| „ | 4 000 − 1 | 181 | 2 000 − 9 | 433 | 10 000 − 41 | 809 | 9 000 − 101 |
| „ | 90 000 − 1 | „ | 40 000 + 1 | 439 | 90 000 − 5 | 811 | 30 000 + 7 |
| 47 | 100 − 6 | 191 | 4 000 + 11 | 443 | 70 000 − 6 | 821 | 500 000 − 11 |
| „ | 800 − 1 | „ | 900 000 − 8 | 449 | 900 − 2 | 823 | 200 000 − 11 |
| „ | 300 000 + 1 | 193 | 11 000 + 1 | „ | 700 000 − 9 | 827 | 110 000 − 9 |
| 53 | 100 + 6 | „ | 700 000 + 11 | 457 | 80 000 − 25 | 829 | 800 000 − 15 |
| „ | 900 + 1 | 197 | 200 − 3 | 461 | 6 000 − 7 | 839 | 500 000 + 44 |
| „ | 1 000 + 7 | „ | 40 000 − 9 | 463 | 100 000 + 8 | 853 | 40 000 + 91 |
| 59 | 60 − 1 | 199 | 200 − 1 | 467 | 7 000 + 5 | 857 | 6 000 − 1 |
| „ | 1 000 + 3 | „ | 1 000 − 5 | 479 | 80 000 − 7 | 859 | 6 000 + 13 |
| 61 | 60 + 1 | „ | 40 000 − 1 | 487 | 300 000 − 8 | 861 | 800 000 + 1 |
| „ | 10 000 + 4 | 211 | 4 000 + 9 | 491 | 1 000 − 18 | 877 | 50 000 − 11 |
| 67 | 200 + 1 | „ | 50 000 + 7 | „ | 300 000 + 1 | 881 | 200 000 − 13 |
| „ | 1 000 + 5 | 223 | 2 000 + 7 | 499 | 500 − 1 | 883 | 400 000 − 1 |
| „ | 40 000 − 1 | „ | 700 000 − 3 | „ | 1 000 − 2 | 887 | 8 000 − 17 |
| 71 | 70 + 1 | 227 | 5 000 − 6 | 503 | 1 000 + 6 | 907 | 400 000 − 13 |
| „ | 1 000 − 6 | 229 | 30 000 − 1 | 509 | 1 000 + 18 | 911 | 10 000 + 21 |
| 73 | 1 000 + 22 | 233 | 700 − 1 | 521 | 10 000 − 101 | 919 | 10 000 + 109 |
| „ | 10 000 + 1 | 239 | 60 000 − 11 | 523 | 100 000 − 107 | 929 | 1 000 − 71 |
| 79 | 80 − 1 | 241 | 20 000 + 3 | 541 | 20 000 + 17 | 937 | 30 000 − 16 |
| „ | 3 000 + 2 | 251 | 1 000 + 4 | 547 | 6 000 + 17 | „ | 700 000 − 61 |
| 83 | 1 000 − 4 | 257 | 9 000 − 5 | „ | 70 000 + 16 | 941 | 80 000 − 15 |
| 89 | 90 − 1 | 263 | 10 000 − 6 | 557 | 10 000 + 26 | 947 | 500 000 + 16 |
| „ | 800 + 1 | 269 | 7 000 − 6 | 563 | 9 000 + 8 | 953 | 20 000 + 13 |
| 97 | 100 − 3 | „ | 400 000 + 3 | 569 | 4 000 − 17 | 967 | 500 000 − 61 |
| „ | 10 000 − 9 | 271 | 100 000 − 1 | „ | 400 000 + 7 | 971 | 100 000 + 13 |
| „ | 100 000 + 7 | 277 | 1 100 + 8 | 571 | 4 000 − 3 | 977 | 300 000 − 61 |
| 101 | 100 + 1 | „ | 100 000 − 3 | 577 | 30 000 + 4 | 983 | 400 000 + 81 |
| 103 | 100 + 3 | 281 | 9 000 − 8 | 587 | 10 000 − 21 | 991 | 1 000 − 9 |
| „ | 10 000 − 9 | 283 | 30 000 − 2 | 593 | 10 000 + 81 | 997 | 1 000 − 3 |
| 107 | 100 + 7 | 293 | 300 − 7 | | | | |

## SUR LES COURBES ALGÉBRIQUES;

par M. M. D'OCAGNE, ingénieur des ponts et chaussées.

Nous avons fait voir (J. M. S., 1886, p. 193) que si l'équation d'une courbe algébrique est

$$(1) \qquad 0 = y^m + y^{m-1}(a_1x + b_1) + y^{m-2}(a_2x^2 + b_2x + c_2) + \cdots$$

et si $y_1, y_2, \ldots, y_m$ sont les $m$ valeurs de $y$ correspondant à une certaine valeur de $x$, on a

$$(2) \qquad \Sigma y_i \frac{dy_i}{dx} = (a_1^2 - 2a_2)x + a_1b_1 - b_2,$$

formule (*) qui se traduit par le théorème suivant :

*Étant données une courbe algébrique* C *et une droite* Δ *quelconques, si une droite* D *se déplace en restant perpendiculaire à* Δ *et que les normales à la courbe* C *aux points où elle est rencontrée par* D *coupent* Δ *en* $N_1, N_2, \ldots N_m$, *le point d'intersection de la droite* D *et de la parallèle à une direction fixe menée par le centre des moyennes distances des points* $N_1, N_2, \ldots$, *décrit une droite.*

Prenons maintenant les dérivées des deux membres de la relation (2) par rapport à $x$; il vient

$$(3) \qquad \Sigma\left[y_i \frac{d^2y_i}{dx^2} + \left(\frac{dy_i}{dx}\right)^2\right] = a_1^2 - 2a_2.$$

Mais si $\eta_i$ est l'ordonnée du centre de courbure répondant au point $(x_i, y_i)$, on a

$$y_i \frac{d^2y_i}{dx^2} + \left(\frac{dy_i}{dx}\right)^2 = \eta_i \frac{d^2y_i}{dx^2} - 1.$$

L'équation (3) devient donc

$$\Sigma\left(\eta_i \frac{d^2y_i}{dx^2} - 1\right) = a_1^2 - 2a_2,$$

ou

$$(4) \qquad \Sigma\eta_i \frac{d^2y_i}{dx^2} = a_1^2 - 2a_2 + m.$$

---

(*) Cette formule s'obtient en différentiant la relation

$$\Sigma y_i^2 = (a_1x + b_1)^2 - 2(a_2x^2 + b_2x + c_2).$$

Cherchons à interpréter géométriquement cette équation. Pour cela, remarquons que si $R_i$ est le rayon de courbure au point $M_i(x_i, y_i)$ et $\alpha_i$ l'angle que la tangente en $M_i$ fait avec l'axe des $x$, on a

$$\frac{d^2y_i}{dx^2} = \frac{1}{R_i \cos^3 \alpha_i}.$$

Par suite,

$$\eta_i \frac{d^2y_i}{dx^2} = \frac{\eta_i}{R_i \cos^3 \alpha_i}.$$

Mais, si $C_i$ est le centre de courbure répondant au point $M_i$, $N_i$ le point où la normale $M_iC_i$ coupe l'axe des $x$, on a $\eta_i = N_iC_i \cdot \cos \alpha_i$. D'ailleurs $\theta_i$ étant l'angle sous lequel l'ordonnée considérée coupe la courbe en $M_i$ on a $\theta_i = \frac{\pi}{2} - \alpha_i$. Il vient donc finalement

$$\eta_i \frac{d^2y_i}{dx^2} = \frac{1}{\sin^2 \theta_i} \cdot \frac{N_iC_i}{M_iC_i},$$

et l'équation (4) se transforme en la suivante

$$\Sigma \frac{1}{\sin^2 \theta_i} \cdot \frac{N_iC_i}{M_iC_i} = a_1^2 - 2a_2 + m, \tag{5}$$

qui exprime une propriété géométrique nouvelle des courbes algébriques. Afin de compléter celle-ci, cherchons la signification géométrique de la constante qui figure au second membre.

Les tangentes des angles $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$ que font les $m$ asymptotes de la courbe avec $Ox$ sont les racines de l'équation

$$\operatorname{tg}^m \varphi + a_1 \operatorname{tg}^{m-1} \varphi + a_2 \operatorname{tg}^{m-2} \varphi + \cdots = 0;$$

donc

$$a_1^2 - 2a_2 = \Sigma \operatorname{tg}^2 \varphi_k$$

et

$$a_1^2 - 2a_2 + m = \Sigma (1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_k) = \Sigma \frac{1}{\cos^2 \varphi_k},$$

ou si $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m$ sont les angles des asymptotes avec $Oy$

$$a_1^2 - 2a_2 + m = \Sigma \frac{1}{\sin^2 \omega_k},$$

et la formule (5) devient

$$\Sigma \frac{1}{\sin^2 \theta_i} \cdot \frac{N_iC_i}{M_iC_i} = \Sigma \frac{1}{\sin^2 \omega_k}. \tag{6}$$

De là ce théorème :

*Étant donnée une courbe algébrique, on trace dans son plan deux droites rectangulaires quelconques* D *et* D′; *la droite* D *coupe la courbe aux points* $M_1, M_2, \ldots, M_m$ *sous les angles* $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m$; *les normales à la courbe, en ces points, rencontrent* D′ *en* $N_1, N_2, \ldots, N_m$; *les centres de courbure correspondants sont* $C_1, C_2, \ldots, C_m$; *enfin la droite* D *coupe les asymptotes de la courbe sous les angles* $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m$. *Cela posé, on a la formule* (6)(*).

Si la courbe est *isotropique*, c'est-à-dire si elle n'a pas d'autres directions asymptotiques que les directions isotropes, son équation s'écrit

$$(x^2+y^2)^p + H = 0,$$

H étant un polynôme de degré $2p-1$. Par suite,

$$a_1 = 0, \quad a_2 = p, \quad m = 2p,$$

et

$$a_1^2 - 2a_2 + m = 0.$$

La formule (5) devient alors

$$\Sigma \frac{1}{\sin^2\theta_i} \cdot \frac{N_iC_i}{M_iC_i} = 0.$$

Nous avons déjà obtenu ce résultat par une autre voie (J. M. S., 1887, p. 127).

Voyons ce que donne le théorème ci-dessus pour une ellipse rapportée à ses axes

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

et dont la normale MNN′ rencontre l'axe OA en N, l'axe OB en N′. L'équation (5) est ici,

$$\frac{2}{\sin^2\theta} \cdot \frac{NC}{MC} = -2\frac{b^2}{a^2} + 2,$$

ou si l'on mène MK, CK parallèles aux axes OA, OB, et que l'on projette K en J sur la normale MC

$$\frac{a^2-b^2}{a^2} = \frac{NC}{MC\sin^2\theta} = \frac{NC}{JC}.$$

---

(*) Nous avons donné une démonstration de ce théorème au moyen d'un système spécial de coordonnées dans le *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 1881, XIX, p. 83.

Par suite,

$$\frac{b^2}{a^2} = 1 - \frac{NC}{JC} = \frac{JN}{JC},$$

ou par une propriété bien connue de l'ellipse,

$$\frac{JN}{JC} = \frac{MN}{MN'}, \quad \text{ou encore} \quad \frac{JN}{NC} = \frac{MN}{NN'}.$$

Soit T le point où NK coupe OB. On a

$$\frac{NK}{NT} = \frac{NC}{NN'} = \frac{NJ}{NM}.$$

Donc TM est parallèle à KJ, c'est-à-dire perpendiculaire à MN, ou tangente en M à l'ellipse. De là cette construction du centre de courbure : *La tangente en* M *coupant l'axe* OB *en* T, *et la normale, l'axe* OA *en* N, *on prend le point de rencontre* K *de* TN *et de la parallèle à l'axe* OA *menée par* M. *Le centre de courbure est sur la parallèle à* OB *menée par* K. Cette construction a été obtenue d'une toute autre manière par M. Mannheim (*Cours de géométrie descriptive*, 2ᵉ édⁿ, p. 174).

---

## SOLUTION D'UNE QUESTION PROPOSÉE.

### Question 750.

(Voir *Mathesis*, (2), I, p. 281.)

*Une parabole cubique représentée par l'équation*

$$x = a + by + cy^2 + dy^3$$

*passe par les points* A, B *qui ont pour ordonnées :* $\beta$, $\beta'$. *Les tangentes en ces points, la corde* AB *et la courbe coupent l'axe des* $x$ *aux points* T, S, U, V. *Démontrer que le point* V *est le centre de gravité des points* T, S, U *pour des masses proportionnelles à* $\beta'^2$, $\beta^2$, $-2\beta\beta'$. (Laisant.)

*Solution par* Mˡˡᵉ Pompilianu et par MM. Joachimescu, Déprez, Decamps, Droz, Cristesco, Mandart. Les équations des tangentes en A, B et de la corde AB, sont :

$$X - \alpha = (Y - \beta)(b + 2c\beta + 3d\beta^2), \quad X - \alpha' = (Y - \beta')(b + 2c\beta' + 3d\beta'^2),$$

$$\frac{X - \alpha}{\alpha' - \alpha} = \frac{Y - \beta}{\beta' - \beta}.$$

Les abscisses des points T, S, U, V seront donc :

$$X_T = \alpha - \beta(b + 2c\beta + 3d\beta^2) = a - c\beta^2 - 2d\beta^3,$$
$$X_S = \alpha' - \beta'(b + 2c\beta' + 3c\beta'^2) = a - c\beta'^2 - 2d\beta'^3,$$
$$X_U = \alpha' - \beta\frac{\alpha' - \alpha}{\beta' - \beta} = a - c\beta\beta' - d\beta\beta'(\beta + \beta'),$$
$$X_V = a.$$

L'abcisse du centre de gravité des masses proportionnelles à $\beta'^2$, $\beta^2$, $-2\beta\beta'$ appliquées en T, S, U sera donnée par la formule :

$$X = \frac{\Sigma mx}{\Sigma m} = \frac{a\beta'^2 + a\beta^2 - 2a\beta\beta'}{\beta'^2 + \beta^2 - 2\beta\beta'} = a = X_V.$$

---

## QUESTIONS PROPOSÉES.

**763.** Soit ABCD un parallélogramme articulé. Le sommet A est fixe et les côtés AB, AD tournent autour de A d'angles égaux en sens inverses. Démontrer que le point C décrit une ellipse. (MANNHEIM.)

**764.** Étant donnée une parabole P, on considère toutes les paraboles P′ qui ont même foyer que P et pour directrice une tangente quelconque menée à P. Trouver l'enveloppe des paraboles P′. (J. NEUBERG.)

**765.** Au point P d'une courbe Δ on mène l'ordonnée PB et la tangente PA rencontrant l'axe OX en A; la perpendiculaire élevée en A sur PA coupe PB en M. Déterminer la courbe Δ par la condition que la courbe (M) soit symétrique de Δ par rapport à l'origine. (H. BROCARD.)

**766.** Sur les côtés AX, AY d'un angle donné, on prend deux segments variables AB, AC satisfaisant à la condition AB + AC = $2p$. Démontrer que la droite BC enveloppe une parabole, de paramètre $p \sin\frac{1}{2}A \operatorname{tg}\frac{1}{2}A$; le point de contact de BC est l'isotomique du pied de la bissectrice de l'angle BAC. (SOLLERTINSKY.)

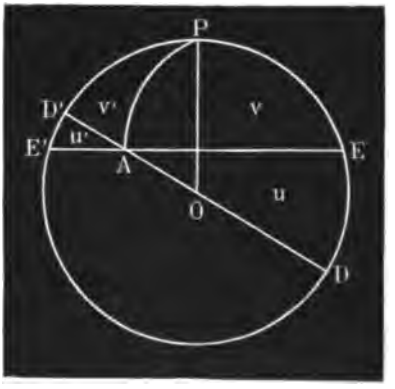
---

**Rectification.** — Question 755, p. 56, écrire $(b - c)^4$ au lieu de $(b - c)$ (comp. J. M. E, 1892, p. 45).

# AIRE D'UNE FIGURE TRACÉE SUR UNE SPHÈRE ET FORMÉE D'ARCS DE PETITS CERCLES,

par M. C. E. WASTEELS, professeur agrégé.

1. Considérons un grand cercle et un petit cercle, respectivement de rayon R et $r$, tracés sur une même sphère, et, pour plus de facilité, supposons leurs plans perpendiculaires au plan du papier, de sorte que leur intersection se projette en un point A. Cherchons à déterminer les aires $2u$ et $2u'$ des portions de la sphère comprises entre les deux cercles et projetées en ADE et AD'E'.




A cet effet, prenons le pôle, le plus rapproché, du petit cercle EE'; soit P ce pôle, et menons l'arc de grand cercle PA. Désignons par $2v$ et $2v'$ les portions de surface projetées en PAE et PAE', par $h$ la hauteur de la zone PEE', et par $d$ et $d'$ les arcs de grands cercles semblables aux arcs AE et AE'. Nous aurons $v = dh$, $v' = d'h$.

Or,

$u$ = triangle sphérique PAD $- v$, $u' = v' -$ triangle sphérique PAD'.

Mais en désignant par A l'angle que forment au point projeté en A les deux circonférences données DD' et EE', et en observant que l'angle APE, exprimé en angles droits, est égal à $\frac{2d}{\pi R}$, on a

$$\text{triangle PAD} = \left[\frac{2d}{\pi R} + (1 + A) + 1 - 2\right]\frac{\pi R^2}{2} = dR + \frac{A\pi R^2}{2};$$

$$\text{triangle PAD'} = \left[\frac{2d'}{\pi R} + (1 - A) + 1 - 2\right]\frac{\pi R^2}{2} = d'R - \frac{A\pi R^2}{2}.$$

Par suite,

$$u = dR + \frac{A\pi R^2}{2} - dh = \frac{A\pi R^2}{2} + d(R - h);$$

$$u' = d'h - d'R + \frac{A\pi R^2}{2} = \frac{A\pi R^2}{2} - d'(R - h).$$

Soit $\delta$ la différence $R - h$, c'est-à-dire la distance du centre de la sphère au plan du petit cercle ; nous aurons, pour les aires $2u$ et $2u'$,

$$2u = A\pi R^2 + 2d\delta, \quad (1)$$

$$2u' = A\pi R^2 - 2d'\delta. \quad (2)$$

Observons que l'arc AE est plus grand que l'arc AE' ; par conséquent, l'arc projeté en AE est plus grand qu'une demi-circonférence, et celui qui est projeté en AE est plus petit qu'une demi-circonférence.

Comme la formule (2) ne diffère de (1) qu'en ce que $2d.\delta$ est remplacé par $2d'.\delta$, on voit que l'aire cherchée est exprimée par $A\pi R^2 \pm 2d\delta$, où il faut prendre le signe supérieur ou le signe inférieur suivant que l'arc $2d$ est plus grand ou plus petit qu'une demi-circonférence.

**3.** Considérons maintenant un triangle ABC dont deux côtés, AB et AC, sont des arcs de grands cercles et dont le troisième, BC, est quelconque.

Deux cas peuvent se présenter : 1° le centre de la sphère tombe du même côté par rapport au plan du côté BC que le triangle ABC ; 2° le centre et le triangle tombent de côtés opposés. Dans le premier cas, l'arc de grand cercle qui joint deux points quelconques du côté BC tombe, par rapport au plan de BC, du côté opposé au centre, et, par suite, au triangle ; dans le second, cet arc tombe du même côté que le triangle ABC.

Cela étant, joignons les points B et C par un arc de grand cercle BD'C ; dans le premier cas, cet arc tombe du côté opposé au triangle, et l'on aura, en désignant par T la surface du triangle ABDC et par $2u'$ celle de la figure BDCD',

$$T = ABD'C - 2u'.$$

Désignons par A, B, C les angles du triangle donné, par $A_1$ les angles égaux formés en B et C par les arcs BDC et BD'C, par $a$ l'arc de grand cercle semblable à BDC et par $\alpha$ la distance du centre de la sphère au plan de BDC ; nous aurons, en supposant d'abord l'arc BDC plus petit qu'une demi-circonférence,

$$ABD'C = [A + (B + A_1) + (C + A_1) - 2]\frac{\pi R^2}{2};$$

et, d'après la formule (2),

$$2u' = A_1 \pi R^2 - a\alpha.$$

Par suite,

$$T = [A + (B + A_1) + (C + A_1) - 2 - 2A_1] \frac{\pi R^2}{2} + a\alpha =$$

$$(A + B + C - 2) \frac{\pi R^2}{2} + a\alpha.$$

Si l'arc BDC est plus grand qu'une demi-circonférence, soit D le milieu de cet arc, et menons l'arc de grand cercle AD ; nous aurons

$$T = ABD + ADC.$$

Or, les triangles ABD et ADC satisfont aux mêmes conditions que le triangle considéré plus haut; nous aurons donc, en désignant par A' l'angle BAD, par D l'angle ADB et par $a'$ l'arc de grand cercle semblable à l'arc BD,

$$ABD = (A' + B + D - 2) \frac{\pi R^2}{2} + a'\alpha,$$

et

$$ADC = [(A - A') + (2 - D) + C - 2] \frac{\pi R^2}{2} + (a - a')\alpha ;$$

d'où

$$T = (A + B + 2 + C - 4) \frac{\pi R^2}{2} + a\alpha,$$

ou

$$T = (A + B + C - 2) \frac{\pi R^2}{2} + a\alpha.$$

La formule est donc toujours la même, que BDC soit plus grand qu'une demi-circonférence, ou que cet arc soit plus petit.

Lorsque l'arc de grand cercle BD'C tombe du même côté que le triangle, on a

$$T = ABD'C + 2u' ;$$

en suivant la même marche que dans le premier cas, on trouve

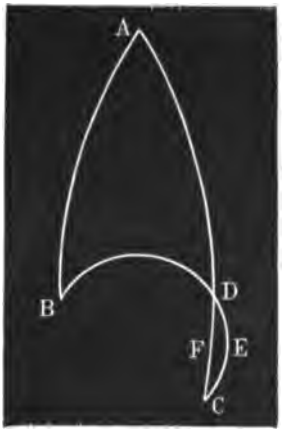
$$T = (A + B + C - 2) \frac{\pi R^2}{2} - a\alpha.$$

Par conséquent, si l'on convient de désigner par $\alpha$, non pas la distance absolue du centre de la sphère au plan du côté BC, mais cette distance

affectée du signe + ou du signe — suivant que le centre tombe, par rapport au plan de BC, du même côté que le triangle ou du côté opposé, on aura, dans tous les cas possibles,

$$T = (A + B + C - 2)\frac{\pi R^2}{2} + a\alpha. \qquad (3)$$

**8.** Nous allons maintenant considérer un triangle quelconque, mais afin de pouvoir passer plus facilement du cas précédent au cas général, examinons d'abord ce que représente le second membre de la formule (3) lorsque le côté BC coupe AC entre A et C, en D, et en supposant que, dans ce cas, on prenne C négativement. On a




$$ABD = (A + B + D - 2)\frac{\pi R^2}{2} + a'\alpha,$$

$a'$ désignant l'arc de grand cercle semblable à BD.

Évaluons maintenant la surface DECF; nous pourrions nous servir de la formule qui nous a donné $2a'$; mais pour ne pas avoir à faire de discussion, considérons cette figure comme un triangle dont les côtés sont DEC, DF et FC, F étant un point quelconque pris sur l'arc de grand cercle DFC entre D et C.

On aura, on observant que ce triangle est situé, par rapport au plan de DEC, du côté opposé au triangle BAD,

$$DECF = (2 + D + C - 2)\frac{\pi R^2}{2} + D'E'C'(-\alpha),$$

ou

$D = C$, et $D'E'C' =$ arc de grand cercle semblable à DEC;

donc,

$$D'E'C' = a - a';$$

par suite,

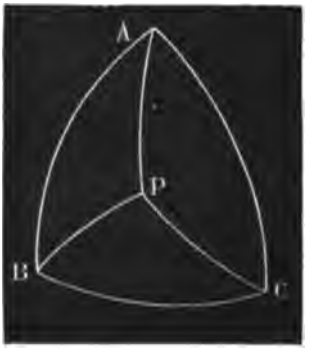
$$DECF = 2C\frac{\pi R^2}{2} - (a - a')\alpha.$$

On a donc,

$$ABD - DECF = (A + B - C - 2)\frac{\pi R^2}{2} + a\alpha.$$

On voit par là qu'en prenant C négativement, la même formule représente la différence ABD — DECF. De même, si BC coupait AB entre A et B, la même formule, où B et C seraient pris négativement, représenterait la portion de la figure ABC comprise dans l'angle A, diminuée des deux parties extérieures.

4. Cela étant, considérons un triangle quelconque ABC; prenons un point quelconque P à l'intérieur de ce triangle et menons les arcs de grands cercles PA, PB, PC. Si tous ces arcs tombent entièrement à l'intérieur du triangle, on voit que celui-ci sera la somme des trois triangles PAB, PBC, PCA; donc, on aura, en observant que la somme des angles de ces triangles constitue la somme des angles du triangle ABC augmentée de 4 angles droits,

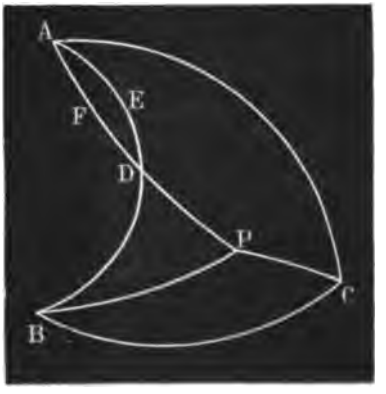



$$ABC = (A + B + C + 4 - 6)\frac{\pi R^2}{2} + a\alpha + b\beta + c\gamma,$$

ou

$$T = (A + B + C - 2)\frac{\pi R^2}{2} + a\alpha + b\beta + c\gamma.$$

Il est à remarquer que le point P étant pris à l'intérieur du triangle, chaque triangle partiel, construit sur un côté de ABC comme base, tombe du même côté du plan de cette base que le triangle ABC; il suit de là que $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ représentent les distances du centre de la sphère aux plans des trois côtés, chaque distance étant affectée du signe + ou du signe —, suivant que le centre de la sphère tombe, par rapport au plan correspondant, du même côté que le triangle ABC ou du côté opposé.




Examinons enfin le cas où certains côtés sont coupés par les arcs issus

du point P en un second point situé entre leurs extrémités ; supposons, par exemple, que l'arc PA coupe AB en D, situé entre A et B. Dans ce cas, on aura

$$T = PAC - AEDF + PBC + PBD = PAC + PBC + (PBD - AEDF).$$

Or,

$$PBD - AEDF = (DPB + PBD - FAE - 2)\frac{\pi R^2}{2} + c\gamma.$$

D'après cela, il est aisé de voir qu'on aura

$$T = (C + B + CAF - EAF - 2)\frac{\pi R^2}{2} + a\alpha + b\beta + c\gamma$$

$$= (C + B + A - 2)\frac{\pi R^2}{2} + a\alpha + b\beta + c\gamma.$$

La formule

$$T = (A + B + C - 2)\frac{\pi R^2}{2} + a\alpha + b\beta + c\gamma$$

est donc générale.

Observons que

$$A + B + C - 2$$

est l'excès sphérique du triangle ; si on le représente par E, la formule devient

$$T = E\frac{\pi R^2}{2} + \Sigma a\alpha.$$

5. Remarque I. S'il s'agit d'un triangle sphérique ordinaire,

$$\alpha = \beta = \gamma = 0,$$

puisque les plans des côtés passent alors par le centre ; donc on retrouve la formule connue :

$$T = E\frac{\pi R^2}{2},$$

ou T = E, en prenant pour unité de surface le triangle trirectangle.

6. Remarque II. S'il s'agit d'un triangle microsphérique, c'est-à-dire, formé d'arcs de cercles passant tous par un même point de la sphère, on a E = 0, et la formule devient

$$T = a\alpha + b\beta + c\gamma,$$

formule qui présente une extrême analogie avec la formule correspon-

dante relative au triangle rectiligne; l'analogie devient encore plus frappante si l'on observe que la distance du centre au plan de chaque côté est égale à la moitié de la corde de l'arc perpendiculaire abaissé, sur ce côté, du point S′ diamétralement opposé au point S où se rencontrent les trois côtés; on aura donc, en désignant les longueurs de ces cordes, prises avec des signes convenables, par $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$,

$$T = \tfrac{1}{2} \mathbf{S} a\alpha'.$$

7. Considérons maintenant un polygone tracé sur une sphère et formé d'arcs de petits cercles. Si le polygone est convexe, c'est-à-dire tel que, si l'on prend le plan d'un côté quelconque, le polygone tombe entièrement du même côté de ce plan, on verrait facilement, en joignant par des arcs de grands cercles un point intérieur quelconque aux sommets du polygone, qu'on a, dans tous les cas,

$$ABC\cdots = (A + B + C + \cdots + 4 - 2n)\frac{\pi R^2}{2} + \mathbf{S} a\alpha,$$

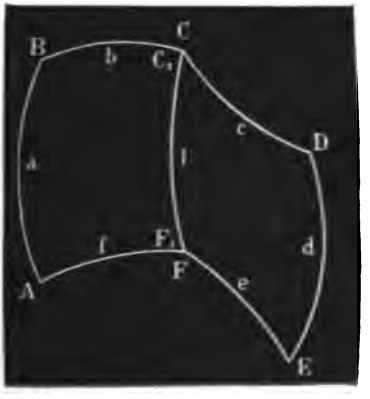
$n$ étant le nombre de côtés; donc, en représentant par P la surface du polygone, on a

$$P = [A + B + C + \cdots - 2(n-2)]\frac{\pi R^2}{2} + \mathbf{S} a\alpha,$$

ou enfin, en désignant par E l'excès de la somme des angles du polygone sur autant de fois 2 angles droits qu'il y a de côtés moins deux,

$$P = E\frac{\pi R^2}{2} + \mathbf{S} a\alpha.$$

Observons encore que chacune des distances du centre aux plans des côtés est affectée du signe + ou du signe —, suivant que le centre tombe du même côté du plan que le polygone, ou du côté opposé.




8. Soit enfin un polygone quelconque. Décomposons-le en polygones convexes, et supposons la formule vraie pour deux polygones ABCF et CDEF formant ensemble un autre polygone ABCDEF; je dis que la for-mule sera encore vraie pour le polygone total.

En effet, en désignant par $n'$ et $n''$ les nombres de côtés des polygones ABCF et CDEF, on aura

$$\text{ABCF} = [\text{A} + \text{B} + \text{C}_1 + \text{F}_1 - 2(n' - 2)]\frac{\pi R^2}{2} + a\alpha + b\beta + l\lambda + f\varphi;$$

$$\text{CDEF} = [(\text{C} - \text{C}_1) + \text{D} + \text{E} + (\text{F} - \text{F}_1) - 2(n'' - 2)]\frac{\pi R^2}{2} + c\gamma + d\delta + e\varepsilon - l\lambda;$$

remarquons que la distance du centre au plan de CF doit intervenir dans les deux formules avec des signes contraires, puisque les deux polygones sont évidemment situés de côtés opposés par rapport au plan du côté CF. On aura donc, en ajoutant membre à membre les égalités précédentes,

$$\text{ABCDEF} = [\text{A} + \text{B} + \text{C} + \text{D} + \text{E} + \text{F} - 2(n' + n'' - 4)]\frac{\pi R^2}{2} + \Sigma a\alpha.$$

Or, $n' + n'' = n + 2$, $n$ étant le nombre de côtés du polygone ABCDEF; donc,

$$\text{ABCDEF} = [\text{A} + \text{B} + \text{C} + \text{D} + \text{E} + \text{F} - 2(n - 2)]\frac{\pi R^2}{2} + \Sigma a\alpha.$$

Si le point C n'était pas un sommet du polygone ABCDEF, mais seulement un point d'un de ses côtés, on aurait

$$\text{C} = 2, \quad n' + n'' = n + 3;$$

d'où

$$\text{ABCDEF} = [\text{A} + \text{B} + 2 + \text{D} + \text{E} + \text{F} - 2(n + 3 - 4)]\frac{\pi R^2}{2} + \Sigma a\alpha$$

$$= [\text{A} + \text{B} + \text{D} + \text{E} + \text{F} - 2(n - 2)]\frac{\pi R^2}{2} + \Sigma a\alpha;$$

ce qui démontre la proposition dans tous les cas.

On déduit aisément de là que la formule, étant vraie pour les différents polygones convexes composant un polygone non convexe, sera vraie pour le polygone formé par l'ensemble des deux premiers; elle le sera donc aussi pour le polygone obtenu en y ajoutant ensuite le troisième, et ainsi de suite; elle sera donc aussi vraie pour le polygone non convexe considéré.

Il est à remarquer que la distance du centre au plan de chaque côté doit être affectée du signe + ou du signe —, suivant que le centre tombe, par rapport à ce plan, du même côté que la portion du polygone

voisine du côté correspondant, ou du côté opposé. Ainsi, la surface P d'un polygone quelconque est donnée par la formule :

$$P = [\mathbf{S}A - 2(n-2)]\frac{\pi R^2}{2} + \mathbf{S}a\alpha,$$

ou, en désignant $\mathbf{S}A - 2(n-2)$ par E,

$$P = E\frac{\pi R^2}{2} + \mathbf{S}a\alpha.$$

**9.** Remarque I. S'il s'agit d'un polygone sphérique ordinaire, on a : $\alpha = \beta = \cdots = 0$; d'où

$$P = E\frac{\pi R^2}{2}.$$

Remarque II. Si le polygone est microsphérique, on a : $E = 0$; d'où $P = \mathbf{S}a\alpha$.

---

## QUESTIONS DE GÉOMÉTRIE PROJECTIVE.

(Voir *Mathesis*, (2), I, pp. 90, 116, 265.)

**12.** *Soient $u_1$, $u_2$, $u_3$, $u_4$ quatre droites situées dans un même plan. Dans les triangles $u_1u_2u_3$, $u_1u_3u_4$, $u_1u_4u_2$, on mène les médianes qui aboutissent aux milieux des côtés situés sur $u_1$. Démontrer que les points où ces médianes rencontrent respectivement $u_4$, $u_2$, $u_3$, sont en ligne droite.*

(J. N., *Ed. Times*, n° 11253.)

Cette proposition est un cas particulier de la suivante : On joint les sommets d'un triangle ABC à un même point M; les conjuguées harmoniques des droites AM, BM, CM par rapport aux angles BAC, CBA, ACB coupent les côtés BC, CA, AB en trois points situés sur la polaire trilinéaire du point M.

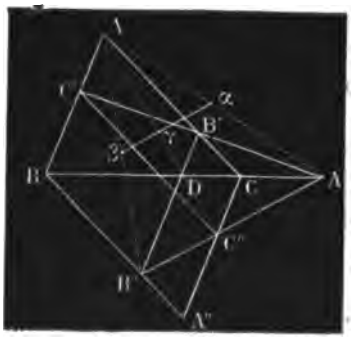
Dans le théorème énoncé ci-dessus, le triangle ABC est formé par les droites $u_2$, $u_3$, $u_4$ et le point M est à l'infini sur $u_1$.

**13.** *Soient $u_1$, $u_2$, $u_3$, $u_4$ quatre droites situées dans un même plan. Dans les triangles $u_1u_2u_3$, $u_1u_3u_4$, $u_1u_4u_2$, on joint le centre du cercle circonscrit au sommet opposé au côté $u_1$. Démontrer que les trois droites ainsi obtenues concourent en un même point de la circonférence circonscrite au triangle $u_2u_3u_4$* (Théorème connu).

En effet, les trois droites ainsi menées sont les isogonales par rapport aux angles $u_2u_3$, $u_3u_1$, $u_1u_2$ des perpendiculaires abaissées des sommets de ces angles sur $u_1$; donc elles concourent en un même point $U_1$, qui est l'inverse, par rapport au triangle $u_2u_3u_1$, du point situé à l'infini sur la direction perpendiculaire à $u_1$. Ce point appartient donc à la circonférence circonscrite au triangle $u_2u_3u_1$.

**14.** *Les milieux des trois diagonales d'un quadrilatère complet sont en ligne droite, et les rapports des distances de ces points ne dépendent que de la direction des côtés.*

Trois des côtés du quadrilatère forment le triangle ABC et sont coupés par le quatrième aux points A′, B′, C′. Construisons les parallélogrammes ACA″B, AB′B″B, AC′C″C. La droite B″C″ passe par A′. Car on a la relation




$$AB'.CA'.BC' = -CB'.AC'.BA',$$

qui résulte du triangle ABC coupé par la transversale A′B′C′; on en déduit

$$BB''.CA'.A''C'' = -A''B''.CC''.BA',$$

donc les points B″, C″, A′ sont en ligne droite. Les milieux $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ des diagonales AA′, BB′, CC′ du quadrilatère proposé coïncident avec les milieux des droites AA′, AB″, AC″; donc les points $\alpha, \beta, \gamma$ sont sur une parallèle à la droite A′C″B″.

Soit D le point où B′B″ coupe BC; on a

$$\frac{\alpha\gamma}{\alpha\beta} = \frac{A'C''}{A'B''} = \frac{A'C}{A'D} = B'(CDA'I),$$

I désignant le point à l'infini sur BC. Donc le rapport $\alpha\gamma : \alpha\beta$ est égal au rapport anharmonique de quatre parallèles menées par un même point aux côtés B′C, BC′, B′C′, BC du quadrilatère. (Sollertinsky.)

## NOTES MATHÉMATIQUES.

(Voir p. 18.)

**3.** ***Sur une propriété de la parabole.*** Le théorème sur la parabole que j'ai déduit d'une propriété démontrée pour toutes les courbes et qui est reproduit dans *Mathesis*, t. VIII, p. 94, doit être rectifié de la manière suivante :

*Soit* P *un point de la normale en* A *à une parabole. La normale* PA *coupe la parabole en un second point* K. *La droite qui joint les points où le cercle décrit sur* PK *comme diamètre est coupé par la tangente et par le diamètre de la parabole relatifs au point* K, *passe par les pieds des deux autres normales issues de* P. (Extrait d'une lettre de M. D'OCAGNE.)

**4.** ***Sur la transformation continue.*** (Extrait d'une lettre de M. LEMOINE.) Pour donner un dernier exemple de l'utilité qu'il y a à appliquer la *Transformation continue* à chaque résultat qu'on obtient, nous citons l'intéressant travail de M. W. FURMANN : *Sur un cercle associé à un triangle* (*Mathesis*, 1890, page 105). On s'aperçoit immédiatement qu'il y a trois autres cercles jouissant de propriétés analogues qui se déduisent par *transformation continue* de celles du cercle de M. Furhmann et au sujet de chacun desquels tout le mémoire de M. Furhmann peut être reproduit avec les seules modifications qu'indique cette transformation.

Voici quelques rectifications à introduire dans l'article relatif à la transformation continue. Page 63, au lieu de O, $O_a$, il faut lire $o$, $o_a$. Page 82, formules 22, lire 2R, au lieu de 4R. Page 89, formule 99, lire $\frac{r}{R}$ au lieu de $\frac{R}{r}$.

---

## BIBLIOGRAPHIE.

*Éléments de géométrie trilinéaire*, par A. CAMBIER, inspecteur de l'enseignement moyen. Deuxième édition, Bruxelles, A. Ca taigne, 1892, 135 pages, in-8°.

Cet ouvrage constitue un complément utile, on peut même dire indispensable, des manuels adoptés chez nous pour l'enseignement de la géométrie analytique. Il traite les principales questions relatives à la droite, au cercle et aux coniques, et renferme un grand nombre d'applications développées (quelquefois avec trop de concision) et d'exercices proposés.

La première édition n'avait que 48 pages. La partie théorique a été complétée

en plusieurs points importants et dans les nouvelles applications, on rencontre les principales questions de la géométrie récente (moins la terminologie).

Nous aurions bien à exprimer quelques desiderata : modification de certains énoncés, simplification de plusieurs démonstrations, suppression des propositions qui se traitent plus facilement par d'autres méthodes, introduction de plusieurs notions fondamentales apportant souvent de grandes simplifications (points cycliques, par exemple), etc. Mais, à part cela, ces éléments de géométrie trilinéaire ont de grandes qualités et peuvent être très utiles à notre enseignement scientifique; nous les recommandons volontiers aux élèves et aux professeurs.

L'impression du livre est soignée; toutefois, on peut regretter de nombreuses erreurs typographiques. (J. N.)

---

*Cours de Géométrie* destiné aux élèves des écoles industrielles par H. POSTULA, directeur d'institut, professeur de mathématiques à l'école industrielle de Liège. — Autographie Miot, Liége. — Un vol. in 8° de 126 pages. Prix : 1 fr.

Voici l'avant-propos de l'auteur :

« Ce cours est destiné aux élèves des écoles industrielles et particulièrement à ceux qui, comme à Liège, possèdent déjà des notions d'arithmétique et d'algèbre. L'ouvrage, sans prétention aucune, n'a qu'un but : permettre aux élèves, la plupart ouvriers, de suivre plus facilement et par suite plus efficacement les leçons du professeur. Afin d'éviter, ou des longueurs que ne comporte pas un cours du soir, ou des démonstrations par à peu près, souvent plus nuisibles qu'utiles aux élèves, j'ai cru devoir, dans certains cas, me contenter de l'énoncé des théorèmes sans explication. Mais d'un autre côté, j'ai donné un assez grand développement à la géométrie plane, convaincu qu'il vaut mieux qu'un élève raisonne avant d'apprendre que d'apprendre avant de raisonner. Le jugement d'abord, la mémoire ensuite; intéresser son esprit à l'étude, c'est le point capital.

Je m'estimerai heureux si j'ai contribué quelque peu à ce résultat en publiant mon petit cours de Géométrie. »

Les matières traitées dans ce manuel sont les suivantes :

*Géométrie plane.* — Définitions, termes employés en géométrie. — Livre I. Perpendiculaires et obliques. Parallèles. Triangles. Quadrilatères. Applications (20). — Livre II. Définitions. Cordes et arcs. Circonférences sécantes et tangentes. Mesure des angles. Problèmes. Applications (23). — Livre III. Mesure des surfaces planes Carré de l'hypoténuse. Lignes proportionnelles. Similitude. Problèmes. Applications (15) — Livre IV. Polygones réguliers. Circonférence et aire du cercle. Applications (14).

*Figures dans l'espace.* De la perpendiculaire à un plan et des obliques. Angle d'une droite et d'un plan. Droites et plans parallèles. Angles dièdres. Polyèdres. Mesure du parallélipipède, du prisme, de la pyramide. Volume et surface latérale du cylindre, du cône et du tronc de cône. Volume et surface de la sphère. Cuber une poutre. Jauger un tonneau. Applications (42).

*Notions sur quelques courbes usuelles.* Décrire une ellipse, une hyperbole, une parabole et mener la tangente en un point de la courbe. Anse de panier. Hélice.

Comme l'auteur le dit lui-même, son livre est un simple résumé, rédigé d'après les ouvrages de Catalan, Blanchet, De Vylder et Liagre, et ne renfermant que ce qui est à la portée des élèves des écoles industrielles et peut leur être de quelque utilité. Il peut rendre de grands services là où le programme de géométrie, limité aux notions essentielles, est enseigné par des maîtres ayant eux-mêmes des connaissances assez étendues et sachant communiquer leur science.

Cependant, tout en recommandant déjà ce livre sous sa forme actuelle, nous exprimons l'espoir que M. Postula le soumettra à une revision très attentive pour corriger quelques définitions, énoncés ou démonstrations, développer plusieurs parties qui ne sont qu'indiquées (usage de l'équerre, du rapporteur, du compas de réduction, etc.) et introduire des chapitres qu'on s'attendait à y rencontrer (arpentage et nivellement, peut-être même des notions de géométrie descriptive). Un manuel destiné aux écoles industrielles, au lieu de présenter la physionomie d'un *Legendre réduit*, doit se rapprocher davantage des ouvrages de Bergery, de De Vylder et de Sonnet. (J. N.).

---

*Introduction à l'étude de la géométrie moderne* par CH. BIOCHE, ancien élève de l'école normale supérieure, professeur au lycée Michelet, Paris, Delagrave, 1891. Un vol. in-8°, de VIII-96 pages.

*Table des matières.* Première partie. Questions classiques. I. Méthodes pour la revision des théories classiques (pp. 1-7). II. Méthodes classiques (8-18). III. Application de l'algèbre aux problèmes (19-24).

Deuxième partie. Méthodes de transformation. I. Préliminaires (25-36). II. Principe général des méthodes de transformation (37-40). III. Projection centrale; propriétés générales (41-51). IV. Propriétés métriques qui sont projectives (51-59). V. Application de la méthode de projection (60-68). VI. Dualité (69-74). VII. Inversion (75-82).

Troisième partie. Notes complémentaires. I. Sur la trigonométrie (83-85). II. Division et racine carrée (86). III. Emploi des considérations de surfaces pour établir des relations métriques (87-89). IV. Sur la géométrie analytique (90-91). V. Sur le nombre des polyèdres réguliers convexes (92-93). VI. Construction graphique des courbes (94-95).

L'ouvrage de M. Bioche n'est ni un traité proprement dit ni un recueil d'exercices. L'auteur s'est proposé de faire un livre à la fois élémentaire et vraiment géométrique, exposant avec simplicité, sans les noyer dans trop de développements, les idées fondamentales de la géométrie moderne.

La lecture de l'*Introduction à la Géométrie moderne* constitue, pour les élèves possédant les Éléments de Legendre, une bonne préparation à l'étude des Traités de MM. Rouché et de Comberousse, Salmon, Cremona, etc. Les professeurs y trouveraient le canevas de quelques *conférences* instructives et intéressantes, propres à développer chez les jeunes gens des idées générales et à faire produire à une récapitulation des matières tout le fruit possible. (J. N.)

---

## SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

### ×Question 732.

(Voir *Mathesis*, (2), I, p. 176.)

*Les droites menées par les sommets d'un triangle* ABC *parallèlement à une même direction rencontrent la circonférence circonscrite aux points* A′, B′, C′. *Les droites de Simson relatives à ces points forment un triangle* A″B″C″. *Démontrer que le lieu du centre de la circonférence* A″B″C″ *est la circonférence décrite sur* HO *comme diamètre,* H *étant l'orthocentre de* ABC, O *le centre du cercle* ABC. (SOLLERTINSKY.)

*Solution par* M. DÉPREZ. Soient M un point quelconque de la circonférence ABC, et N, P ses projections sur BC, CA. Le quadrilatère MNPC étant inscriptible, l'angle APN = NMC. Les directions AC, MN étant fixes, on voit que si le point M parcourt la circonférence, les droites CM, PN tournent toujours avec la même vitesse angulaire dans des sens contraires. Par suite, les droites de Simson des trois points A′, B′, C′ forment un triangle A″B″C″ inversement semblable à celui qui est formé par trois parallèles aux droites CA′, CB′, CC′ ou directement semblable au triangle A′B′C′.

Soient $A_1$, $B_1$, $C_1$ les milieux des droites HA′, HB′, HC′; les triangles $A_1B_1C_1$, A′B′C′ ont pour centre d'homothétie le point H. D'après un théorème connu, les droites de Simson des points A′, B′, C′ par rapport au triangle ABC passent respectivement par $A_1$, $B_1$, $C_1$. Donc A″B″C″ est un triangle directement semblable à $A_1B_1C_1$ et circonscrit à ce dernier. On en conclut que le centre du cercle A″B″C″ coïncide avec l'orthocentre $H_1$ du triangle $A_1B_1C_1$; en effet, les circonférences $A''B_1C_1$, $B''C_1A_1$, $C''A_1B_1$ passent par $H_1$, et les angles $H_1C''A_1$, $H_1B''A_1$ étant égaux aux angles $H_1B_1A_1$, $H_1C_1A_1$ sont égaux entre eux, de sorte que $H_1C'' = H_1B''$, etc. Mais le triangle $A_1B_1C_1$ est de grandeur invariable et inscrit à un cercle fixe; donc son orthocentre $H_1$ décrit une circonférence concentrique avec le cercle des neuf points de ABC et ayant pour rayon $\frac{1}{2}$OH.

## ×Question 744.

(Voir *Mathesis*, (2), I, p. 264.)

***Trouver :*** *1° trois coefficients binomiaux consécutifs qui forment une progression arithmétique ; 2° quatre coefficients binomiaux consécutifs qui forment une proportion arithmétique* (*).

***Démontrer*** *qu'il ne peut exister trois coefficients binomiaux consécutifs qui soient en progression géométrique ou en progression harmonique, ni quatre coefficients consécutifs qui soient en progression arithmétique.*

(Schoute.)

*Solution par* M. Soons (Tirlemont). Soit $C_{m,n}$ un coefficient binomial ; les suivants sont

$$\frac{m-n}{n+1}C_{m,n},\quad \frac{(m-n)(m-n-1)}{(n+1)(n+2)}C_{m,n},\quad \frac{(m-n)(m-n-1)(m-n-2)}{(n-1)(n+2)(n+3)}C_{m,n}.$$

1° On doit avoir

$$2\,\frac{m-n}{n-1}=\frac{(m-n)(m-n-1)}{(n+1)(n+2)}+1;$$

d'où l'on tire

$$n=\frac{m-2\pm\sqrt{m+2}}{2}.$$

Par conséquent, si l'on fait $m+2=\alpha^2$, les valeurs de $m$ et $n$ sont

$$m=\alpha^2-2,\quad n=\tfrac{1}{2}(\alpha^2\pm\alpha-4)\,(**).$$

2° La condition de quatre coefficients consécutifs en proportion arithmétique se traduit par l'égalité

$$\frac{m-n}{n+1}+\frac{(m-n)(m-n-1)}{(n+1)(n+2)}=1+\frac{(m-n)(m-n-1)(m-n-2)}{(n+1)(n+2)(n+3)},$$

ou

$$n=\tfrac{1}{2}(m-3\pm\sqrt{m+3}).$$

---

(*) L'énoncé primitif portait « proportion géométrique ». Nous introduisons ici une modification déjà indiquée par M. Schoute et qui a été signalée aussi par nos honorables correspondants. (J. N.)

(**) L'égalité

$$2C_{m,n-1}=C_{m,n}+C_{m,n-2}\text{ donne }2C_{m,m-n+1}=C_{m,m-n}+C_{m,m-n+2};$$

donc à chaque valeur de $m$ correspondent deux valeurs de $n$. (J. N.)

Elle a donc lieu pour

$$m = \alpha^2 - 3, \quad n = \tfrac{1}{2}(\alpha^2 \pm \alpha - 6) = \tfrac{1}{2}(\alpha \pm 3)(\alpha \mp 2)(*).$$

3° Si trois coefficients consécutifs étaient en progression géométrique, on aurait

$$\left(\frac{m-n}{n+1}\right)^2 = \frac{(m-n)(m-n-1)}{(n+1)(n+2)}, \quad \text{ou} \quad \frac{m-n}{n+1} = \frac{m-n-1}{n+2},$$

égalité absurde, la seconde fraction ayant un dénominateur plus grand et un numérateur plus petit que le terme correspondant de la première fraction(**).

4° Si $C_{m,n}$, $C_{m,n+1}$, $C_{m,n+2}$ étaient en proportion harmonique, on aurait

$$2\frac{n+1}{m-n} = 1 + \frac{(n+1)(n+2)}{(m-n)(m-n-1)},$$

d'où

$$n = \tfrac{1}{2}(m - 2 \pm \sqrt{-m});$$

donc la condition est impossible.

5° Quatre coefficients consécutifs ne peuvent être en progression arithmétique(***). Car on a vu que la condition

$$2C_{m,n+1} = C_{m,n} + C_{m,n+2}$$

est vérifiée par

$$m = \alpha^2 - 2, \quad n = \tfrac{1}{2}(\alpha^2 \pm \alpha - 4);$$

mais ces deux valeurs de $n$ ont une différence supérieure à 1.

6° On ne peut trouver quatre coefficients consécutifs formant une proportion géométrique. Car on aurait

$$\frac{m-n}{n+1} = \frac{m-n-2}{n+3};$$

or la première fraction est plus grande que la seconde.

---

(*) On explique encore facilement pourquoi à une même valeur de $m$ correspondent deux valeurs de $n$. (J. N.)

(**) L'équation $(1+z)^m = 0$ ayant toutes ses racines réelles, trois coefficients consécutifs ne peuvent être en progression géométrique (corollaire du théorème de de Gua). (J. N.)

(***) Cette proposition résulte d'un théorème de M. Hermite : si quatre coefficients consécutifs d'une équation sont en progression arithmétique, l'équation a des racines imaginaires. (J. N.)

M. Emmerich a également résolu toutes les parties de la question 744; de plus, il démontre l'impossibilité de la relation

$$\frac{C_{m,n+2} - C_{m,n+1}}{C_{m,n} - C_{m,n-1}} = \frac{C_{m,n+2}}{C_{m,n+1}}.$$

---

## ×Question 753.

(Voir *Mathesis*, (2), II, p. 32.)

*Résoudre le système d'équations*

$$(x+y)(x-y)^2 = (y+z)(y-z)^2 = (z+x)(z-x)^2. \quad \text{(Moore.)}$$

*Solution par* M. Emmerich. Posons

$$y+z = X, \quad z+x = Y, \quad x+y = Z;$$

le système proposé sera ramené à

$$Z(X-Y)^2 = X(Y-Z)^2 = Y(Z-X)^2. \qquad (1)$$

Si l'on développe les carrés indiqués et que l'on combine la première des quantités (1) successivement avec chacune des autres, on trouve

$$(Z-X)(Y^2-ZX) = 0, \quad (Y-Z)(X^2-YZ) = 0. \qquad (2)$$

Le système (2) peut être remplacé par les suivants :

$$\text{I.} \begin{cases} Z-X=0, \\ Y-Z=0; \end{cases} \quad \text{II.} \begin{cases} Z-X=0, \\ X^2-YZ=0; \end{cases}$$

$$\text{III.} \begin{cases} Y-Z=0, \\ Y^2-ZX=0; \end{cases} \quad \text{IV.} \begin{cases} Y^2-ZX=0, \\ X^2-YZ=0. \end{cases}$$

I. On a la solution $X = Y = Z$ ou $x = y = z$.

II. Si l'on remplace Y par X, la seconde équation devient $X(X-Y) = 0$; on en tire $X = 0$ ou $X = Y$. Par conséquent, on a, soit $X = Z = 0$ avec Y quelconque, soit $X = Y = Z$; d'où, en remontant aux valeurs de X, Y, Z, les deux solutions,

$$x = -y = z, \quad x = y = z.$$

III. On trouve facilement les deux solutions

$$-x = y = z, \quad x = y = z.$$

IV. Éliminons Z, ce qui donne $X^3 - Y^3 = 0$; donc $Y = X$, ou $Y = X\theta$, ou $Y = X\theta^2$, $\theta$ et $\theta^2$ étant les racines cubiques imaginaires de

l'unité. Remplaçant Y par X, Xθ ou Xθ² dans l'équation $Y^2 - ZX = 0$ on trouve

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z \text{ quelconque};$$
$$X = Y = Z; \quad Y = X\theta, \quad Z = X\theta^2; \quad Y = X\theta^2, \quad Z = X\theta.$$

En résumé, le système proposé admet les solutions

$$x = y = z; \quad x = y = -z, \quad x = z = -y, \quad y = z = -x;$$
$$x : y : z = 1 : \theta : \theta^2, \quad x : y : z = 1 : \theta^2 : \theta.$$

Ont résolu la même question MM. Verhelst (Anvers), Beco (Huy), Listray (Liége), Fraipont (Liége), Mandart (Rœulx), Denys (Avesnes).

Le changement d'inconnues n'est pas nécessaire. En effet, on trouve d'abord en développant les produits indiqués :

$$x^3 - x^2y - xy^2 + y^3 = y^3 - y^2z - yz^2 + z^3 = z^3 - x^2z - xz^2 + x^3;$$

puis, en combinant la première quantité avec chacune des autres :

$$x^3 - z^3 - (x^2 - z^2)\,y - (x - z)\,y^2 = 0, \quad y^3 - z^3 - (y^2 - z^2)\,x - (y - z)\,x^2 = 0;$$

ce que l'on peut écrire ainsi :

$$(x - z)(x^2 + xz + z^2 - xy - zy - y^2) = 0, \quad (y - z)(y^2 + yz + z^2 - yx - zx - x^2) = 0.$$

On est donc conduit à examiner quatre systèmes, etc.

---

## ×Question 755.

(Voir *Mathesis*, (2), I, p. 56.)

*Démontrer que l'expression*

$$\tfrac{1}{2}\,Sa^2\,(b - c)^2\,(ab + ac - 2bc)^2$$

*est un carré parfait.* (de Longchamps.)

*Solution par* M. E. Gelin. Cette question est résolue dans J. M. E., 1892, p. 92. Voici une autre solution. Soit $A + B + C = 0$. On déduit de là

$$A^2 + B^2 + C^2 = -2AB - 2BC - 2CA;$$

puis

$$(A^2 + B^2 + C^2)^2 = 4A^2B^2 + 4B^2C^2 + 4C^2A^2 + \lambda ABC\,(A + B + C),$$

$\lambda$ étant arbitraire. En posant $\lambda = \pm 4$ on obtient

$$S^2A^2 = 2SA^4, \quad S^2A^2 = 2SA^2\,(B - C)^2.$$

Dans la dernière formule, faisons

$$A = a(b-c), \quad B = b(c-a), \quad C = c(a-b);$$

nous aurons

$$\tfrac{1}{4}\mathbb{S}^2a^2(b-c)^2 = \tfrac{1}{2}\mathbb{S}a^2(b-c)^2(ab+ac-2bc).$$

Cette identité résout la question proposée.

*Solution par* M. Quint (Dordrecht). Remplaçant $ab+ac-2bc$ par $b(a-c)+c(a-b)$ on trouve

$$\mathbb{S}\,a^2(b-c)^2(ab+ac-2bc)^2$$
$$= \mathbb{S}\,a^2(b-c)^2[b^2(a-c)^2+c^2(a-b)^2+2bc(a-c)(a-b)]$$
$$= 2\mathbb{S}\,a^2b^2(a-c)^2(b-c)^2 - 2abc(a-b)(b-c)(c-a)\mathbb{S}\,a(b-c);$$

comme $\mathbb{S}\,a(b-c)=0$, on peut aussi écrire

$$\tfrac{1}{2}\mathbb{S}\,a^2(b-c)^2(ab+ac-2bc)^2$$
$$+\mathbb{S}\,a^2b^2(a-c)^2(b-c)^2+2abc(a-b)(b-c)(c-a)\mathbb{S}\,a(b-c)$$
$$= \mathbb{S}^2\,ab(a-c)(b-c).$$

L'identité

$$\mathbb{S}\,a^2b^2(a-c)^2(b-c)^2 = \mathbb{S}^2\,ab(a-c)(b-c)$$

donne le moyen de trouver un carré égal à la somme de trois carrés.

*Solution par* MM. Denys *et* Decamp. L'expression proposée peut prendre successivement les formes

$$\tfrac{1}{2}\mathbb{S}\,[a^2(b^2-c^2)-2abc(b-c)]^2,$$
$$\tfrac{1}{2}\mathbb{S}\,a^4(b^2-c^2)^2+2a^2b^2c^2\mathbb{S}\,(b-c)^2-2abc\mathbb{S}\,a^2(b^2-c^2)(b-c),$$
$$\mathbb{S}\,a^4b^4-a^2b^2c^2\mathbb{S}\,a^2+2a^2b^2c^2[2\mathbb{S}\,a^2-2\mathbb{S}\,ab]$$
$$-2abc[\mathbb{S}a^2(b^3+c^3)-2abc\mathbb{S}\,ab],$$
$$\mathbb{S}\,a^4b^4+3a^2b^2c^2\mathbb{S}\,a^2-2abc\mathbb{S}\,a^2(b^3+c^3),$$
$$\mathbb{S}^2\,a^2b^2+a^2b^2c^2\mathbb{S}^2a-2a^2b^2c^2\mathbb{S}\,ab-2abc\mathbb{S}\,a^2(b^3+c^3),$$
$$(\mathbb{S}\,a^2b^2-abc\mathbb{S}\,a)^2.$$

M. Déprez a résolu la même question.

---

## ×Question 759.

(Voir *Mathesis*, (2), II, p. 80.)

*Par un point fixe* A *d'une circonférence donnée, on mène deux cordes* AB *et* AC *dont le produit a une valeur constante* $m^2$, *puis on joint* BC. *Démontrer* 1° *que le lieu du pied* D *de la bissectrice de l'angle* BAC *du triangle* ABC *est une droite;* 2° *que le centre* I *du cercle inscrit et le*

*centre* I′ *du cercle exinscrit dans l'angle* BAC *décrivent une même circonférence;* 3° *que les centres* I″, I‴ *des deux autres cercles exinscrits décrivent aussi une même circonférence.* (P. AUBERT.)

*Solution par* M. SOLLERTINSKY. 1° Soient D′ le pied de la bissectrice extérieure de l'angle BAC; $\delta$, $\delta'$ les points où les droites AD, AD′ rencontrent le cercle ABC.

On sait que

$$AD.A\delta = -AD'.A\delta' = AB.AC = m^2.$$

Par suite, les points D, D′ sont les inverses de $\delta$, $\delta'$, le centre d'inversion étant en A, et les puissances respectives étant $m^2$, $-m^2$.

Les points D, D′ se meuvent donc sur deux droites parallèles, équidistantes de A et perpendiculaires à AO.

2° Soit A′ le point diamétralement opposé à A sur la circonférence donnée.

Le triangle A′II′ étant isoscèle (*), on a

$$\overline{AA'}^2 - \overline{A'I}^2 = AI.AI' \ (**);$$

mais la division (ADII′) étant harmonique, on a (***)

$$AI.AI' = AD.A\delta = m^2;$$

donc

$$\overline{A'I}^2 = \overline{AA'}^2 - m^2 = \text{const.}$$

3° De même

$$\overline{AA'}^2 - \overline{A'I''}^2 = AI''.AI''' = -m^2$$

d'où

$$\overline{A'I''}^2 = \overline{AA'}^2 + m^2 = \text{const.}$$

NOTE. La même question a été résolue par MM. LISTRAY (Liége) et MANDART (Rœulx). Nous l'avons tirée des *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, vol. IX, pp. 25-28, où la seconde et la troisième parties sont établies d'une manière un peu moins simple que dans la solution de nos honorables correspondants.

---

(*) $\delta$ est le milieu de II′ et l'angle I$\delta$A′ est droit.

(**) $$\overline{AA'}^2 - I'\overline{A}^2 = \overline{A\delta}^2 - \overline{I'\delta}^2 = (A\delta + I'\delta)(A\delta - I'\delta).$$

(***) $$\frac{1}{AD} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{AI} + \frac{1}{AI'}\right) = \frac{AI + AI'}{2AI.AI'} = \frac{A\delta}{AI.AI'}.$$

On peut aussi s'appuyer sur la similitude des triangles ADI, AI′C.

M. Déprez, qui a aussi résolu la question, accompagne sa solution des remarques suivantes :

1° Le côté BC enveloppe une circonférence ayant pour centre A et pour rayon $\frac{m^2}{2R}$. 2° Le milieu de BC décrit un limaçon de Pascal, podaire de O par rapport à la circonférence précédente. 3° L'orthocentre de ABC parcourt un limaçon de Pascal; il en est de même du centre de gravité et du centre du cercle des neuf points. 4° Le point de Lemoine décrit une quartique.

---

## Question 760.

(Voir *Mathesis*, (2), II. p. 80.)

I. *La série* $u_1 + u_2 + u_3 + \text{etc.}$, *où*

$$\sqrt[n]{u_n} = 1 - k\,(\log n : n)$$

*est convergente si* $k$ *est supérieur à* 1, *divergente si* $k$ *est inférieur ou égal à* 1. *Les logarithmes sont supposés népériens.*

II. *Si* $\alpha_n$ *tend vers zéro avec* $(1 : n)$, *la série*

$$\Sigma\,(1 - \alpha_n)^n$$

*sera convergente si le rapport* $(n\alpha_n : \log n)$ *tend vers une limite supérieure à* 1, *quand* $n$ *est de plus en plus grand; divergente, si ce rapport tend vers une limite inférieure à* 1, *ou s'il tend vers l'unité, en lui restant sans cesse inférieur.* (V. Jamet.)

*Solution par* M. E. Cesàro. *a*) Après avoir posé $u_n = n^{-p_n}$, remarquons que

$$\sqrt[n]{u_n} = n^{-\frac{p_n}{n}} = e^{-\frac{p_n}{n}\log n} > 1 - \frac{p_n}{n}\log n,$$

d'où

$$p_n > (1 - \sqrt[n]{u_n})\frac{n}{\log n}. \qquad (1)$$

Donc, si l'expression (1) finit par surpasser le nombre $p > 1$, il en est de même de $p_n$, d'où il suit que la série est convergente, parce que ses termes (supposés positifs) sont, à partir d'un certain rang, inférieurs aux termes correspondants de la série convergente $1^{-p} + 2^{-p} + 3^{-p} + \cdots$.

*b*) Si, au contraire, l'expression (1) finit par être inférieure ou égale à l'unité, on a, à partir d'une valeur convenable de $n$,

$$u_n \geqq \left(1 - \frac{\log n}{n}\right)^n > \frac{1}{n \log n}, \qquad (2)$$

et, par suite, la série est divergente, parce que ses termes surpassent les termes correspondants de la série divergente, dont le terme général est $\frac{1}{n \log n}$.

On peut s'y prendre de plusieurs manières pour établir l'inégalité (2). Si l'on remarque, par exemple, que le rapport de $\log n$ à $n$ tend vers zéro en décroissant toujours, lorsque $n$ croît à l'infini, on a

$$\frac{\log n}{n} < \frac{\log \log n}{\log n};$$

puis

$$-\log\left(1 - \frac{\log n}{n}\right)^n < \log n + \frac{(\log n)^2}{n} < \log n + \log \log n = \log (n \log n)$$

*c*) Pour *compléter* la règle de convergence signalée par M. Jamet, il suffit de considérer l'expression

$$\left[(1 - \sqrt[n]{u_n})\frac{n}{\log n} - 1\right]\frac{\log n}{\log \log n},$$

qui peut rester constamment supérieure à un nombre, supérieur à l'unité, ou bien constamment inférieure (ou égale) à l'unité. La série proposée est convergente dans le premier cas, divergente dans le second ; etc. Pour la démonstration il suffit de poser $u_n = \frac{1}{n (\log n)^{q_n}}$ et de se rappeler que la série dont le terme général est $\frac{1}{n (\log n)^q}$ est convergente pour $q > 1$, divergente pour $q \leqq 1$ ; etc.

*d*) Enfin, pour *généraliser* le théorème de M. Jamet, on doit prendre une série divergente quelconque $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \cdots$, à termes positifs : soit $\sigma_n$ la somme des $n$ premiers termes.

On sait, d'après Abel, que la série

$$\frac{\alpha_1}{\sigma_1^p} + \frac{\alpha_2}{\sigma_2^p} + \frac{\alpha_3}{\sigma_3^p} + \cdots$$

est convergente ou divergente suivant que $p > 1$ ou $p \leqq 1$. En s'appuyant sur cette proposition, on trouve que *la série* $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$ *est convergente ou divergente, suivant que l'expression*

$$\left[1 - \left(\frac{u_n}{\alpha_n}\right)^{\frac{1}{\sigma_n}}\right] \frac{\log \sigma_n}{\sigma_n}$$

*finit par surpasser un nombre supérieur à l'unité, ou bien par ne jamais surpasser l'unité.*

---

## Question 762.

(Voir *Mathesis*, (2), t. V, p. 80.)

***Si les axes de deux paraboles circonscrites à un triangle sont parallèles aux axes de l'ellipse de Steiner, ils se coupent au milieu du segment de droite, qui joint le point de Steiner au centre de l'hyperbole de Kiepert.***

(E. Cesáro.)

*Solution par* M. Sollertinsky. Evidemment, le quatrième point commun des paraboles considérées est le point de Steiner S. Or, on sait que les axes des paraboles circonscrites à un quadrangle inscriptible concourent au centre O des moyennes distances du quadrangle ; d'où

$$GO = \tfrac{1}{3} OS,$$

G désignant le centre de gravité du triangle ABC. Le centre ω de l'hyperbole de Kiepert étant le complémentaire de S(*), on a

$$\omega G = \tfrac{1}{2} GS = \tfrac{3}{5} OS.$$

Donc

$$\omega O = OS.$$

---

## QUESTIONS D'EXAMEN.

**583.** Discuter les racines de l'équation

$$x^2 - 2(m-1)x + m^2 - 4m + 3 = 0.$$

Le discriminant est $8(m-1)$. Pour $m = 1$, on a $x' = x'' = 0$. Pour $m > 1$, les racines sont réelles et inégales. Le produit $x'x''$ et la somme $x' + x''$ sont positifs pour $m > 3$ ; donc $x'$ et $x''$ sont positifs. Pour $m = 3$, une racine est nulle et l'autre égale à 4. Pour $m < 3$ et $> 1$, les racines sont de signes contraires ($x'x'' < 0$ et $x' + x'' > 0$).

---

(*) L'hyperbole de Kiepert passant par les points G, H, son centre est à l'intersection de l'ellipse maximum inscrite avec le cercle des neuf points.

**523.** Vérifier l'identité

$$\frac{\sin 3a + \cos 3a + \sin 5a + \cos 5a + \sin 7a + \cos 7a}{\cos 3a + \cos 5a + \cos 7a} = \frac{\sqrt{2}\sin(45° + a)}{\cos 5a}.$$

(*Journal de Vuibert.*)

**524.** Dans tout triangle ABC,

$$4R = a(\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}C + \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}A) + b(\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}C + \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}B) = \cdots,$$

$$4R - 2r = a\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}A + b\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}B + c\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}C,$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{a}(\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}B + \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}c) + \frac{1}{b}(\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}C + \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}A) + \frac{1}{c}(\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}A + \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}B).$$

(J. M. E., 1892.)

**525.** Résoudre l'équation

$$2\cos\frac{x}{3} - \sin\frac{x}{2} = 1.$$

Exprimer $\cos\frac{x}{3}$ et $\sin\frac{x}{2}$ en fonction de $\sin\frac{x}{6}$.

**526.** Décomposer en facteurs

$$(a-b)x^4 + 2(b-c)x^3 + 2ax^2 + 2(b-c)x + a + b.$$

---

## QUESTIONS PROPOSÉES.

**767.** Les milieux des cordes interceptées par la circonférence circonscrite à un triangle sur les axes de l'ellipse de Steiner sont séparés harmoniquement par le point de Steiner et par le complémentaire du point de Lemoine. (E. Cesàro.)

***768.** Soient D, E les projections du sommet A d'un triangle ABC sur le côté BC et sur la médiatrice ME de ce côté. Démontrer que la droite DE passe par le sommet $A_2$ du second triangle de Brocard et que

$$EA_2 = \frac{A\overline{B}^2 + A\overline{C}^2}{4AM}.$$

(Sollertinsky.)

***769.** Résoudre l'équation

$$(x-a)^5(x+a-2b) - (a-b)^5(a+b-2x) = 0.$$ (E. Gelin.)

***770.** Vérifier l'identité

$$\operatorname{tg}(a-b)\operatorname{tg}(c-d) + \operatorname{tg}(a-c)\operatorname{tg}(d-b) + \operatorname{tg}(a-d)\operatorname{tg}(b-c)$$
$$= \operatorname{tg}(a-b)\operatorname{tg}(a-c)\operatorname{tg}(a-d)\operatorname{tg}(b-c)\operatorname{tg}(c-d)\operatorname{tg}(d-b).$$

(J. Neuberg.)

## SUR L'ABERRATION DE COURBURE;

par M. Cl. Servais, professeur à l'Université de Gand.

1. M. Transon appelle déviation de la courbure en un point M d'une courbe, la tangente de l'angle $\delta$ que le diamètre commun aux coniques, qui ont en ce point un contact du troisième ordre avec la courbe, fait avec la normale(*). Si $\rho$ est le rayon de courbure de la courbe au point M, et $\rho'$ celui de sa developpée au centre de courbure correspondant, on a

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{1}{3}\frac{\rho'}{\rho}.$$

Nous nous proposons de donner une démonstration géométrique, simple et rigoureuse de cette formule. Soient M et M′ deux points infiniment voisins sur la courbe, C et C′ les centres de courbure correspondants; sur les prolongements de CM et C′M′, prenons respectivement deux points N et N′ tels que $MN = \frac{1}{2}CM$, et $M'N' = \frac{1}{2}C'M'$. La limite de la droite NN′ sera la directrice de la parabole osculatrice à la courbe au point M. Soit, sur M′N′, un point $N_1$ tel que $M'N_1 = MN$; on aura

$$\operatorname{tg}\delta = \lim \operatorname{tg} N_1NN' (**) = \lim \frac{N_1N'}{N_1N}.$$

Menons par le point N une parallèle à MM′, coupant M′N′ au point $N_2$; le rapport $NN_1 : NN_2$ ayant pour limite 1,

$$\operatorname{tg}\delta = \lim \frac{N_1N'}{NN_2} = \lim \frac{N_1N'}{MM'}\cdot\frac{MM'}{NN_2} = \lim \frac{N_1N'}{MM'}\cdot\frac{MD}{ND},$$

D étant le point d'intersection des deux droites MC et M′C′. Mais

$$N_1N' = \frac{1}{2}\Delta\rho, \quad MM' = \Delta s, \quad \lim\frac{MD}{ND} = \frac{2}{3};$$

donc

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{1}{3}\lim \frac{\dfrac{\Delta\rho}{\Delta\alpha}}{\dfrac{\Delta s}{\Delta\alpha}} = \frac{1}{3}\frac{\rho'}{\rho}. \qquad (1)$$

(*) *Liouville*, t. VI, 1841. Voir aussi Salmon-Chemin, *Courbes Planes*, p. 512, où le mot aberration est substitué au mot déviation.

(**) D'après la propriété fondamentale des courbes parallèles.

Dans le cas des coniques, l'angle $\delta$ est égal à l'angle formé par le diamètre et la normale. Une démonstration directe de la formule (1) met donc en évidence cette propriété curieuse des coniques, due à Maclaurin : *la parallèle à la tangente en un point* M *d'une conique, menée par le centre de courbure* C, *coupe le diamètre* OM *en un point* E, *tel que le segment* CE *est égal au tiers du rayon de courbure de la développée*(*).

2. *Soit* F *le foyer de la parabole inscrite au triangle* NMQ, *formé par la tangente, la normale et la directrice de la parabole osculatrice en un point d'une courbe, le point de contact sur la normale étant le centre de courbure* C *de la courbe : de* F, *on voit le rayon de courbure* $CC_1$ *de la développée sous un angle droit.*

En effet, les droites MM', NN', CC' partageant MC et M'C' en parties proportionnelles, ces cinq droites sont tangentes à une même parabole, et le foyer de cette parabole est situé sur le cercle circonscrit au triangle CC'D. A la limite, ce cercle a pour diamètre le rayon de courbure de la développée.

On déduit aisément de cette propriété une démonstration de la formule (1). Soit S le point où la tangente à la courbe touche la parabole ; on aura

$$\frac{\overline{MC}^2}{\rho'^2} = \frac{MF}{MC_1} = \frac{MS}{\rho'}, \quad \text{ou} \quad MS = \frac{\rho^2}{\rho'}.$$

Puisque

$$MC = \frac{2}{3}NC, \quad MS = \frac{2}{3}MQ;$$

donc

$$MQ = \frac{3}{2}\frac{\rho^2}{\rho'}, \quad \text{et} \quad \operatorname{tg}\delta = \frac{MN}{MQ} = \frac{1}{3}\frac{\rho'}{\rho}.$$

---

## *NOTE SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS DU TRIANGLE;

par M. E. Bertrand, élève de l'École normale des sciences.

Lemme I. Soit MN une corde passant par le foyer d'une conique. Les tangentes en M et N se coupent en un point P de la directrice, et sont rencontrées par les normales menées en N et M, en deux points

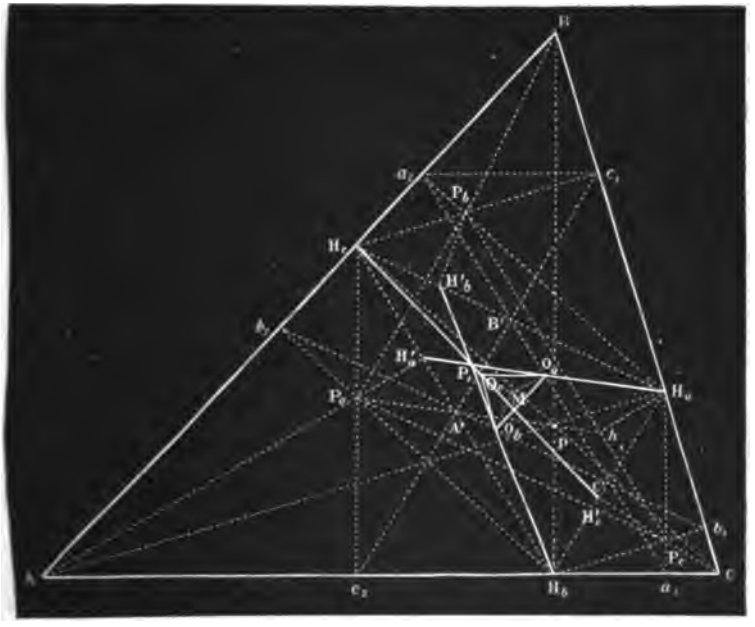
---

(*) Comparez *Mathesis*, (1), II, 51. (*Réd.*).

Q, R. On sait que PF est perpendiculaire à MN. Je dis que *la droite* QR *passe par le second foyer* F′ *et est perpendiculaire sur* PF′.

En effet, soit H le point de rencontre de RM et NQ ; c'est l'orthocentre du triangle PQR. Les normales et les tangentes en M et N étant les bissectrices des angles en M et N du triangle MNF′, QR et PH sont les bissectrices de l'angle MF′N ; donc QR et PH passent par F′ et sont rectangulaires.

Lemme II. *Tout hexagone inscrit dans une circonférence et dont les côtés opposés sont parallèles, a ses diagonales égales, et réciproquement. Le*



*centre de la circonférence circonscrite à l'hexagone est aussi le centre d'une circonférence touchant les trois diagonales.*

La démonstration de ce lemme est très-élémentaire.

Nous allons appliquer ces lemmes à l'étude de quelques propriétés du triangle.

Soient $AH_a$, $BH_b$, $CH_c$ les trois hauteurs d'un triangle ABC, que nous supposons acutangle et soit P leur point de concours. Soient aussi $AH'_a$, $BH'_b$, $CH'_c$ les hauteurs des triangles $AH_bH_c$, $BH_cH_a$, $CH_aH_b$,

et $P_a$, $P_b$, $P_c$ les orthocentres de ces triangles. D'après le lemme I, on peut faire passer par $H_a$, $H_c$ une ellipse qui touche BC, BA et a pour foyers $H'_b$, $H_b$(*). De même, il existe deux autres ellipses ayant pour foyers $H'_a$ et $H_a$, $H'_c$ et $H_c$ et touchant les côtés AB et AC en $H_c$ et $H_b$, ou CA et CB en $H_b$ et $H_a$. Appelons $\beta$, $\alpha$, $\gamma$ ces trois ellipses.

I. *Les axes focaux des ellipses* $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ *se coupent au centre du cercle inscrit au triangle* $P_aP_bP_c$ *et sont égaux entre eux.*

En effet, les triangles $H_aH_bH_c$, $P_aP_bP_c$ ont leurs côtés égaux et parallèles ($PH_aP_cH_b$, $PH_bP_aH_c$ étant des parallélogrammes, on a $H_aP_c = H_cP_a$ etc.); donc les droites $P_aH_a$, $P_bH_b$, $P_cH_c$ se coupent en un même point M(**). Soit $P_1$ le centre du cercle inscrit au triangle $P_aP_bP_c$; c'est l'homologue du point P considéré dans le triangle $H_aH_bH_c$; donc M est le milieu de la droite $PP_1$. Projetons $H_a$ en $h$ sur $P_bP_c$. Les droites $P_aH'_a$, $H_ah$ sont des lignes homologues des triangles $P_aP_bP_c$, $H_aH_bH_c$; donc elles sont égales et $P_ah$ est parallèle à $H_aH'_a$. Mais $P_a$ et P, $H'_a$ et $H_a$ sont des couples de points homologues des triangles semblables $AH_bH_c$, ABC; par suite, $AP_a : AH'_a = AP : AH_a$, et $P_aP$ est parallèle à $H'_aH_a$. Il en résulte que les points $P_a$, P, $h$ sont en ligne droite. Puisque $P_ah$ passe par P et que $P_ah$, $H'_aH_a$ sont des lignes homologues des triangles $P_aP_bP_c$, $H_aH_bH_c$, la ligne $H_aH'_a$ passe par $P_1$(***).

$H'_bH_a$ étant égal à $H_bH'_a$, on a

$$H_bH'_a + H'_aH_c + H_cH'_b = H'_aH_c + H_aH'_b + H'_bH_a;$$

donc les axes de $\beta$ et $\alpha$ sont égaux.

II. Projetons le pied de chaque hauteur sur les côtés ABC auxquels il n'appartient pas. Nous formons ainsi un hexagone inscriptible

---

(*) Considérons $H_aH_bH_c$ comme étant le triangle fondamental; soient $a'$, $b'$, $c'$, $2p'$ ses côtés et son périmètre. P, A, B, C sont les centres des cercles tritangents, et $H'_a$, $H'_b$, $H'_c$ sont les points de contacts intérieurs des trois derniers cercles. On sait que

$$H_bH'_a = p' - c', \quad H_cH'_a = p' - b' \quad \text{d'où} \quad H_aH_b + H_bH'_a = H_aH_c + H_cH'_a = p';$$

donc $H_a$ et $H'_a$ sont les foyers d'une ellipse $\alpha$ passant par $H_b$ et $H_c$ et tangente à AC, AB. L'axe focal est égal au demi-périmètre du triangle $H_aH_bH_c$; en fonction des éléments du triangle ABC, il s'exprime par $2R \sin A \sin B \sin C$. (J. N.)

(**) Comparer *Mathesis* (1), I, pp. 14, 91, 189. (J. N.)

(***) $P_1$ est le point de Nagel du triangle $H_aH_bH_c$ (Voir *Mathesis*, t. VII, p. 67). (J. N.)

$c_1b_1a_2c_2b_3a_3$ (*) dont les côtés opposés sont parallèles, dont les diagonales $a_2a_3$, $b_3b_1$, $c_1c_2$ passent par les milieux de deux côtés du triangle $H_aH_bH_c$ et sont égales au demi-périmètre de ce triangle ou à l'axe focal des ellipses $\alpha$, $\beta$, $\gamma$.

Soient $O_a$, $O_b$, $O_c$ les centres des ellipses $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ et soient A', B', C' les milieux des côtés du triangle $H_aH_bH_c$. Comme on a $A'b_3 = \frac{1}{2} H_bH_c$, $A'O_b = \frac{1}{2} H_aH_b'$, $O_bb_3$ est égal au demi-axe focal de $\beta$; donc $O_b$ est le milieu de $b_1b_3$. De plus, à cause de $A'O_b = \frac{1}{2} H_cH_b'$. $O_b$ est le point de contact A'C' avec le cercle inscrit au triangle A'B'C'. Le centre de ce cercle est le point M, qui est aussi le centre du cercle $c_1b_1a_2c_2b_3a_3$.

Ainsi, *les centres des ellipses* $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ *sont les points de contact des côtés du triangle* A'B'C' *avec le cercle inscrit.*

III. Les droites $a_3c_1$ et $a_2c_2$ étant parallèles, la droite $O_aO_c$ qui joint les milieux de $a_2a_3$ et $c_1c_2$ est parallèle à AC et égale à $\frac{1}{2}(a_2c_2 - a_3c_1)$; or

$$a_2c_2 = H_aH_c \cos(C - A) = b \cos B \cos(C - A),$$

$$a_3c_1 = H_aH_c \cos B = b \cos^2 B;$$

donc

$$O_aO_c = b \cos B \cos C \cos A.$$

Ainsi, *les triangles* $O_aO_bO_c$, ABC *sont homothétiques et le rapport de similitude est égal à* $\cos A \cos B \cos C$.

La distance des droites $O_aO_c$, AC est égale à

$$O_aa_2 \sin O_aa_2 A = \frac{1}{2} a_2a_3 \sin B = \frac{1}{2} b \sin A \sin B \sin C.$$

Par suite, les distances du centre d'homothétie des triangles $O_aO_bO_c$, ABC aux côtés de l'un de ces triangles, qui sont entre elles comme les distances des côtés homologues de ces triangles, sont proportionnelles à $a$, $b$, $c$; donc *les triangles* $O_aO_bO_c$, ABC *ont même point de Lemoine.*

Note. Cet article intéressant appelle l'attention des géomètres sur de nouvelles coniques remarquables du plan d'un triangle. Il resterait encore à résoudre plusieurs questions relatives à ce sujet : équations de ces courbes, longueurs des seconds axes, intersections de ces coniques, relations entre les triangles ABC, $H_aH_bH_c$ et le triangle des directrices

(*) Le cercle circonscrit à cet hexagone est le cercle de Taylor du triangle ABC; voir *Mathesis*, t. 1, *loc. cit.*; ou Catalan, *Théorèmes et Problèmes de Géométrie élémentaire*, 7e éd., p. 132; Casey, *Géométrie récente*, p. 21 (*Mathesis*, t. IX). (J. N.)

correspondant aux foyers $H'_a$, $H'_b$, $H'_c$. Lorsqu'on prend $H_aH_bH_c$ pour triangle de référence, on peut distinguer quatre groupes de trois coniques, etc. Nous insérerions avec plaisir les communications que nos honorables correspondants nous adresseraient sur ces courbes. (J. N.)

---

## ×QUESTIONS D'ARITHMOLOGIE.

(Voir *Mathesis*, (1), X, p. 139.)

**90.** La cinquième puissance d'un nombre entier est de l'une des formes $25m$, $25m \pm 1$, $25m \pm 7$.

Développer $(5a)^5$, $(5a \pm 1)^5$, $(5a \pm 2)^5$.

**91.** Le produit de trois entiers consécutifs n'est jamais un carré.

L'équation $(a-1)\,a\,(a+1) = x^2$ exige que $a$ et $a^2-1$ soient carrés parfaits. Or $a^2-1$ n'est un carré que si $a = 1$.

**92.** Trouver trois carrés parfaits qui soient en progression arithmétique.

L'équation $x^2 - y^2 = y^2 - z^2$ peut être écrite ainsi :

$$\frac{x-y}{y-z} = \frac{y+z}{x+y}, \quad \text{ou} \quad \alpha(x-y) = \beta(y+z), \quad \alpha(y-z) = \beta(x+y)$$

$\alpha$ et $\beta$ étant deux indéterminées. En résolvant par rapport à $x$ et $y$ et en égalant au dénominateur commun des inconnues, on trouve

$$x = \alpha^2 + 2\alpha\beta - \beta^2, \quad y = \alpha^2 + \beta^2, \quad z = \alpha^2 - 2\alpha\beta - \beta^2.$$

**93.** Le produit de quatre nombres entiers consécutifs n'est jamais un carré.

En effet,

$$\{n(n+3)\}\{(n+1)(n+2)\} = (n^2+3n)(n^2+3n+2) = (n^2+3n)^2 + 2(n^2+3n)$$
$$= (n^2+3n+1)^2 - 1.$$

(Comparer *Mathesis*, t. VI, pp. 60 et 101.)

Si l'on remplace $n$ par $\frac{n}{r}$ on obtient l'identité

$$n(n+r)(n+2r)(n+3r) + r^4 = (n^2+3nr+r^2)^2. \qquad (A)$$

Donc le *produit de quatre nombres en progression arithmétique, augmenté de la quatrième puissance de la raison, est un carré.* (DE ROCQUIGNY.)

Le produit $n(n+r)(n+2r)(n+3r)$ est plus petit que $(n^2+3nr+r^2)^2$; donc

s'il est plus grand que $(n^2+3nr+r^2-1)^2$, il n'est pas carré parfait. La dernière condition, si l'on tient compte de l'identité (A), se traduit par l'inégalité

$$n^3+3nr-\tfrac{1}{2}(r^2-1)^2>0,$$

qui est vérifiée quand

$$n>\tfrac{1}{2}[-3r+\sqrt{9r^2+2(r^2-1)^2}].$$

En particulier, *le produit de quatre nombres impairs consécutifs ne peut être un carré.*

**94.** La moyenne harmonique de plusieurs nombres positifs est plus petite que leur moyenne arithmétique.

On sait que

$$\frac{1}{n}(a_1+a_2+\cdots+a_n)>\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n};$$

d'où, en changeant $a_1$, $a_2$, ... en $\frac{1}{a_1}$, $\frac{1}{a_2}$, ...

$$\frac{1}{n}\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots\right)>\sqrt[n]{(a_1a_2\ldots)^{-1}}.$$

Multipliant ces inégalités l'une par l'autre on trouve

$$m_a\times\frac{1}{m_h}>1;$$

$m_a$, $m_h$, $m_g$ désignant la moyenne arithmétique, la moyenne harmonique et la moyenne géométrique.

*Autrement.* (D'après Laisant, N. A. M., 1879, p. 330). On a

$$m_a=\frac{1}{n}\mathrm{S}a_i,\quad \frac{1}{m_h}=\frac{1}{n}\mathrm{S}\frac{1}{a_i};$$

d'où

$$\frac{m_a}{m_h}=\frac{1}{n^2}\left[n+\mathrm{S}\left(\frac{a_i}{a_k}+\frac{a_k}{a_i}\right)\right].$$

Or les sommes de la forme $\frac{a_i}{a_k}+\frac{a_k}{a_i}$, au nombre de $\frac{1}{2}(n^2-n)$ sont chacune plus grandes que 2, etc.

**95.** Trouver deux carrés ayant pour différence un cube donné.

La solution la plus simple de l'équation $x^2-y^2=n^3$ s'obtient en résolvant le système $x-y=n$, $x+y=n^2$; on en déduit que la différence des carrés de deux triangulaires consécutifs est un cube.

**96.** Décomposer un nombre triangulaire en quatre nombres triangulaires dont trois soient égaux entre eux.

On a

$$\frac{2n(2n+1)}{2}=\frac{3n(n\pm1)}{2}+\frac{n(n\mp1)}{2}.$$

On rend la proposition intuitive en décomposant un triangle de boulets en quatre autres au moyen des droites joignant les milieux des côtés.

**97.** Vérifier l'identité

$$3a^2(a^2-b^2)^2+(3a^2b)^2=(a^2+ab)^3+(a^2-ab)^3+(a^2-b^2)^3+b^6.$$

Elle donne une infinité de solutions de l'équation indéterminée

$$3x^2+y^2=u^3+v^3+w^3+t^3. \quad \text{(DE ROCQUIGNY.)}$$

**98.** Mettre les expressions

$$3n^4+6n^3+1, \quad 4(n^2+1)(n^2+2), \quad (2n^2+3)^2$$

respectivement sous la forme d'une somme de 3, 4, 5 carrés.

Réponse : $(n^2-2n)^2+(n^2-1)^2+(n^2+2n)^2$,

$(n^2+n+2)^2+(n^2-n+2)^2+(n^2-n)^2+(n^2-n)^2$,

$(n^2+3n)^2+(n^2-3n)^2+2(n^2-n-2)^2+1$. (DE ROCQUIGNY.)

**99.** Si dans l'identité

$$(a^2+\lambda b^2)(a'^2+\lambda b'^2)=(aa'+\lambda bb')^2+\lambda(ab'-a'b)^2$$

on remplace $\lambda$ par $c^2+d^2$, on a une solution de l'équation

$$(x^2+y^2+z^2)(x'^2+y'^2+z'^2)=u^2+v^2+w^2. \quad \text{(DE ROCQUIGNY.)}$$

**100.** Vérifier l'identité

$$(a+b+c)^4=(a^2+b^2+c^2)^2+4(ab+bc+ca)^2 \\ +4(a^2+b^2+c^2)(ab+bc+ca).$$

Si $ab+bc+ca$ est un carré, le bicarré $(a+b+c)^4$ est mis sous la forme d'une somme de cinq carrés.

La condition $ab+bc+ca=u^2$ étant mise sous la forme $(a+b)(a+c)=u^2+a^2$, posons

$$u^2+a^2=(x^2+y^2)(x_1^2+y_1^2);$$

nous aurons les valeurs de $u$, $a$, $b$, $c$ en fonction des indéterminées $x$, $y$. $x_1$, $y_1$ :

$$u=xy_1-x_1y, \quad a=xx_1+yy_1, \quad b=x^2+y^2-xx_1-yy_1, \\ c=x_1^2+y_1^2-xx_1-yy_1. \quad \text{(DE ROCQUIGNY.)}$$

---

## NOTES MATHÉMATIQUES.

**5.** ***Léopold Kronecker.*** Léopold Kronecker est né à Liegnitz (Silésie) le 7 décembre 1823 et a eu comme professeur au gymnase de cette ville, Ernest Edouard Kummer qui devait s'illustrer plus tard dans le domaine de l'arithmétique supérieure. Kronecker présenta, le 20 juin 1853, son premier travail à l'Académie de Berlin; il fut nommé membre

de cette Académie en 1861 et fit dès lors comme tel un cours à l'université pendant le semestre d'hiver et parfois pendant celui d'été. Ce n'est qu'à partir de 1883 qu'il devint professeur en titre. Il perdit la compagne de sa vie pendant l'été de 1891 et mourut lui-même la même année le 29 décembre.

(E. LAMPE, *Naturwissenschaftliche Rundschau*, 5 mars 1892).

×6. *Problème de géométrie.* — On trouve dans l'ouvrage de M. CATALAN : *Théorèmes et problèmes de Géométrie élémentaire* (Livre VIII, prob. XIII, 6e éd., p. 443-444) la question suivante :

*Mener parallèlement à la base d'un triangle une droite telle, qu'en faisant tourner le triangle autour de sa base, les volumes engendrés par les deux parties de la figure soient équivalents.*

La solution à laquelle arrive l'auteur dépend d'une équation du troisième degré; il nous a paru intéressant de faire connaître la suivante qui ne sort pas des éléments.

Soient : $h$ la hauteur du triangle donné et S sa surface; $x$ la hauteur du petit triangle et $s$ sa surface; $y$ la hauteur du trapèze. On a comme première équation

$$x + y = h. \tag{1}$$

La seconde équation s'obtient aisément en exprimant que le volume engendré par le petit triangle est la moitié du volume engendré par le grand. Ces volumes ont respectivement pour expressions

$$s.2\pi\left(y + \frac{x}{3}\right) \quad \text{et} \quad S.2\pi\frac{h}{3};$$

en égalant la première valeur à la moitié de la seconde, on obtient la seconde équation du problème

$$y + \frac{x}{3} = \frac{1}{2}\cdot\frac{S}{s}\cdot\frac{h}{3},$$

laquelle peut s'écrire, en remplaçant le rapport $(S : s)$ par son égal $(h^2 : x^2)$ et faisant disparaître les dénominateurs,

$$6yx^2 + 2x^3 = h^3. \tag{2}$$

Il reste à résoudre les équations (1) et (2). En les retranchant membre à membre après avoir élevé au cube les deux membres de la première, il vient la suivante :

$$(y - x)(y^2 + 4xy + x^2) = 0, \tag{3}$$

qui n'est possible que pour $y - x = 0$, ou

$$x = y = \frac{h}{2}; \tag{4}$$

ce qui indique que la parallèle à la base du triangle doit partager la hauteur correspondante en deux parties égales.

On peut traiter de la même manière la question suivante : *Mener parallèlement à la base* BC *d'un triangle* ABC *une droite* B'C' *qui coupe les côtés* BA, CA, *prolongés au delà de* A, *en des points tels qu'en faisant tourner toute la figure autour de la base* BC, *les deux triangles* ABC, AB'C' *opposés par le sommet engendrent des volumes égaux.*

On parvient aisément aux deux équations

$$y - x = h, \quad 3yx^2 - x^3 = h^3,$$

desquelles on tire $y = 3x$ et, partant,

$$x = \frac{h}{2}. \qquad \text{(J. M.)}$$

---

## BIBLIOGRAPHIE.

*Problèmes de géométrie analytique* par E. MOSNAT, agrégé des sciences mathématiques, professeur au Lycée de Toulon. Tome second (Géométrie à deux dimensions) à l'usage des candidats à l'Ecole polytechnique, à l'École normale et à l'agrégation. Paris, Nony et Cie. Un volume in-8°, de VIII-419 p. Prix : 5 francs.

Nous avons recommandé à nos lecteurs le t. I du Recueil de M. E. Mosnat. Le t. II se distingue par les mêmes qualités. Chaque chapitre est précédé d'un bon résumé des notions théoriques qui s'y rapportent et contient les solutions d'un grand nombre de questions proposées aux examens d'admission aux écoles spéciales (école polytechnique, école normale. etc.), à l'Agrégation, aux Concours pour les bourses, etc. Ces questions sont, en général, d'un caractère plus difficile que celles du t. I : elles exigent parfois des notions d'algèbre dépassant le second degré et conduisent à des courbes d'un ordre supérieur. Quoi qu'il en soit, les élèves de première scientifique des établissements belges et ceux de la candidature en sciences physiques et mathématiques ou des écoles spéciales pourront tirer grand profit de l'ouvrage de M. Mosnat.

Voici la table des matières, avec l'indication des nombres des questions résolues ou proposées : I. Ligne droite, 6-36; II. Cercle, 7-48; III. Lieux géométriques, 6-36; IV. Des coniques en général, 6-40; V. Tangentes, 10-53; VI. Normales, 11-47; VII. Asymptotes, 9-40; VIII. Centre, 4-27; IX. Diamètres, 6-38; X. Axes et sommets, 6-30; XI. Foyers, 8-60; XII. Intersections de deux coniques, 4-31;

XIII. Enveloppes, 4-49; XIV. Coordonnées trilinéaires, 7-40; XV. Coordonnées polaires, 6-25.

L'exécution typographique est fort soignée; toutes les courbes figurant dans le recueil ont été dessinées exactement par M. Messent. (J. N.)

---

*Cours de Mécanique de l'Université de Gand*, par M. MASSAU; 1er fascicule : Géométrie symbolique, statique, cinématique, 3e édition, revue et augmentée. 365 p., Petit in-folio, autographié. — Gand, Lobel, 1891 (A Paris, chez Gauthier-Villars et fils). Prix 10 francs(*).

*Les Leçons de Mécanique* dont M. Massau publie la troisième édition sont claires et intéressantes; elles se distinguent des ouvrages analogues par un emploi judicieux de ce que l'auteur appelle la *Géométrie symbolique;* il serait peut être plus clair de dire *Géométrie des segments* de droite ou des vecteurs. Quoi qu'il en soit, le mode d'exposition adopté par M. Massau met très bien en évidence l'identité des démonstrations à apparence analytique ou à apparence géométrique; il n'y a, au fond, qu'une différence d'écriture; il va sans dire que les élèves doivent s'habituer à lire couramment, en quelque sorte, les deux modes d'écriture, quitte à avoir leurs préférences personnelles qui, le plus souvent, ne sont qu'une affaire d'habitude. A ce point de vue, M. Massau sera pour eux un excellent guide.

Nous indiquerons rapidement dans ce qui suit l'ordre qu'il a adopté.

Les deux premiers Chapitres se rapportent à la *Géométrie symbolique;* dans le premier, on s'occupe des opérations finies les plus simples sur les segments de droite : définitions, addition de deux ou plusieurs segments, multiplication d'un segment par un nombre, équations géométriques, projections, produit partiel (ou intérieur) de deux segments, moment d'un segment par rapport à une droite ou un point, couples, tétraèdres, etc. Le second Chapitre se rapporte aux opérations infinitésimales effectuées sur un segment de droite qui dépend d'une variable numérique. On y remarquera, en particulier, la façon dont l'auteur présente les règles principales de la Géométrie infinitésimale et l'usage qu'il fait de ce qu'il appelle *les limites relatives*. On trouvera dans ce Chapitre les notions relatives aux dérivées et différentielles géométriques, la formule de Taylor pour un segment qui dépend d'une variable, ainsi que la notion d'intégrale géométrique. Dans le Chapitre qui suit sont exposées les *Notions générales de Mécanique*. On y définit la vitesse et l'accélération. L'auteur a rejeté toute discussion métaphysique sur la mesure du temps et la nature des forces; il se borne à énoncer et à préciser le sens de la loi de l'inertie et du principe de l'indépendance des effets des forces, pour en tirer l'équation fondamentale de la Mécanique

$$F = m\,\overline{J}.$$

M. Massau insiste avec soin sur la mesure numérique des quantités qui figurent dans l'équation fondamentale, et sur les précautions qu'il faut prendre quand on change d'unités.

---

(*) Extrait du *Bulletin des Sciences mathématiques*, 1892, (2), XVI, 141-143.

Ces trois premiers Chapitres constituent, en quelque sorte, une introduction, les deux premiers contenant, en quelque sorte, la partie géométrique commune à la Statique et à la Cinématique, partie qu'il y a évidemment avantage à séparer de l'une ou de l'autre de ces deux sciences ; l'auteur aurait même pu aller un peu plus loin dans cette voie et faire rentrer dans cette introduction la théorie de la composition des segments qu'il expose dans la statique, d'ailleurs de la façon la plus simple (statique du point et statique des solides invariables). Le parallélogramme des forces, au point de vue où se place l'auteur, est une conséquence du principe de l'indépendance des effets des forces.

M. Massau passe ensuite à la statique des systèmes composés : groupes de solides, polygones funiculaires, systèmes articulés, courbes funiculaires, etc. Deux Chapitres sont consacrés au principe des vitesses virtuelles ; l'un contient une exposition théorique, l'autre l'application à l'équilibre de quelques machines simples ; on reconnaît là, ainsi qu'à quelques exemples pratiques placés ça et là dans les autres Chapitres de la statique, que l'auteur n'est pas seulement un géomètre. La recherche des centres de gravité, des notions élémentaires relatives à la théorie de l'attraction, la discussion de quelques problèmes simples donnés à titre d'exemple, terminent la statique.

La Cinématique débute par l'étude du mouvement d'un point matériel ; notions complémentaires sur la vitesse et l'accélération : formules relatives aux coordonnées polaires, etc. ; l'auteur donne même quelques indications sur le cas des mouvements relatifs, quoique la composition des accélérations ne puisse pas être traitée, à ce moment, d'une façon complète.

Passant ensuite au mouvement d'un corps solide, il développe d'abord les propositions relatives aux vitesses à un moment donné, puis celles qui concernent un déplacement fini, enfin les plus importantes parmi celles qui se rapportent aux accélérations ; il convient de signaler la façon dont l'auteur a insisté sur le cas d'une surface solide qui roule et glisse sur une surface fixe. Un Chapitre spécial est consacré aux mouvements relatifs. La partie la plus originale du Cours de M. Massau est peut-être le Chapitre intitulé : *Cinématique des systèmes déformables*, et, en particulier, l'étude approfondie qu'il fait à ce propos de ce qu'il appelle la *fonction linéaire*, c'est-à-dire de l'opération qui consiste à substituer à un point un autre point dont les coordonnées sont des fonctions linéaires des coordonnées du premier : cette étude est faite d'une façon élégante au moyen des formules symboliques très simples. Un dernier Chapitre, intitulé : *Applications diverses*, comporte des sujets un peu hétérogènes : c'est d'abord la méthode de Roberval et la construction de Savary ; puis les transformations que la Cinématique permet de faire subir, dans le cas d'un corps solide, à l'équation qui exprime le principe des vitesses virtuelles, la réciprocité du travail virtuel, la notion des axes indépendants et dépendants, ces derniers étant tels qu'ils puissent servir de lignes d'action à des forces en équilibre, et enfin quelques indications intéressantes sur le rôle que jouent, en Statique ou en Cinématique, les complexes et les congruences linéaires.

(J. T.)

## SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

### Question 356.

(Voir *Mathesis*, (1), VI, p. 159, et IX, p. 72.)

***Soit*** $S_{n,p}$ ***la somme des produits*** $p$ ***à*** $p$ ***des*** $n$ ***premiers nombres entiers. Démontrer la relation***

$$\sum_{i=0}^{i=p} C_{n+1,\alpha+i}\, S_{\alpha+i-1,i}\, S_{n-\alpha-i,p-i} = C_{n-p+1,\alpha}\, S_{n,p}.$$ (E. Cesàro.)

***Solution*** (*) ***par*** M. Baudran, ***élève du lycée de Rouen.*** 1° Lemme. On a

$$C_{a+b,q} = \Sigma_\mu C_{a,q-\mu} C_{b,\mu},$$

$\mu$ recevant les valeurs 0, 1, 2, ..., $q$, avec la convention $C_{m,0} = 1$, $C_{m,m+n} = 0$.

Pour démontrer cette égalité, il suffit d'identifier les coefficients de $x^\mu$ dans le développement de $(1+x)^a$, $(1+x)^b$. On peut aussi partager les combinaisons de $a$ lettres françaises et $b$ lettres grecques en groupes constitués par les combinaisons renfermant respectivement 0, 1, 2, .., $q$ lettres grecques.

Soit $m_n$ le nombre des arrangements de $m$ lettres prises $n$ à $n$, c'est-à-dire $m_n = m(m-1)\dots(m-n+1)$. La formule (1) se transforme aisément en celle-ci :

$$(a+b)_q = a_q + C_{q,1} a_{q-1} b_1 + C_{q,2} a_{q-2} b_2 + \dots + b_q, \qquad (2)$$

qui est identique avec le *binôme des factorielles* de Vandermonde et qu'on peut démontrer aussi par la considération des arrangements de $a$ lettres françaises et $b$ lettres grecques.

2° Pour démontrer la question 356, on n'a qu'à égaler les coefficients de $a^\alpha b^\beta$ dans les deux membres de (2).

Remplaçons, pour plus de facilité, $q$ par $n+1$; nous aurons

$$(a+b)_{n+1} = a_{n+1} + C_{n+1,1} a_n b_1 + C_{n+1,2} a_{n-1} b_2 + \dots \qquad (3)$$

On trouve aisément

$$(a+b)_{n+1} = (a+b)(a+b-1)(a+b-2)\dots(a+b-n)$$
$$= (a+b)^{n+1} - S_{n,1}(a+b)^n + S_{n,2}(a+b)^{n-1} \dots$$

---

(*) Nous modifions un peu la rédaction de l'auteur, tout en respectant le fond. Les changements nous ont été inspirés par la *Théorie des nombres*, par Ed Lucas.

M Baudran ajoute à sa solution quelques développements intéressants sur les nombres $S_{n,p}$. (J. N.)

Le terme général est

$$(-1)^p S_{n,p} (a+b)^{n-p+1},$$

et son développement admet le terme

$$(-1)^p C_{n-p+1,\alpha} S_{n,p} a^\alpha b^{n-p+1-\alpha},$$

qui est le seul en $a^\alpha b^{n-p+1-\alpha}$ dans $(a+b)_{n+1}$.

Dans le second membre de (3), les termes en $a^\alpha$ se rencontrent dans la partie

$$a_{n+1} + C_{n+1,1} a_n b_1 + \cdots + C_{n+1,\alpha} a_\alpha b_{n+1-\alpha},$$

que nous représentons par

$$\Sigma C_{n+1,\alpha+i} a_{\alpha+i} b_{n+1-\alpha-i}, \tag{4}$$

$i$ recevant les valeurs 0, 1, 2, ..., $n+1-\alpha$. Pour que le développement de $b_{n+1-\alpha-i}$ donne un terme en $b^{n-p+1-\alpha}$, il faut supposer $n+1-\alpha-i \geqq n-p+1-\alpha$ ou $i \leqq p$. Donc les termes en $a^\alpha b^{n-p+1-\alpha}$ sont donnés par la somme (4), $i$ ayant les valeurs 0, 1, 2, ... $p$. Le terme en $a^\alpha$ de $a_{\alpha+i}$ est

$$(-1)^i S_{\alpha+i-1,i} a^\alpha;$$

le terme en $b^{n-p+1-\alpha}$ de $b_{n+1-\alpha-i}$ est

$$(-1)^{p-i} S_{n-\alpha-i} b^{n-p+1-\alpha}.$$

Par conséquent, le coefficient de $a^\alpha b^{n-p+1-\alpha}$ dans le second membre de (3) est

$$\Sigma (-1)^p C_{n+1,\alpha+i} S_{\alpha+i-1,i} S_{n-\alpha-i,p-i}.$$

Le théorème de M. Cesáro est donc démontré.

*Propriétés des nombres* $S_{n,p}$. 1°. On a la relation

$$S_{n,p} = n S_{n-1,p-1} + S_{n-1,p}. \tag{5}$$

En effet, parmi les termes composant $S_{n,p}$ ceux qui contiennent le facteur $n$ ont pour somme $n S_{n-1,p-1}$; les autres, $S_{n-1,p}$.

Comme

$$S_{n,1} = S_{n-1,1} + n,$$

la formule (5) est applicable à $p = 1$, pourvu que l'on donne à $S_{m,0}$ la valeur 1.

La formule (5) subsiste aussi pour $p = 0$, si l'on suppose $S_{n,m} = 0$ pour des valeurs négatives de $m$.

Enfin, nous conviendrons de prendre $S_{n,m} = 0$ pour $m > n$.

2° La formule de M. Cesáro, pour $\alpha = 1$, donne

$$(n-p+1) S_{n,p} = \Sigma \frac{(n+1)\, n\, (n-1) \cdots (n-i+1)}{(i+1)!} i!\, S_{n-1-i,p-i},$$

ce qui revient à

$$(n-p+1)\,S_{n,p} =$$
$$(n+1)S_{n-1,p}+\frac{(n+1)n}{2}S_{n-2,p-1}+\cdots+\frac{(n+1)n\cdots(n-p+1)}{p+1}S_{n-p-1,0}.$$

Mais d'après la relation (5),

$$(n+1)\,S_{n,p} = (n+1)n\,S_{n-1,p-1}+(n+1)\,S_{n-1,p}.$$

Soustrayons cette égalité de la précédente; nous aurons

$$p\,S_{n,p} = n\,(n+1)\,S_{n-1,p-1}$$
$$-\left[\frac{(n+1)n}{2}S_{n-2,p-1}+\cdots+\frac{(n+1)\,n\cdots(n-p+1)}{p+1}\right].$$

3° Supposons $p=2$; il vient

$$2\,S_{n,2} = n\,(n+1)\,S_{n-1,1}-\frac{(n+1)n}{2}S_{n-2,1}-\frac{(n+1)n\,(n-1)}{3},$$

$$=n\,(n+1)\left[\frac{(n-1)n}{2}-\frac{(n-2)(n-1)}{4}-\frac{n-1}{3}\right]=\frac{n\,(n^2-1)(3n-2)}{12}.$$

Connaissant $S_{n,2}$ on peut calculer $S_{n,3}$, puis $S_{n,4}$ et ainsi de suite.

4° De la formule (5), on déduit facilement

$$S_{n,2} = nS_{n-1,1}+(n-1)\,S_{n-2,1}+(n-2)\,S_{n-3,1}+\cdots+2S_{1,1}$$
$$=\frac{n^2\,(n-1)}{2}+\frac{(n-1)^2\,(n-2)}{2}+\cdots+\frac{2^2.1}{2}.$$

Il en résulte

$$1.2^2+2.3^2+\cdots+(n-1)\,n^2=\frac{n\,(n^2-1)\,(3n-2)}{12},$$

égalité connue.

5° Considérons le produit

$$(x+1)\,(x+2)\ldots(x+n)=x^n+x^{n-1}\,S_{n,1}+\cdots+x^{n-p}\,S_{n,p}+\cdots+S_{n,n}.$$

Si nous remplaçons $x$ par 1, il vient

$$1+S_{n,1}+\cdots+S_{n,p}+\cdots+S_{n,n}=(n+1)!$$

La substitution $x=-1$ donne

$$1-S_{n,1}+S_{n,2}-\cdots+(-1)^n\,S_{n,n}=0.$$

6° Si, dans la formule (3), nous prenons tous les termes de degré $n-p+1$ en $a$ et $b$, nous aurons

$$(a+b)^{n-p+1}\,S_{n,p}=\sum_{\alpha=0}^{\alpha=n-p+1}\ \sum_{i=p}^{i=p} C_{n+1,\alpha+i}\,S_{\alpha+i-1,i}\,S_{n-\alpha-i,p-i}\,a^{\alpha}b^{n+1-p-\alpha}.$$

Pour $a = b$, cette formule devient

$$2^{n-p+1} S_{n,p} = \sum_{\alpha=0}^{\alpha=n-p+1} \sum_{i=0}^{i=p} C_{n+1,\alpha+i} S_{\alpha+i-1,i} S_{n-\alpha-i,p-i}.$$

ou simplement

$$2^{n-p+1} = \sum_{\alpha=0}^{\alpha=n-p+1} C_{n-p+1,\alpha},$$

résultat connu.

On peut de même retrouver d'autres formules connues, en faisant certaines hypothèses sur $\alpha$, $p$ et $i$.

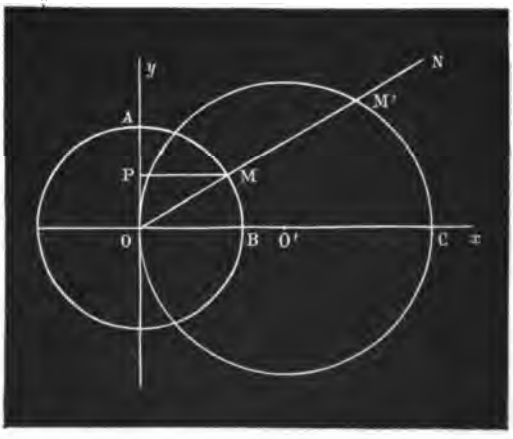
---

## Question 730.

(Voir *Mathesis*, (2), t. I, p. 176.)

***Étant donnée une circonférence*** O, ***on prolonge un rayon quelconque*** OM ***de la longueur*** MN $= n$. MP, ***où*** MP ***est la perpendiculaire abaissée de*** M ***sur un diamètre fixe*** AA′. ***Démontrer que le lieu de*** N ***est un limaçon de Pascal***; 2° ***trouver l'aire de la courbe***; 3° ***trouver l'arc de la courbe dans le cas de*** $n = 1$. (KEELHOFF.)

*Solution par* M. BELLENS, instituteur à Anvers. 1° Prenons pour pôle O, pour axe polaire OB perpendiculaire à OA. Comme




$$MP = OM \cos MOB,$$

l'équation du lieu de N est

$$\rho = a + na \cos \omega. \quad (1)$$

Ce lieu est donc un limaçon de Pascal : Portons sur OB la longueur OC $= n$. OB; décrivons sur OC comme diamètre une circonférence et prolongeons la corde OM′ de ce cercle de la longueur M′N = OM : N sera un point de la courbe proposée.

2° Soit $\varpi$ l'aire du secteur compris entre deux rayons vecteurs. On a

$$\varpi = \frac{1}{2}\int_{\omega_1}^{\omega_2} \rho^2 d\omega = \frac{a^2}{2}\int\left(1 + 2n\cos\omega + n^2\frac{1+\cos 2\omega}{2}\right)d\omega$$

$$= \frac{a^2}{2}\left[\omega + 2n\sin\omega + \frac{n^2}{2}\omega + \frac{n^2}{4}\sin 2\omega\right]_{\omega_1}^{\omega_2}.$$

Si $n > 1$ (*) (limaçon crunodal), la courbe a un point double en O; la partie extérieure au cercle O′ et située au-dessus de O$x$ s'obtient en faisant varier, dans l'équation (1), $\omega$ de O à $\alpha$, $\alpha$ désignant l'angle compris entre 90° et 180° qui a pour cosinus $-\frac{1}{n}$. On en conclut que l'aire comprise entre la partie de la courbe qui est extérieure au cercle O′, a pour expression

$$\varpi = a^2\left[\omega + 2n\sin\omega + \frac{n^2}{2}\omega + \frac{n^2}{4}\sin 2\omega\right]_0^{\alpha}$$

$$= a^2\left[\alpha\left(1 + \frac{n^2}{2}\right) + 2n\sin\alpha + \frac{n^2}{4}\sin 2\alpha\right].$$

La partie du limaçon qui est intérieure au cercle O′ limite une aire

$$\varpi_1 = a^2\left[\omega + 2n\sin\omega + \frac{n^2}{2}\omega + \frac{n^2}{4}\sin 2\omega\right]_{\alpha}^{\pi}$$

$$= a^2\left[(\pi - \alpha)\left(1 + \frac{n^2}{2}\right) - 2n\sin\alpha - \frac{n^2}{4}\sin 2\alpha\right].$$

L'aire comprise entre les deux parties du limaçon a pour expression $\varpi - \varpi_1$.

Soit $n < 1$ (limaçon acnodal); la courbe est entièrement située en dehors du cercle O′ et enferme une aire donnée par

$$a^2\left[\omega + 2n\sin\omega + \frac{n^2}{2}\omega + \frac{n^2}{4}\sin 2\omega\right]_0^{\pi} = a^2\pi\left(1 + \frac{n^2}{2}\right).$$

L'hypothèse de $n = 1$ donne la cardioïde, qui a un point de rebroussement en O; l'aire totale s'obtient en intégrant entre O et $\pi$ et doublant le résultat. Donc $\varpi = \frac{3\pi a^2}{2}$.

---

(*) Nous complétons ici la solution. (J. N.)

3° L'arc $s$ de la courbe est donné par

$$s = \int_{\omega_1}^{\omega_2} \sqrt{d\rho^2 + \rho^2 d\omega^2} = a \int_{\omega_1}^{\omega_2} \sqrt{1 + n^2 + 2n\cos\omega}\, d\omega.$$

Pour $n = 1$,

$$s = a \int_{\omega_1}^{\omega_2} \sqrt{2(1+\cos\omega)}\, d\omega = 2a \int_{\omega_1}^{\omega_2} \cos\frac{1}{2}\omega\, d\omega = 4a \left[\sin\frac{1}{2}\omega\right]_{\omega_1}^{\omega_2}.$$

Pour avoir l'arc total, nous intégrons entre O et $\pi$ et nous doublons le résultat; cet arc est donc égal à $4a$.

Ont résolu la même question MM. JOACHIMESCU, CRISTESCO, VLADIMIRESCU et GREENSTREET.

---

## Question 741.

(Voir *Mathesis*, (2), I, p. 240.)

*En un point quelconque* M$(x, y, z)$ *de la surface ayant pour équation* $F(x, y, z) = 0$ *on mène le plan tangent, qui coupe les axes* Ox, Oy, Oz, *aux points* A, B, C. *On construit le parallélipipède ayant pour arêtes* OA, OB, OC; *soit* M′ *le sommet opposé à* O. *Trouver le plan tangent au point* M′ *de la surface engendrée par ce point lorsque* M *se déplace sur la surface donnée.* (J. NEUBERG.)

*Solution d'après* M. ABSOLONNE. Nous désignons les dérivées partielles de $F(x, y, z)$ par $F_1, F_2, F_3, F_{11}, F_{12}, \ldots$, et les distances OA, OB, OC, qui sont les coordonnées de M′, par $a, b, c$.

Le plan tangent en M a pour équation

$$(X - x)F_1 + (Y - y)F_2 + (Z - z)F_3 = 0.$$

On en conclut

$$a = \frac{M}{F_1}, \quad b = \frac{M}{F_2}, \quad c = \frac{M}{F_3}, \tag{1}$$

où l'on a posé

$$M = xF_1 + yF_2 + zF_3. \tag{2}$$

En différentiant les égalités (1) on trouve

$$\left.\begin{aligned} F_1^2\, da &= (F_1M_1 - MF_{11})\,dx + (F_1M_2 - MF_{12})\,dy + (F_1M_3 - MF_{13})\,dz, \\ F_2^2\, db &= (F_2M_1 - MF_{21})\,dx + (F_2M_2 - MF_{22})\,dy + (F_2M_3 - MF_{23})\,dz, \\ F_3^2\, dc &= (F_3M_1 - MF_{31})\,dx + (F_3M_2 - MF_{32})\,dz + (F_3M_3 - MF_{33})\,dz; \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

$M_1$, $M_2$, $M_3$ désignant les dérivées partielles de M; on a de plus

$$0 = F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz. \qquad (4)$$

Si l'on élimine $dx$, $dy$, $dz$ entre ces quatre égalités, l'équation résultante est de la forme

$$f_1 da + f_2 db + f_3 dc = 0,$$

et l'on voit immédiatement que les coefficients $f_1$, $f_2$ $f_3$ sont proportionnels aux dérivées partielles de $\varphi(a, b, c)$, l'équation de la surface décrite par M′ étant $\varphi(a, b, c) = 0$.

Par suite, l'équation du plan tangent au point M′ est

$$f_1(X - a) + f_2(X - b) + f_3(Z - c) = 0.$$

Or (*), si l'on ajoute les équations (3) et (4) multipliées respectivement par $x$, $y$, $z$, — M, les coefficients de $dx$, $dy$, $dz$ de l'équation résultante sont nuls. En effet, le coefficient de $dx$, par exemple, est

$$-MF_1 + M_1(xF_1 + yF_2 + zF_3) - M(xF_{11} + yF_{21} + zF_{31}); \qquad (5)$$

mais

$$M = xF_1 + yF_2 + zF_3,$$
$$M_1 = F_1 + (xF_{11} + yF_{21} + zF_{31});$$

en substituant ces valeurs de M et $M_1$ dans l'expression (5) on trouve 0.

On a donc

$$xF_1^2 da + yF_2^2 db + zF_3^2 dc = 0,$$

et le plan tangent en M′ a pour équation

$$xF_1^2(X - a) + yF_2^2(Y - b) + zF_3^2(Z - c) = 0,$$

ou

$$XxF_1^2 + YyF_2^2 + ZzF_3^2 = axF_1^2 + byF_2^2 + czF_3^2.$$

Le second membre, si l'on a égard aux relations (1) et (2), se réduit à $M^2$. L'équation cherchée prend donc la forme

$$\frac{Xx}{a^2} + \frac{Yy}{b^2} + \frac{Zz}{c^2} = 1.$$

Le plan considéré est donc le plan polaire du point M par rapport à un ellipsoïde (variable) ayant pour équation

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} = 1.$$

---

(*) Ce qui précède est emprunté à la solution de M. Absolonne. La seconde solution a paru dans les *Wiskundige Opgaven*. (J. N.)

*Solution par* M. Wind. Soit

$$uX + vY + wZ + 1 = 0$$

l'équation du plan ABC; $u$, $v$, $w$ sont les coordonnées de ce plan, et celles du point M' sont

$$a = -\frac{1}{u}, \quad b = -\frac{1}{v}, \quad c = -\frac{1}{w}.$$

Donc, si l'équation tangentielle de la surface donnée (M) est $\varphi(u, v, w) = 0$, celle de la surface (M') est

$$\varphi\left(-\frac{1}{a}, \quad -\frac{1}{b}, \quad -\frac{1}{c}\right) = 0.$$

L'équation du plan tangent en M' est

$$(X - a)\frac{\partial\varphi}{\partial u}\cdot\frac{1}{a^2} + (Y - b)\frac{\partial\varphi}{\partial v}\cdot\frac{1}{b^2} + (Z - c)\frac{\partial\varphi}{\partial w}\cdot\frac{1}{c^2} = 0.$$

Mais les dérivées

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial v}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial w}$$

sont proportionnelles aux coordonnées du point de contact M du plan ABC; donc si ces coordonnées sont représentées par $x$, $y$, $z$, l'équation cherchée est

$$(X - a)\frac{x}{a^2} + (Y - b)\frac{y}{b^2} + (Z - c)\frac{z}{c^2} = 0$$

ou

$$\frac{Xx}{a^2} + \frac{Yy}{b^2} + \frac{Zz}{c^2} = \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}.$$

Le second membre est égal à 1, parce que $x$, $y$, $z$ sont les coordonnées d'un point du plan ABC; donc on peut encore écrire

$$\frac{Xx}{a^2} + \frac{Yy}{b^2} + \frac{Zz}{c^2} = 1.$$

## Question 752.

(Voir *Mathesis*, (2), II, p. 32.)

*Sur les côtés d'un angle fixe* XAY *on prend les longueurs variables* AB, AC *telles, que*

$$\frac{1}{\overline{AB}^2}+\frac{1}{\overline{AC}^2}=\frac{2}{p^2}.$$

*Démontrer que le côté* BC *enveloppe une ellipse dont les diamètres conjugués égaux sont dirigés suivant* AX, AY; *les demi-axes de cette ellipse sont égaux à* $p\cos\frac{A}{2}$, $p\sin\frac{A}{2}$. *La droite* BC *touche son enveloppe au pied* K *de la symédiane* AK *du triangle* ABC. (Sollertinsky.)

*Solution par* MM. Denys *et* Mandart. Posons AB $= c$, AC $= b$. La droite BC est représentée par

$$\frac{x}{c}+\frac{y}{b}=1, \quad \text{avec} \quad \frac{1}{c^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{2}{p^2}. \tag{1}$$

La règle des enveloppes (*) conduit aux égalités

$$\frac{x}{c^2}+\frac{y}{b^2}\cdot\frac{db}{dc}=0, \quad \frac{1}{c^3}+\frac{1}{b^3}\cdot\frac{db}{dc}=0;$$

si l'on élimine $\frac{db}{dc}$, on trouve

$$cx=by, \tag{2}$$

ce qui est l'équation de la symédiane AK. Éliminant $c$ et $b$ entre (1) et (2), on a pour l'enveloppe cherchée

$$x^2+y^2=\frac{p^2}{2}. \tag{3}$$

Cette courbe est donc une ellipse rapportée à ses diamètres conjugués égaux. Les axes sont dirigés suivant les bissectrices des angles formés par AX et AY. Pour obtenir leurs longueurs, on suppose AB $= \pm$ AC $= p$; la perpendiculaire abaissée de A sur BC sera égale à $p\cos\frac{1}{2}$ A ou $p\sin\frac{1}{2}$ A et représente un demi-axe.

*Solution par* M. Droz. Soit

$$x^2+y^2=d^2$$

l'équation d'une ellipse rapportée à ses diamètres conjugués égaux.

(*) $c$ est le paramètre variable et $b$ est une fonction de $c$.

Le tangente en un point $(x', y')$ de la courbe a pour équation

$$xx' + yy' = d^2;$$

les segments $\zeta$, $\eta$ qu'elle intercepte sur les axes à partir du centre ont pour expressions

$$\zeta = \frac{d^2}{x'}, \quad \eta = \frac{d^2}{y'}.$$

On en conclut

$$\frac{1}{\zeta^2} + \frac{1}{\eta^2} = \frac{x'^2 + y'^2}{d^4} = \frac{1}{d^2}, \quad \frac{y'}{x'} = \frac{\zeta}{\eta};$$

ces égalités démontrent la réciproque du théorème de M. Sollertinsky.

Soient BC, B'C' deux droites coupant les axes AX, AY en des points B et C, B' et C' tels, que l'on ait

$$\frac{1}{\overline{AB}^2} + \frac{1}{\overline{AC}^2} = \frac{1}{\overline{AB'}^2} + \frac{1}{\overline{AC'}^2} = \frac{2}{p^2}.$$

On a

$$\frac{1}{\overline{AB}^2} - \frac{1}{\overline{AB'}^2} = \frac{1}{\overline{AC'}^2} - \frac{1}{\overline{AC}^2}, \text{ ou } \frac{(AB + AB')\,BB'}{\overline{AB}^2 . \overline{AB'}^2} = \frac{(AC + AC').C'C}{\overline{AC}^2 . \overline{AC'}^2}.$$

Si K est le point d'intersection des droites BC, B'C', le triangle ABC coupé par la transversale B'C' donne

$$\frac{KB}{KC} \cdot \frac{B'B}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'C} = 1, \quad \text{ou} \quad \frac{KB}{KC} = \frac{C'C}{B'B} \cdot \frac{B'A}{C'A};$$

remplaçant le rapport $\frac{C'C}{B'B}$ par sa valeur tirée de (A) et passant à la limite lorsque B'C' tend indéfiniment vers BC, on obtient

$$\frac{KB}{KC} = -\frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2},$$

ce qui démontre également que BC touche son enveloppe au pied de la symédiane du triangle ABC.

Note. La même question a été résolue par MM. Quint (Dordrecht) et Déprez.

Lorsqu'on traite directement l'enveloppe de BC, on peut poser

$$\frac{1}{c} = \frac{\sqrt{2}}{p} \cos\varphi, \quad \frac{1}{b} = \frac{\sqrt{2}}{p} \sin\varphi,$$

ce qui donne pour BC l'équation

$$x \cos\varphi + y \sin\varphi = \frac{p}{\sqrt{2}};$$

le point de contact de BC vérifie l'égalité $-x\sin\varphi + y\cos\varphi = 0$, et la somme des carrés de ces équations donne

$$x^2 + y^2 = \frac{p^2}{2}.$$

On peut aussi éliminer $\frac{1}{c}$ entre les deux équations (1) et égaler à zéro le discriminant de l'équation en $\frac{1}{b}$ :

$$\left(1 - \frac{y}{b}\right)^2 \frac{1}{x^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{2}{p^2}.$$

Enfin, si l'angle XAY est droit, on voit immédiatement que l'enveloppe est une circonférence. Le cas général se ramène par une projection à ce cas particulier.

Les remarques suivantes sont dues à M. Déprez :

I. Le centre de gravité, l'orthocentre, le centre du cercle circonscrit et le point de Lemoine du triangle ABC décrivent des quartiques.

II. Une ellipse étant rapportée à ses diamètres conjugués égaux, si la polaire d'un point quelconque M rencontre ces diamètres en des points B, C, la droite AM est la symédiane du triangle ABC (A est le centre de la courbe; voir la démonstration de M. Droz).

III. La question peut être étendue à la sphère :

L'enveloppe des arcs de grand cercle qui déterminent sur deux arcs de grand cercle donnés des segments AB, AC liés par la relation

$$\operatorname{cotg}^2 AB + \operatorname{cotg}^2 AC = 2\cot^2 p,$$

est une ellipse sphérique ayant pour équation $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^2 y = \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 p$. Le point de contact de BC est le pied de l'arc symédian AK du triangle ABC.

---

## ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE PARIS.

### Concours de 1892. — Composition de Mathématiques.

On donne une hyperbole équilatère et une circonférence (C) décrite sur une corde DD′ de cette hyperbole comme diamètre.

1° On mène dans la circonférence une corde perpendiculaire à DD′; démontrer que la moitié de cette corde est moyenne proportionnelle

entre les distances de son milieu aux points où elle rencontre l'hyperbole.

2° Indiquer dans quels cas les points d'intersection de la circonférence et de l'hyperbole sont tous réels.

3° Trouver le lieu des points de rencontre des sécantes communes à l'hyperbole et à la circonférence lorsque la corde DD′ se déplace en restant parallèle à une direction fixe.

4° Soient H un des points communs à l'hyperbole et au cercle mobile, A le point où la tangente à la circonférence en H coupe l'hyperbole, B le point où la tangente à l'hyperbole en H coupe la circonférence. Prouver que la droite AB passe par un point fixe.

---

## QUESTIONS PROPOSÉES.

**771.** Soit O le centre du cercle inscrit à ABC. Démontrer que les projections du point de Nagel sur les diamètres du cercle, parallèles aux asymptotes de l'hyperbole équilatère OABC, appartiennent à un diamètre de cette hyperbole. (E. Cesáro.)

***772.** Étant donnés sur une circonférence O deux points A et B, mener une tangente telle, que le produit de ses distances aux points A et B soit égal à un carré donné $K^2$. Discussion. (Miller.)

***773.** Un tétraèdre ABCD donne lieu à trois quadrilatères gauches; ABCD, ACDB, ADBC.

Si l'on considère l'un d'eux, ABCD par exemple, les plans menés de deux sommets consécutifs A et B, perpendiculairement aux côtés opposés BC et AD se coupent suivant une droite; cette droite et les trois autres analogues sont situées dans un même plan $P_1$ perpendiculaire à la droite qui joint les milieux des diagonales AC et BD.

Le plan $P_1$ et les deux plans analogues relatifs aux quadrilatères ACDB, ADBC se coupent en un point qui est le symétrique du centre de la sphère circonscrite au tétraèdre par rapport au centre de gravité. (Farjon.)

***774.** Soient M, N les milieux des diagonales AC, BD d'un quadrilatère inscriptible ABCD, et soient E, F les points d'intersection des côtés opposés AB et CD, BC et DA. Démontrer que les circonférences MNE, MNF ont pour tangente commune la troisième diagonale EF.

(Langley.)

---

# THÉORIE DES PLANS HYPERCYCLIQUES DES SURFACES DU SECOND DEGRÉ;

par M. JOSEPH GILLET, Docteur en sciences physiques et mathématiques, professeur à l'école Abbatiale de Maredsous.

1. *Définition.* L'intersection d'une quadrique par un plan est une ellipse, une hyperbole ou une parabole. Si la section est un cercle, le plan sécant prend le nom de *plan cyclique* de la surface; par analogie, lorsqu'il détermine une hyperbole équilatère, nous proposons de l'appeler *plan hypercyclique*(*).

L'ellipsoïde, le paraboloïde elliptique, le cylindre elliptique et le cylindre parabolique n'admettent pas de sections hyperboliques; il nous suffira donc de considérer les hyperboloïdes à une et à deux nappes, le cône, le paraboloïde hyperbolique et le cylindre hyperbolique(**).

## I. Hyperboloïde à une nappe.

2. *Condition pour qu'un plan donné soit hypercyclique.* Soient $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, les cosinus directifs de la normale à un plan; ce plan représenté par

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = 0 \tag{1}$$

détermine dans la surface dont l'équation est

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \tag{2}$$

une section dont les carrés des demi-axes sont les racines $R_1^2$, $R_2^2$ de l'équation de Sedley Taylor

$$\frac{a^2\alpha^2}{R^2 - a^2} + \frac{b^2\beta^2}{R^2 - b^2} - \frac{c^2\gamma^2}{R^2 + c^2} = 0, \tag{3}$$

ou

$$\left.\begin{aligned} & R^4 (a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 - c^2\gamma^2) \\ & - R^2 [a^2\alpha^2 (b^2 - c^2) + b^2\beta^2 (a^2 - c^2) - c^2\gamma^2 (a^2 + b^2)] \\ & - a^2b^2c^2 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

---

(*) Cf. ABEL TRANSON, *Analogies du cercle et de l'hyperbole équilatère* (Nouv. Ann. de Mathém., 1846, p. 510).

(**) Cf. OTTO RUPP, *Ueber die auf Flächen zweiten Grades liegenden gleichseitigen Hyperbeln* (Sitz. d. K. Akad. d. Wiss. zu Wien, Band 86, Heft 4, nov. 1882).

Pour que la section soit une hyperbole équilatère, il faut que la somme $R_1^2 + R_2^2$ des racines de (4) soit nulle, c'est à dire que l'on ait :

$$a^2\alpha^2(b^2 - c^2) + b^2\beta^2(a^2 - c^2) - c^2\gamma^2(a^2 + b^2) = 0. \qquad (5)$$

Cette relation exige que l'axe imaginaire $c$ ne soit pas le plus grand axe de la surface; en supposant une fois pour toutes $a > b$, nous devrons avoir $a > b > c$ ou $a > c > b$.

**3.** *Axes de la section.* Lorsque la condition (5) est vérifiée, les carrés des demi-axes de la section sont donnés par la formule

$$R^2 = \pm \frac{abc}{\sqrt{a^2x^2 + b^2\beta^2 - c^2\gamma^2}}; \qquad (6)$$

et ces axes ont pour équations

$$\frac{x(R^2 - a^2)}{a^2\alpha} = \frac{y(R^2 - b^2)}{b^2\beta} = -\frac{z(R^2 + c^2)}{c^2\gamma}, \qquad (7)$$

$R^2$ étant à remplacer par une des valeurs (6)(*).

**4.** *Enveloppe des plans diamétraux hypercycliques.* La condition (5) exprime que le plan sécant (1) est tangent au cône

$$\frac{x^2}{a^2(b^2 - c^2)} + \frac{y^2}{b^2(a^2 - c^2)} - \frac{z^2}{c^2(a^2 + b^2)} = 0; \qquad (8)$$

les équations de la génératrice de contact s'obtiennent en identifiant l'équation (1) du plan donné, avec celle d'un plan tangent au cône (8) en un point $(x, y, z)$; on trouve

$$\frac{x}{a^2\alpha(b^2 - c^2)} = \frac{y}{b^2\beta(a^2 - c^2)} = \frac{-z}{c^2\gamma(a^2 + b^2)}; \qquad (9)$$

on peut donc énoncer le théorème suivant :

*Les plans diamétraux hypercycliques enveloppent un cône du second ordre.*

**5.** *Étude du cône enveloppe.* Ce cône (8) admet les mêmes axes et les mêmes plans principaux que l'hyperboloïde. Lorsque l'on a $a^2 > b^2 > c^2$, l'axe imaginaire du cône est dirigé suivant l'axe des $z$; dans ce cas,

$b^2(a^2 - c^2) > a^2(b^2 - c^2)$ et $b^2(a^2 - c^2) < a^2(b^2 - c^2) + c^2(a^2 + b^2)$;

*le cône enveloppe est elliptique* (**).

---

(*) Voir Barbarin (*Mathesis*, 1886, pp. 25 et 49) et Gilbert (Ib., 1888, p. 247).

(**) Soient $a^2$, $b^2$, $-c^2$, les carrés des demi-axes d'un cône et $a^2 > b^2$. Si la con-

Si $a^2 > c^2 > b^2$, l'axe imaginaire est dirigé suivant l'axe des $y$; les axes réels sont tels que l'on a

$$c^2(a^2+b^2) > a^2(c^2-b^2)$$
$$c^2(a^2+b^2) > a^2(c^2-b^2)+b^2(a^2-c^2);$$

et *le cône est hyperbolique.*

En observant que les droites focales d'un cône sont situées dans le plan qui passe par l'axe imaginaire et le plus grand des axes réels, on trouve pour équation des droites focales de (8), lorsque $a^2 > b^2 > c^2$ :

$$x=0, \quad \frac{y^2}{c^2(a^2-b^2)} - \frac{z^2}{b^2(a^2+c^2)} = 0. \tag{10}$$

Mais les plans cycliques de l'hyperboloïde (2) sont parallèles aux plans

$$(a^2-b^2)c^2y^2 - (a^2+c^2)b^2z^2 = 0, \tag{11}$$

ce qui nous montre que ces plans sont perpendiculaires aux lignes focales (10) ; on arrive à la même conclusion dans l'hypothèse $a^2 > c^2 > b^2$.

D'ailleurs, le cône asymptote représenté par

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \tag{12}$$

et l'hyperboloïde (2) admettent les mêmes plans cycliques, et le cône

$$a^2x^2 + b^2y^2 - c^2z^2 = 0, \tag{13}$$

supplémentaire du cône (12), a aussi ses lignes focales perpendiculaires aux plans cycliques (11). On peut donc énoncer les théorèmes suivants qui sont corrélatifs :

*Le cône enveloppe est homofocal au supplémentaire du cône asymptote de la surface donnée.*

*Le cône asymptote de l'hyperboloïde et le supplémentaire*

$$a^2(b^2-c^2)x^2 + b^2(a^2-c^2)y^2 - c^2(a^2+b^2)z^2 = 0 \tag{14}$$

*du cône enveloppe sont homocycliques.*

---

dition $a^2 < b^2+c^2$ est vérifiée, la section perpendiculaire à l'une des droites focales est une ellipse, et le cône est dit *elliptique*. Lorsque $a^2 > b^2+c^2$, cette section est une hyperbole, le cône est dit *hyperbolique*, et quand $a^2 = b^2+c^2$, le cône est dit *parabolique*. (D'après PLÜCKER.)

6. *Génératrices rectangulaires du cône asymptote.* Tout plan hypercyclique de l'hyperboloïde (2) est aussi hypercyclique du cône asymptote (12); en particulier, lorsque le plan sécant passe par le centre, il détermine dans le cône asymptote deux génératrices perpendiculaires : ce sont les asymptotes de la section faite dans l'hyperboloïde. Donc, *les plans qui coupent un cône du second ordre* (12) *suivant deux génératrices rectangulaires, enveloppent un autre cône du second ordre* (8), *homofocal au supplémentaire du premier.*

Aux deux arêtes rectangulaires déterminées dans le cône asymptote par un plan hypercyclique, correspondent deux plans rectangulaires tangents au cône (13), supplémentaire du cône asymptote; l'intersection de ces plans est perpendiculaire au plan hypercyclique et, par conséquent, c'est une arête du cône (14) supplémentaire du cône enveloppe. Donc, *les intersections de deux plans rectangulaires tangents à un cône du second ordre* (13) *sont les arêtes d'un autre cône du second degré* (14), *homocyclique au supplémentaire* (12) *du premier.*

7. *Plans hypercycliques passant par un point donné.* En transportant le cône (8) parallèlement à lui-même, de manière que son sommet soit au point $(\xi, \eta, \zeta)$, on a :

$$\frac{(x-\xi)^2}{a^2(b^2-c^2)}+\frac{(y-\eta)^2}{b^2(a^2-c^2)}-\frac{(z-\zeta)^2}{c^2(a^2+b^2)}=0 \qquad (15)$$

pour l'enveloppe des plans hypercycliques (de l'hyperboloïde et du cône asymptote) passant par le point $(\xi, \eta, \zeta)$.

8. *Intersection du cône enveloppe et de l'hyperboloïde.* En multipliant tous les termes de l'équation (8) par $a^2+b^2-c^2$, on peut l'écrire sous la forme

$$\frac{x^2}{b^2-c^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}+\frac{z^2}{a^2+b^2}+\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0. \qquad (16)$$

Cette équation combinée avec celle de l'hyperboloïde (2) nous donne

$$\frac{x^2}{b^2-c^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}+\frac{z^2}{a^2+b^2}=-1, \qquad (17)$$

équation d'une surface homofocale à (2).

Si $a^2>b^2>c^2$, la quadrique représentée par l'équation (17) est imaginaire; mais lorsque $a^2>c^2>b^2$ on obtient un hyperboloïde réel à deux nappes. Dans ce second cas, les hyperboloïdes (2) et (17) se coupent, car

leurs demi-axes réels dirigés suivant OX ont respectivement pour valeurs $a$ et $\sqrt{c^2 - b^2}$, et d'après l'hypothèse, on a $a^2 > c^2 - b^2$. D'ailleurs, l'intersection de ces deux hyperboloïdes est une ligne de courbure pour chacun d'eux, et comme cette intersection appartient aussi au cône (8), on peut énoncer le théorème suivant :

*Lorsque la condition* $(a^2 > c^2 > b^2)$ *est vérifiée, le cône enveloppe* (8) *coupe l'hyperboloïde* (2) *suivant une ligne de courbure de cette surface.*

9. *Intersection du cône enveloppe et du cône asymptote.* Les équations (8) et (12) sont linéaires et homogènes en $x^2$, $y^2$, $z^2$; en les résolvant par rapport à ces inconnues, on trouve

$$\frac{x^2}{a^2(b^4 - c^4)} = -\frac{y^2}{b^2(a^4 - c^4)} = \frac{z^2}{c^2(a^4 - b^4)}; \qquad (18)$$

ce sont les équations des génératrices communes au cône enveloppe et au cône asymptote.

Comme on ne peut avoir que l'une des deux hypothèses $(a^2 > b^2 > c^2)$ ou $(a^2 > c^2 > b^2)$, on voit que ces génératrices sont imaginaires, et par suite, *le cône enveloppe ne rencontre pas le cône asymptote.*

(*A continuer.*)

---

## SUR QUELQUES PROBLÈMES DE GÉOMÉTRIE;

par M. Delahaye, à Roye (Somme).

1. *Raccorder deux droites données* BA, B'A' *par deux arcs de cercle aux points* A, A'.

Il faut décrire deux arcs de cercle de centres C, C' qui se touchent mutuellement en un certain point D et qui touchent respectivement BA en A, B'A' en A' (Fig. 1).

Ce problème admet une infinité de solutions. En effet, sur les droites A'C', AE perpendiculaires à B'A', BA, prenons deux longueurs égales quelconques, A'C' = AE; la perpendiculaire élevée au milieu de la droite C'E coupe AC en un point C, tel que

$$CC' = CE = CA - C'A'.$$

Donc les cercles décrits des points C, C′ comme centres respectivement avec les rayons CA, C′A′ sont tangents l'un à l'autre.

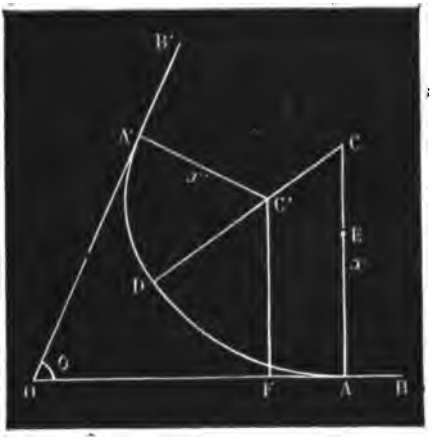


Fig. 1.

Cherchons la relation entre les rayons

$$CA = x, \quad C'A' = x'.$$

A cet effet, menons C′F perpendiculaire à BA et posons

$$OA = a, \quad OA' = a',$$
$$\textit{angle } AOA' = \theta.$$

Si nous projetons la ligne brisée OA′C′ successivement sur OF et FC′, nous aurons

$$OF = a' \cos\theta + x' \sin\theta,$$
$$C'F = a' \sin\theta - x' \cos\theta.$$

Mais
$$\overline{CC'}^2 = (CA - C'F)^2 + (OA - OF)^2;$$

par conséquent

$$(x - x')^2 = (x - a' \sin\theta + x' \cos\theta)^2 + (a - a' \cos\theta - x' \sin\theta)^2,$$

relation qu'on réduit facilement à

$$(a'x + ax') \sin\theta - 2xx' \cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{c^2}{2},$$

$c$ désignant la distance AA′(*).

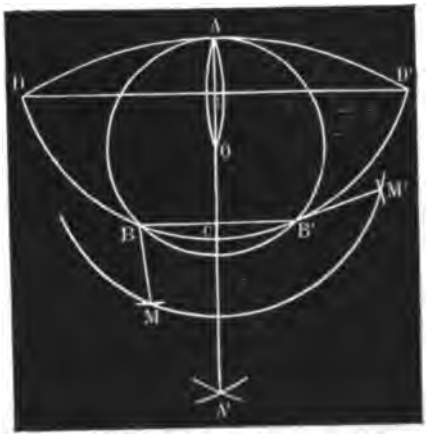


Fig. 2.

**2.** ***Construire une quatrième proportionnelle à trois longueurs données*** $a$, $b$, $c$.

La construction suivante n'emploie que le compas (Fig. 2).

Construisons deux circonférences concentriques avec les

(*) Résoudre le même problème dans le cas où le rapport des deux rayons est donné. Quel est le lieu géométrique du point D? Quelle est l'enveloppe de la droite CC′ et celle de la tangente commune en D? (J. N.)

rayons $a$ et $b$. Inscrivons dans la première une corde $BB' = c$, et des points B, B' comme centres avec un même rayon quelconque, décrivons deux arcs de cercle coupant la circonférence de rayon $b$ en M et M'. La corde MM' est la quatrième proportionnelle cherchée; car les triangles OBM, OB'M' étant égaux, les angles BOB', MOM' sont égaux et par suite les triangles BOB', MOM' sont semblables.

3. ***Trouver, en employant seulement le compas, le point d'intersection de deux droites déterminées chacune par deux points***, A *et* B, C *et* D (Fig. 3).

Je détermine le point C', symétrique de C par rapport à la droite AB, en décrivant des centres A et B deux arcs de cercle passant par C. Je cherche de même le symétrique D' de D par rapport à AB. Les droites CD, C'D' se coupent au point cherché S et l'on a :

$$\frac{CD}{CS} = \frac{CC' + D'D}{CC'}.$$

Les distances égales CS, C'S sont donc égales à la quatrième proportionnelle aux longueurs CC' + D'D, CC', CD, et peuvent s'obtenir par le problème précédent; deux arcs de cercle décrits des centres C, C' avec cette quatrième proportionnelle pour rayon déterminent le point S.

On obtient la somme CC' + DD' en cherchant (au moyen de deux arcs de cercle) le quatrième sommet E du parallélogramme ayant pour côtés D'C', D'D.

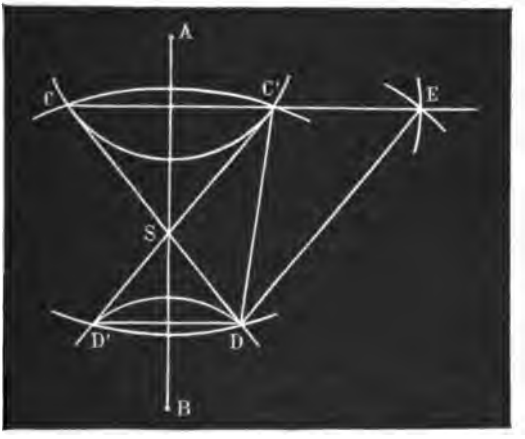



Fig. 3.

4. ***Trouver le centre d'un cercle donné*** (au moyen du compas seul). ***Première solution***. Après avoir marqué trois points quelconques A, B, C sur la circonférence donnée, on détermine facilement deux points P, Q de la perpendiculaire élevée au milieu de AB, et deux points R, S de celle qui passe au milieu de BC. Il reste à appliquer aux droites PQ, RS le problème 3°.

***Deuxième solution*** (Figure 2). D'un point quelconque A de la cir-

conférence donnée comme centre, avec un rayon arbitraire, décrivons un arc de cercle DBB'D' coupant la première circonférence en B et B'. Des points B, B' comme centres, avec le rayon BA = B'A, décrivons deux arcs de cercle se coupant au point A' symétrique de A par rapport à la corde BB'. Du centre A' et avec le rayon A'A, décrivons un arc de cercle DAD' coupant DBB'D' en D et D'. Les arcs de cercle décrits des centres D, D' avec le rayon DA se coupent en un point O, qui est le centre du cercle donné.

En effet, soient C, E les milieux des droites BB', DD' et R le rayon du cercle donné. On trouve facilement

$$\overline{AD}^2 = AE.2AA', \quad \overline{AB}^2 = AC.2R;$$

d'où, à cause de AD = AB,

$$AE.2AA' = AC.2R.$$

Comme $AC = \frac{1}{2}AA'$, on a nécessairement $AE = \frac{1}{2}R$; or $AE = \frac{1}{2}AO$, donc AO = R.

---

## NOTES MATHÉMATIQUES.

**7.** ***Sur la question 519*** (Voir p. 47). La courbe représentée, en coordonnées cartésiennes orthogonales, par l'équation $y = f(x)$, rencontre, ***mais ne touche pas***, la bissectrice de $xOy$, en un point A dont l'abscisse est $a$ : cela résulte des hypothèses faites sur la première équation. En vertu des hypothèses relatives à la seconde équation, la courbe $x = f(y)$ rencontre ***et touche***, en A, la première courbe. Les deux lignes, symétriques par rapport à OA, ne peuvent se toucher sur cette droite (leur normale commune) qu'***en s'y croisant***, à moins qu'elles ne coïncident sur toute leur longueur. Leur contact est donc d'ordre pair, et, par suite, l'ordre de multiplicité de $a$ est impair. (E. Cesáro).

**8.** ***Sur la somme des termes d'une progression arithmétique.*** — 1° Considérons un échiquier carré de $n^2$ cases.

Le long d'une diagonale, on rencontre $n$ cases; on peut ensuite distinguer deux rangées parallèles à cette diagonale et comprenant chacune $n-1$ cases, puis deux autres comprenant $n-2$ cases, et ainsi de suite. Cette figure montre que

$$n^2 = n + 2(n-1) + 2(n-2) + \cdots + 2.2 + 2.1,$$

d'où

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n^2+n}{2}=\frac{n(n+1)}{2}.$$

La somme des termes de la progression

$$a,\quad a+\delta,\quad a+2\delta,\quad \ldots,\quad a+\overline{n-1}\delta$$

se ramène à la précédente; car elle est égale à

$$na+\delta(1+2+\cdots+\overline{n-1})=na+\delta\frac{(n-1)n}{2}.$$

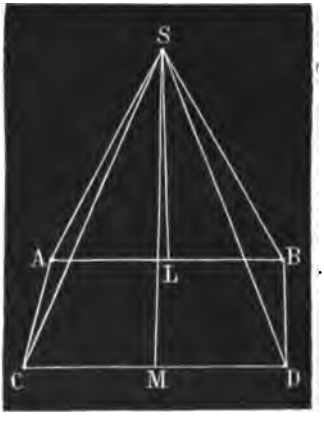
La figure de l'échiquier montre aussi que le carré $n^2$ est égal à la somme des deux nombres triangulaires $T_{n-1}$, $T_n$. (Léon Collette.)

2° Considérons sur l'échiquier la $p^e$ case de la diagonale et les deux rangées parallèles aux bords de l'échiquier, comprises entre la diagonale et un bord. Chacune de ces rangées comprenant $p-1$ cases, nous aurons, avec la case de la diagonale, $2(p-1)+1=2p-1$ cases.

Par ce moyen, on réalise les nombres impairs 1, 3, 5, ..., $2n+1$. On en conclut que la somme des $n$ premiers nombres impairs égale $n^2$.

(D'après Éd. Lucas.)

*9. ***Un piège mathématique.*** Voici une démonstration fallacieuse de la proposition absurde : ***un angle obtus est égal à un angle droit.*** Elle nous a été communiquée par un de nos lecteurs (*).




Soit ABDC un quadrilatère ayant un angle droit B, un angle obtus A et deux côtés opposés égaux AC et BD. Élevons au milieu L de AB, la perpendiculaire LS, au milieu M de CD, la perpendiculaire MS, et joignons leur point d'intersection S aux sommets A, B, C, D.

(*) Cette curieuse démonstration se trouve aussi dans l'ouvrage intitulé : ***Mathematical Recreations and Problems of Past and Present Times*** by W. W. Rouse Ball, Fellow and Lecturer of Trinity College, Cambridge. Second Edition London : Mac Millan and C° and New-York. 1892 (XII-241 p. in 8°), p. 32-33.

On y trouve aussi, pp. 33-34, une démonstration tout aussi captieuse de la proposition suivante : ***Tout triangle est isoscèle !*** Nous la ferons connaître ultérieurement.

On aura évidemment

$$SA = SB, \quad SC = SD.$$

Comme on a, par hypothèse, BD = AC, les deux triangles SAC, SBD sont égaux, comme ayant les trois côtés égaux. Donc

$$\text{angle CAS} = \text{angle DBS}.$$

Mais évidemment aussi,

$$\text{angle LAS} = \text{angle LBS}.$$

Soustrayant ces deux relations l'une de l'autre, il vient

$$\text{angle (CAS} - \text{LAS)} = \text{angle (DBS} - \text{LBS)},$$

ou encore

$$\text{angle CAB} = \text{angle ABD},$$

c'est-à-dire qu'*un angle obtus est égal à un angle droit.*

×10. *Bibliographie relative à un problème de Fermat.* « *Trouver un point tel que la somme de ses distances à trois points donnés soit minima.* » Dans le *Bulletin scientifique* de M. E. Lebon, 20 juillet 1891, t. V, n° 10, pp. 335-339, on trouve deux solutions élémentaires dues respectivement à M. A. Schiappa Mouteiro et G. Peano et les indications bibliographiques suivantes :

Fermat, Œuvres (Paris, Gauthier-Villars, 1891), I, p. 153.

Steiner, G. Werke, II, p. 17.

Lindelöf, Acta Societatis Scientiarum Fennicae.

R. Sturm, J. de Crelle, t. 96, p. 36, t. 97, p. 49.

Schaertlin, Journal de Schlömilch, 1881.

A. Desboves, Questions de géométrie élémentaire, 2e édition, 1885, p. 400.

E. Catalan, Théorèmes et Problèmes de Géométrie élémentaire. 6e édition, 1879, p. 228.

S. Peano, Applicazioni geometriche del Calcolo infinitesimale, p. 148.

J. Bertrand, Journal de Liouville, t. VIII, 1843, p. 158.

Frenet, Exercices de calcul infinitésimal, 2e édition, 1866, p. 138.

Serret, Calcul différentiel, 2e édition, 1879, p. 232.

Pour compléter ces renseignements, nous mentionnons encore :

1° Azzaelli, *Atti dell' Academia Pontificia de' Nuovi Lincei*, 1886; ce mémoire cite Ricatti, Fagnano, Tomassino, Andrea, Franchini, Gallegari comme s'étant occupés de cette question.

2° *Annales de Gergonne*, t. I, pp. 277, 285, 375; t. XIV, p. 13 et t. XX, p. 300 (LHUILIER, TÉDENAT, un abonné, STURM et GERGONNE).

3° Nous renvoyons également à nos mémoires *Sur le tétraèdre* (p. 37) et *Sur les projections et contre-projections d'un triangle fixe* (p. 15), ainsi qu'à des articles parus dans la N. C. M., t. I, p. 111, et dans les *Wiskundige Opgaven* (Deel II, n° 193), où nous traitons des généralisations du problème de Fermat. (J. N.)

---

## QUESTIONS DE LICENCE;

par M. H. BROCARD, chef de bataillon du génie à Valence.

XLI. *On considère le conoïde défini par l'équation*

$$z = \varphi\left(\frac{y}{x}\right). \tag{1}$$

1° *Former l'équation différentielle des lignes asymptotiques du conoïde;* 2° *Intégrer cette équation;* 3° *Chercher quelle doit être la fonction* $\varphi$ *pour que la projection de l'une des lignes asymptotiques, sur le plan des* $xy$*, soit le cercle représenté par l'équation*

$$x^2 + y^2 = ay. \tag{2}$$

*Quelles sont, dans ce dernier cas, les projections des autres lignes asymptotiques?* (Paris, novembre 1880.)

On peut reconnaître, sur divers exemples pris au hasard, que les surfaces conoïdes admettent comme lignes asymptotiques les génératrices rectilignes parallèles au plan directeur.

Cette vérification suffirait pour ériger ce fait en proposition générale, mais on peut l'établir directement en partant de l'équation (1), qui donne

$$p = -\frac{y}{x^2}\varphi', \quad q = \frac{1}{x}\varphi', \quad px + qy = 0,$$

$$r = \frac{2y}{x^3}\varphi' + \frac{y^2}{x^4}\varphi'', \quad s = -\frac{1}{x^2}\varphi' - \frac{y}{x^3}\varphi'', \quad t = \frac{1}{x^2}\varphi'',$$

de sorte que l'équation différentielle des lignes asymptotiques projetées sur le plan des $xy$, ou

$$rdx^2 + 2sdxdy + tdy^2 = 0,$$

devient

$$\frac{dy^2}{dx^2}\varphi'' - 2\left(\varphi' + \frac{y}{x}\varphi''\right)\frac{dy}{dx} + 2\frac{y}{x}\varphi' + \frac{y^2}{x^2}\varphi'' = 0,$$

ou

$$\varphi''\left(\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x}\right)\left(\frac{dy}{dx} - \frac{2\varphi' + \frac{y}{x}\varphi''}{\varphi''}\right) = 0.$$

$\varphi'' = 0$ et aussi $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$ donnent $y = Cx$, $z = \varphi(C)$ comme lignes asymptotiques. Ce sont les génératrices parallèles au plan directeur.

Les autres lignes asymptotiques sont données par l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} - \frac{2\varphi'}{\varphi''} = 0,$$

qui devient, si l'on pose $y = ux$,

$$x\frac{du}{dx} = \frac{2\varphi'}{\varphi''} \quad \text{ou} \quad \frac{\varphi''(u)\,du}{\varphi'(u)} = \frac{2dx}{x}.$$

Donc

$$x^2 = C\varphi'(u) = C\varphi'\left(\frac{y}{x}\right).$$

De l'équation (2) on tire

$$x^2 + u^2x^2 = aux, \quad x = \frac{au}{1+u^2}.$$

Par suite, dans ce cas,

$$\varphi' = A\frac{u^2}{(1+u^2)^2}.$$

Posant $u = \operatorname{tg} t$, puis intégrant et remplaçant $u$ par $\frac{y}{x}$, on trouve

$$\varphi = B + \frac{A}{2}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x} - \frac{xy}{x^2+y^2}\right).$$

Le conoïde cherché a donc pour équation

$$z = B + \frac{A}{2}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x} - \frac{xy}{x^2+y^2}\right);$$

il admet pour autres lignes asymptotiques les droites représentées par les équations

$$y = Cx, \quad z = B + \frac{A}{2}\left(\operatorname{arc\,tg} C - \frac{C}{1+C^2}\right).$$

XLII. *Trouver l'équation générale des surfaces telles que si, par un point* M *de l'une d'elles, on mène la normale* MP *terminée au plan des xy, la longueur* MP *soit égale à la distance* OP *du point* P *à l'origine des coordonnées.*

*Déterminer celle de ces surfaces qui passe par la spirale contenue dans le plan des xy et dont l'équation est*

$$\sqrt{x^2+y^2}=ae^{m\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}}.$$ (Poitiers, juillet 1883.)

On trouve pour équation générale :

$$z^2=x^2+y^2+2xzp+2yzq.$$

Par conséquent, l'on a à intégrer le système

$$\frac{dx}{2xz}=\frac{dy}{2yz}=\frac{-dz}{x^2+y^2-z^2}$$

qui admet une première intégrale immédiate $y=Cx$. On a ensuite

$$\frac{xdx+ydy+zdz}{z(x^2+y^2+z^2)}=\frac{dx}{2xz},\quad \text{ce qui donne}\quad x^2+y^2+z^2=C_1x.$$

La solution générale est donc

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{x}=\varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

On peut faire passer la surface par la spirale indiquée; pour $z=0$, il vient

$$\frac{x^2+y^2}{x}=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

relation qui est identique avec l'équation de la spirale, si l'on fait

$$\varphi(t)=a\sqrt{1+t^2}\,e^{m\operatorname{arc\,tang}t}.$$

## REVUE BIBLIOGRAPHIQUE(*).

*Théorie des Nombres*, par Édouard Lucas, professeur de mathématiques spéciales au Lycée Saint-Louis. Tome I : Le calcul des nombres entiers. Le calcul des nombres rationnels. La divisibilité arithmétique. Paris, Gauthier-Villars et fils, 1891 (gr. xxxiv-520 p. gr. in-8°, avec fig. dans le texte). Prix : 15 francs.

(*) Pour ne pas retarder trop longtemps l'annonce des ouvrages reçus par la rédaction de *Mathesis*, nous donnons dans cette revue rapide un aperçu sommaire des matières traitées dans chacun de ces ouvrages. Si nous en trouvons le temps, nous reviendrons ultérieurement sur les plus importants.

Voici un extrait de la table des matières de cet ouvrage remarquable, l'un des plus intéressants et des plus originaux que l'on ait publiés depuis longtemps sur l'Arithmétique supérieure :

Préface. — Introduction. — **Livre I.** *Les nombres entiers.* — CHAP. I. Addition des nombres entiers. — CHAP. II. Soustraction des nombres entiers. — CHAP. III. Multiplication des nombres entiers. — CHAP. IV. Division et classification des nombres entiers. — CHAP. V. Les nombres figurés. — CHAP. VI. L'analyse combinatoire. — CHAP. VII. La géométrie de situation. — CHAP. VIII. La multiplication algébrique. — **Livre II.** *Les nombres rationnels.* — CHAP. IX. Les nombres fractionnaires. — CHAP. X. Le calcul des probabilités. — CHAP. XI. La division algébrique. — CHAP. XII. Les polynômes dérivés. — CHAP. XIII. Le calcul symbolique. — CHAP. XIV. Sommation des puissances numériques. — CHAP. XV. Les fonctions symétriques. — CHAP. XVI. Les déterminants. — CHAP. XVII. Les suites récurrentes linéaires. — CHAP. XVIII. Les fonctions numériques de second ordre. — **Livre III.** *La divisibilité arithmétique.* — CHAP. XIX. Codiviseurs et comultiples. — CHAP. XX. Les nombres premiers. — CHAP. XXI. Les diviseurs des nombres. — CHAP. XXII. De l'indicateur. — CHAP. XXIII. Les restes. — CHAP. XXIV. Les fractions continues. — NOTES ET ADDITIONS.

---

AD. MINEUR, ancien élève de l'École normale des Sciences, professeur à l'Institut Notaux. *Arithmétique* (Autographie de 223 pages in-4°). Prix : 8 fr. *Trigonométrie* (Aut. de 124 p. in-4°). Prix : 6 fr. *Géométrie analytique* (Autographie de VII-224 p. in-4°). Prix : 10 fr. Bruxelles, chez l'auteur, rue de Parme, 41. 1890. *Deux chapitres d'Algèbre.* Bruxelles, Ramlot 1891 (Aut. de 48 p. in-8°).

Manuels rédigés par les élèves du cours de M. A. Mineur, qui s'est inspiré, dit-il dans la préface, des leçons de *Méthodologie mathématique,* de M. Dauge et des articles pédagogiques publiés dans *Mathesis.* Voici le sommaire abrégé des sujets abordés dans les trois ouvrages.

*Arithmétique.* 1. Numération. 2. Calcul des nombres entiers. 3. Propriétés des nombres. 4. Fractions. 5. Nombres incommensurables. 6. Conversion des fractions ordinaires en fractions décimales ou inversement. 7. Proportions. 8. Applications usuelles de l'arithmétique 9. Notes (Plus petit multiple commun ; produits des diviseurs d'un nombre ; théorèmes de Fermat et de Wilson ; exponention des nombres entiers ; approximations numériques).

*Trigonométrie.* 1. Propriétés des fonctions circulaires. 2. Tables trigonométriques. 3. Trigonométrie rectiligne. 4. Trigonométrie sphérique. 5. Additions (Démonstration, par le théorème de Ptolémée, des formules donnant sin $(a+b)$, cos $(a+b)$ ; résolution trigonométrique de l'équation du second degré ; formule de Moivre ; etc.).

*Géométrie analytique.* 1. Préliminaires. 2. Droites. 3. Coniques. 4. Lieux géométriques d'ordre supérieur.

*Algèbre.* 1. Théorie des fractions continues. 2. Analyse indéterminée du premier degré.

La méthode des limites est introduite partout où elle est nécessaire ou utile, soit pour simplifier les démonstrations, soit pour les rendre rigoureuses. Un chapitre de calcul différentiel est donné en tête du livre 2 de la géométrie analytique. Dans le même ouvrage, l'auteur recourt au besoin aux coordonnées trilinéaires et aux déterminants.

---

*The Elements of Plane Trigonometry* by R. LEVETT, M. A., Second Master and C. DAVISON, M. A., Mathematical Master King Edward's High School, Birmingham. London, Macmillan and Co. and New-York, 1892. (Un volume in-12° de XVI-520 p.). Prix : 6 1/2 shillings.

Ce qui caractérise cet ouvrage, c'est d'abord sa division en trois parties, où l'on étudie respectivement la théorie et les applications des fonctions circulaires positives, des fonctions circulaires et hyperboliques à argument réel quelconque, et enfin des fonctions circulaires à argument imaginaire; ensuite, l'extraordinaire profusion d'exemples et d'exercices qui y sont réunis et classés dans chaque paragraphe.

La subdivision adoptée entraîne évidemment des longueurs et des répétitions fatigantes; mais la première partie est en revanche beaucoup plus accessible aux commençants que la partie correspondante des autres manuels.

*Sommaire.* I. 1 Mesure des angles. 2. Lignes trigonométriques des angles aigus. 3. Lignes trigonométriques de $(a \pm b)$ 4. Tables logarithmiques. 5. Résolution des triangles rectangles. [Selon nous, c'est ici qu'il aurait fallu donner la formule d'Oxanam ou plutôt de Snell, exposée au Ch. XV, d'après *Mathesis*, mais sans rigueur. Il vaudrait mieux aussi, en trigonométrie élémentaire, éviter l'emploi des logarithmes des fonctions circulaires.]

II. 6. Mesure circulaire des angles. 7. Définition générale des fonctions trigonométriques. 8. Formules d'addition. 9. Résolution des triangles quelconques (avec une jolie application au lever de la *Mer de glace*, près de Chamonix). 10. Application à la géométrie du triangle, du polygone et du cercle. 11. Fonctions hyperboliques [Théorie trop géométrique]. 12-15. Inégalités, séries, produits infinis, approximations.

III. 16. Imaginaires. 17. Séries imaginaires. 18-20. Binôme, exponentielles, logarithmes, quand la variable est imaginaire. 21. Exposants imaginaires. 22. Fonctions hyperboliques et circulaires d'une variable imaginaire. [Toute cette partie est trop compliquée; on peut en établir tous les résultats bien plus simplement comme nous l'avons montré dans notre *Théorie des fonctions d'une variable imaginaire* (*Mathesis*, 1886, VI, Supplément)].

IV. Table de logarithmes de nombres et de fonctions circulaires (3 pages seulement). Solutions d'exercices (20 pages).

Le livre de MM. Levett et Davison est inférieur au point de vue de la rigueur ou de la simplicité aux bons ouvrages français analogues; mais il contient tant d'exercices, d'exemples et de remarques originales sur des points de détail que nous le recommandons à tous les professeurs. P. M.

---

*Traité de géométrie analytique à trois dimensions* par G. SALMON, professeur à l'Université de Dublin. Ouvrage traduit de l'anglais sur la quatrième édition par O. CHEMIN, Ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, Professeur à l'École des Ponts et Chaussées. Troisième partie. Paris, Gauthier-Villars et fils, 1892 (VIII-220 pages in-8°). Prix : 4 fr. 50.

Ce volume complète la géométrie analytique à trois dimensions et termine l'édition française des œuvres de Salmon. Il comprend quatre grands chapitres 1. Surfaces dérivées des quadriques (surface de l'onde ; surface des centres de courbure ; surfaces parallèles, podaires, inverses, etc.) 2. Surfaces du troisième degré. 3. Surfaces du quatrième degré. 4. Théorie générale des surfaces.

« Les lecteurs pourront maintenant se rendre un compte exact de l'énorme quantité de matières étudiées par l'auteur, de leur enchaînement logique et de la simplicité des moyens employés pour les traiter. On peut dire, sans crainte d'être taxé d'exagération, que les volumes consacrés à la Géométrie analytique des sections coniques, des courbes planes et de l'espace, de même que l'Algèbre supérieure qui les complète, sont des modèles de concision et de clarté » (Préface).

Ces quatre ouvrages, classiques déjà en Angleterre, en Allemagne, en Italie et en France, et, sans doute ailleurs, ont leur place marquée dans la bibliothèque de tous les professeurs.

## SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

### ×Question 731.

(Voir *Mathesis*, (2), I, p. 176.)

*On donne deux droites concourantes* OG, OL *et deux cercles concentriques de centre* O. *On mène au cercle intérieur une tangente variable* SR, *et des points* S *et* R, *où elle rencontre* OG, OL, *les tangentes* SA, RA *au cercle extérieur. Trouver le maximum de l'angle* SAR.

(G. H. NIEWENGLOWSKI.)

*Solution par* M. SOLLERTINSKY. Soient B, C, D les points de contact des tangentes SR, RA, AS. Posons : OB = $r$, OC = R, angle ARO = $\alpha$, ASO = $\beta$, SRO = $\alpha'$, RSO = $\beta'$. On a

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'} = \frac{R}{r} = \frac{\sin\beta}{\sin\beta'},$$

d'où

$$\frac{R}{r} = \frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\sin\alpha' + \sin\beta'} = \frac{\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\dfrac{\alpha'+\beta'}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha'-\beta'}{2}},$$

et, par suite,

$$(1) \qquad \sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\frac{\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\dfrac{\alpha'-\beta'}{2}}=\frac{R}{r}\sin\frac{\alpha'+\beta'}{2}=\text{const.}$$

La supposition $\alpha' \geqq \beta'$ entraîne successivement :

$OS \geqq OR$ ; $SD \geqq RC$ ; $SA \geqq RA$ ; angle $ARS \geqq$ angle $ASR$ ; $\alpha-\beta \geqq \alpha'-\beta'$

et enfin

$$\frac{\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\dfrac{\alpha'-\beta'}{2}} \leqq 1.$$

Cette dernière fraction atteint donc son maximum lorsque $\alpha' = \beta'$ ; par conséquent, d'après (1), $\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$ aura dans ce cas sa valeur minimum, et par suite (*) celle de l'angle SAR sera maximum.

M. Joachimescu a également donné une bonne solution de la même question.

---

## Question 742.

(Voir *Mathesis*, (2), I, p. 240.)

*Une tangente à une ellipse rencontre le cercle principal aux points* M, M'. *Démontrer que les diamètres conjugués avec ceux qui passent par* M *et* M' *rencontrent la tangente sur les directrices.* (Greenstreet.)

*Démonstration par* M^lles De Haas et Pompilianu, MM. Bellens, Joachimescu et Listray. Soient $(x_1, y_1)$ les coordonnées du point de contact N, S et S' les intersections de la tangente avec les directrices. Si F, F' sont les foyers et O le centre, les droites FN, F'N, d'après un théorème connu, sont parallèles aux droites FM, F'M', et par suite, le coefficient angulaire de FM, par exemple, est $m = y_1 : (x_1 - c)$. L'équation de la tangente étant

$$a^2yy_1 + b^2xx_1 = a^2b^2,$$

---

(*) L'angle $\alpha$ ne surpassant pas $\frac{1}{2}\pi$, on a $\frac{1}{2}(\alpha+\beta) < \frac{1}{2}\pi$ ; donc $\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$ et $\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$ varient dans le même sens.

on a, pour les coordonnées de S et le coefficient angulaire de OS,

$$x=\frac{a^2}{c},\quad y=\frac{b^2(c-x_1)}{cy_1},\quad m'=\frac{b^2(c-x_1)}{a^2y_1}.$$

Il en résulte

$$mm'=-\frac{b^2}{a^2},$$

ce qui démontre le théorème.

---

## Question 756.

(Voir *Mathesis*, (2), 1, p. 56.)

***Une ellipse donnée glisse dans son plan de manière à passer par deux points fixes*** P, Q. ***Trouver le lieu du centre*** C. (E. CATALAN.)

***Solution par*** M. QUINT (Dordrecht). Prenons pour axes PQ et la perpendiculaire élevée au milieu O de PQ. Par le centre C, menons $Cx'$ parallèle à PQ et désignons par $a'$, $b'$, les longueurs des demi-diamètres conjugués dirigés suivant $Cx'$, CO; par $\theta$ l'angle de ces diamètres; par $a$, $b$ les demi-axes; enfin, par $x$, $y$ les coordonnées de C. Les théorèmes d'Apollonius donnent

$$a'^2+b'^2=a^2+b^2,\quad a'b'\sin\theta=ab. \tag{1}$$

Si l'on fait $PQ=2K$, les coordonnées de P par rapport aux diamètres $Cx$, CO sont K, $\sqrt{x^2+y^2}$; on a donc

$$\frac{K^2}{a'^2}+\frac{x^2+y^2}{b'^2}=1.$$

Enfin

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{y}{x},\quad \text{d'où}\quad \sin\theta=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

L'équation du lieu proposé s'obtient donc en éliminant $a'$, $b'$ entre les égalités

$$a'^2+b'^2=a^2+b^2,\quad a'^2b'^2y^2=a^2b^2(x^2+y^2),\quad \frac{K^2}{a'^2}+\frac{x^2+y^2}{b'^2}=1.$$

On trouve

$$a^2b^2(x^2+y^2)^2y^2+a^2b^2(x^2+y^2)[a^2b^2-(2K^2+a^2+b^2)y^2]$$
$$+K^2(a^2+b^2)y^2[(a^2+b^2)y^2-a^2b^2]+a^2b^2K^4y^2=0.$$

Le lieu est donc du sixième ordre. Il affecte deux formes différentes suivant que $K < b < a$ ou $b < K < a$. Dans le premier cas, il est formé de deux ovales séparées par l'axe PQ; dans le second cas, il affecte la forme d'un huit ayant son point double d'inflexion à l'origine O, ce que l'on explique aisément par cette circonstance que deux diamètres de l'ellipse viennent successivement coïncider avec PQ.

M. Déprez a résolu la même question.

---

## Question 761.

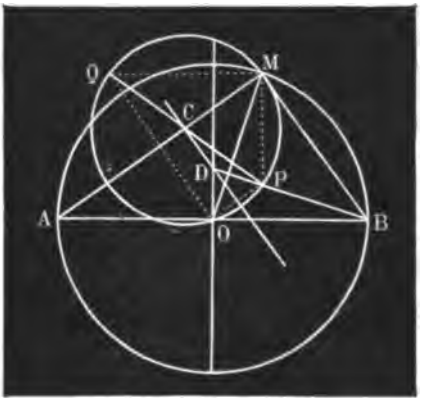
(Voir *Mathesis*, (2), II, p. 80.)

***Soient un cercle*** O, ***un diamètre fixe*** AB ***et un point*** M ***variable sur le cercle. On mène un cercle*** C ***passant par le point*** O ***et tangent en*** M ***à la droite*** BM. ***Trouver les lieux géométriques décrits par les extrémités*** P ***et*** Q ***du diamètre du cercle*** C, ***dont la direction est symétrique de celle de*** AM ***par rapport à*** AB. (MANDART.)

***Solution par*** M. SOLLERTINSKY. Soit Q le quatrième sommet du parallélogramme OBMQ. Puisqu'on a

$$\textit{angle}\,\mathrm{OMB} = \mathrm{OBM} = \mathrm{OQM},$$

le cercle OQM touche BM en M. Donc son centre C est sur AM, et par suite les droites AM et CQ sont également inclinées sur MQ ou sur AB.




L'autre extrémité P du diamètre CQ est évidemment l'orthocentre du triangle OMB; par suite BP est perpendiculaire à OM.

Soit D le point où BP rencontre la perpendiculaire menée en O sur OB. Les droites OM, OB étant symétriques par rapport à la direction OP, les droites BP, OD le sont aussi, d'où DP = DO. Par conséquent, le lieu de P est la strophoïde qui a pour foyer B, pour point double O et pour

directrice OD. La droite MQ étant égale et parallèle à BO ou OA, on a AQ = OM. Le lieu de Q est donc une circonférence égale à la circonférence donnée et ayant son centre en A.

Remarque. La droite CD étant perpendiculaire au milieu de OP, le symétrique de B par rapport à CD se meut sur la droite OD. La droite CD enveloppe donc une parabole ayant B pour foyer et OD pour directrice. Par suite, le lieu de C est la podaire, par rapport à cette parabole, du symétrique de son foyer par rapport à la directrice : c'est donc ***la trisectrice de Maclaurin*** (*).

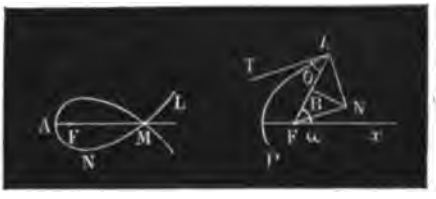
Solutions analytiques par MM. Brocard et Denys. Solution géométrique par M. Déprez, qui observe que le point C décrit une cubique et que la droite PQ enveloppe une courbe de la troisième classe.

---

## Question 764.

(Voir *Mathesis*, (2), II, p. 194.)

***Étant donnée une parabole*** P, ***on considère toutes les paraboles*** P′ ***qui ont même foyer que*** P ***et pour directrice une tangente quelconque menée à*** P. ***Trouver l'enveloppe des paraboles*** P′. (J. Neuberg.)




*Solution par* M. V. Jamet. Soient F le foyer de la parabole P, Fx la direction de l'axe, intérieure à la parabole, $\alpha$ l'angle que fait, avec Fx, la perpendiculaire menée du point F sur la directrice de P′. Le pied de cette perpendiculaire étant sur la tangente à la parabole P, en son sommet, le paramètre de P′ est égal à $\frac{-p}{\cos\alpha}$, $p$ désignant le demi-paramètre de P. L'équation de P′, en coordonnées polaires, est donc

$$\rho = \frac{-p}{\cos\alpha\,(1+\cos(\omega-\alpha))}, \qquad (1)$$

---

(*) La trisectrice a été étudiée dans le J. M. S; voir 1885, p. 176 et 1886, p. 205 (de Longchamps); 1885, pp. 172, 196, 219, 245 (P. H. Schoute); 1886, p. 255 (d'Ocagne).

ou bien

$$\cos\alpha\,(1+\cos(\omega-\alpha))=\frac{-\rho}{p}.$$

Donc P′ touche la courbe cherchée en un point dont l'angle $\omega$ vérifie l'équation

$$-\sin\alpha\,(1+\cos(\omega-\alpha))+\cos\alpha\sin(\omega-\alpha)=0$$

ou

$$\sin(\omega-2\alpha)-\sin\alpha=0.$$

Cette équation admet la solution

$$\omega=(2k+1)\,\pi+\alpha,$$

solution qui ne satisfait pas, en ce sens qu'elle donne, sur la parabole P′ le point situé sur son axe, à l'opposé du sommet. Mais elle admet aussi la solution

$$\omega=3\alpha+2k\pi$$

ou plus simplement $\omega=3\alpha$; car toute valeur entière de $k$ donne, sur P′, le même point. Donc on obtiendra l'équation de l'enveloppe cherchée en faisant $\alpha=\frac{\omega}{3}$ dans l'équation (1). On trouve ainsi :

$$\rho=\frac{-p}{2\cos^2\frac{\omega}{3}},$$

équation qui représente la courbe ci-jointe (fig. 1). En faisant varier $\omega$ de O à $\frac{3\pi}{2}$, on trouve la branche de courbe indéfinie ANML; en faisant varier $\omega$ de $\frac{3\pi}{2}$ à $3\pi$, on trouve la branche symétrique par rapport à Fx; on a $FA=\frac{1}{2}p$, $FM=4p$.

L'asymptote correspondant à $\omega=\frac{1}{2}\pi$ est rejetée à l'infini, car sa distance à l'origine est la limite vers laquelle tend la fonction

$$-\frac{p\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\omega\right)}{2\cos^2\frac{\omega}{3}}=\frac{p\cos\omega}{2\cos^2\frac{\omega}{3}}=\frac{p\left(4\cos^2\frac{\omega}{3}-3\right)}{2\cos^2\frac{\omega}{3}},$$

quand $\omega$ tend vers $\frac{3\pi}{2}$; et l'on voit que cette fonction croît alors au-delà de toute limite.

Voici maintenant quelques propriétés géométriques de cette courbe. Soit M un point commun à deux paraboles P′ infiniment voisines. Il est à égale distance de deux tangentes à la parabole P. Donc il est sur la bissectrice de l'un des angles qu'elles forment entre elles; savoir de l'angle obtus. Donc sa position limite est sur la normale à la parabole P, au point où celle-ci est touchée par la directrice de P′. Soit A ce point (fig. 2) et soit N la position limite du point M. Les distances NA, NF étant égales, on en conclut que la courbe ci-dessus est le lieu des centres des cercles passant par le point F, et tangents à la parabole P. De plus, la tangente au point N, à la parabole P′, doit être perpendiculaire à la droite FA, en son milieu B. Donc cette courbe est aussi, par rapport au point F, l'antipodaire d'une parabole homothétique de P, le rapport d'homothétie étant égal à $\frac{1}{2}$, et le centre d'homothétie étant au point F.

Enfin, le rayon AN du cercle considéré est le quart du rayon de courbure de la parabole P, au point A. En effet, si l'on désigne par $\theta$ l'angle que fait, avec FA, la tangente à la parabole P, par $\omega$ l'angle AF$x$, on trouve

$$AN = \frac{FA}{2\sin\theta} = \frac{p}{\sin\theta(1-\cos\omega)} = \frac{p}{\sin\theta(1-\cos 2\theta)} = \frac{p}{2\sin\theta},$$

et l'on sait que le rayon de courbure de P est égal à $\frac{2p}{\sin^3\theta}$.

M. Mandart a résolu la question de la même façon, par le calcul et par la géométrie; M. Ghuys a donné la même solution géométrique, M. Absalonne la même solution analytique; MM. Quint et de Bozōky se sont servis des coordonnées cartésiennes.

En général, si le foyer d'une parabole variable est en un point fixe F et que la directrice roule sur une courbe donnée $\Delta$, l'enveloppe de cette parabole est une antipodaire de F par rapport à une courbe homothétique de $\Delta$, le centre d'homothétie étant en F et le rapport de similitude ayant pour valeur $\frac{1}{2}$. (J. N.)

---

## QUESTIONS D'EXAMEN.

**527.** Trouver la condition exprimant que le cercle inscrit au triangle ABC passe par le centre du cercle circonscrit.

Réponse : $\sqrt{R^2-2Rr}=r$, ou $R=r(\sqrt{2}+1)$, ou $\cos A+\cos B+\cos C=\sqrt{2}$.

**588.** Quelle est, parmi les normales à une ellipse donnée, celle qui est la plus éloignée du centre de la courbe?

La distance $d$ du centre à la normale au point $(x, y)$ de l'ellipse a pour expression $\frac{c^2xy}{\sqrt{a^4y^2+b^4x^2}}$. On peut chercher le minimum de

$$\frac{c^4}{d^2}=\left(\frac{a^4}{x^2}+\frac{b^4}{y^2}\right)\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)=a^2+b^2+\left(\frac{a^4y^2}{b^2x^2}+\frac{b^4x^2}{a^2y^2}\right).$$

Le produit des deux derniers termes étant constant, le minimum de leur somme a lieu quand ils sont égaux.

**589.** Une parallèle à la base AB d'un triangle donné CAB rencontre AC en B', BC en A'; les cercles décrits sur BB' et AA' comme diamètres se coupent aux points I', Q. 1° Trouver le lieu des points P, Q lorsque la droite A'B' se déplace. 2° Déterminer le maximum ou le minimum de la distance PQ. 3° Chercher parmi les triangles ABC inscrits à un même cercle, celui pour lequel le minimum de la distance PQ est le plus grand.

(*Concours de la classe de mathématiques élémentaires*, 1891.)

Soient $CC_1$, $AA_1$, $BB_1$ les hauteurs du triangle ABC et H leur point de concours. Les cercles AA'P, BB'P passent respectivement par $A_1$ et $B_1$, et leurs centres sont sur une parallèle à AB; comme on a $HB.HB_1 = HA.HA_1$, H est un point d'égale puissance, et par suite la corde commune PQ est dirigée suivant la hauteur $CC_1$, et l'on a $HP.HQ = HB.HB_1$.

Si les angles A, B, C sont aigus, H est compris entre B et $B_1$, entre P et Q; le produit HP.HQ étant constant, la somme (arithmétique) HP + HQ ou la distance PQ est minimum lorsque HP = HQ, ou que H est équidistant de AB et A'B'. Le produit HP.HQ, lorsque le triangle ABC se déforme en restant inscrit dans un même cercle, est maximum si H coïncide avec le centre de ce cercle; car $HB.HB_1$ est la moitié de la puissance de H par rapport au cercle. C'est donc le triangle équilatéral qui résout la troisième partie de la question.

Si le triangle ABC est obtusangle, les points P et Q sont situés du même côté de H. Dans ce cas, les deux points P et Q se confondent et les cercles BB'P, AA'P touchent en P la hauteur $CC_1$, lorsque H est équidistant de AB et A'B'.

**590.** La racine cubique du produit de six nombres entiers consécutifs,

$$x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)(x+5),$$

est comprise entre

$$x^3+5x+3 \quad \text{et} \quad x^3+5x+4,$$

excepté lorsque $x = 1$. (GOULARD.)

**531.** Les projections d'une droite font avec la ligne de terre les angles $\alpha$, $\beta$; calculer l'angle de cette droite avec la ligne de terre.

(*Baccalauréat*, Caen, 1891.)

Si la droite rencontre la ligne de terre en B et que les projections d'un point M de la droite sur les plans de projections et sur la ligne de terre soient $m$, $m'$, $m''$, on a $mm'' = m''\mathrm{B}\,\mathrm{tg}\,\alpha$, $m'm'' = m''\mathrm{B}\,\mathrm{tg}\,\beta$, $\overline{\mathrm{M}m''}^2 = \overline{mm''}^2 + \overline{m'm''}^2$, $\mathrm{M}m'' = m''\mathrm{B}\,\mathrm{tg}\,x$, etc.

**532.** Discuter les racines de l'équation

$$\mathrm{F}(x) \equiv (a^2 - a - 2)\,x^2 + 2(a-1)\,x + 2 = 0.$$

Comment faut-il prendre $a$ pour que cette équation ait une racine et une seule comprise entre $-1$ et $+1$.

1° Racines réelles, si $a$ est compris entre $-\sqrt{5}$ et $+\sqrt{5}$; 2° Racines réelles de même signe si $a^2 - a - 2 > 0$ ou $a$ compris, soit entre 2 et $\sqrt{5}$, soit entre $-\sqrt{5}$ et $-1$; 3° Une seule racine est comprise entre $-1$ et $+1$ si le premier membre de l'équation proposée prend des signes différents pour $x=1$ et $x=-1$. Or F(1) est négatif pour $a$ compris entre 1 et $-2$; F$(-1)$ est négatif pour $a$ compris entre 1 et 2; donc F(1) et F$(-1)$ ont des signes contraires pour $a$ compris entre $-2$ et $+2$.

---

## QUESTIONS PROPOSÉES.

***775.** Mettre le nombre $x^{10} - 5^4 y^{10}$, où $x$ et $y$ sont des nombres entiers positifs, sous la forme d'un produit de trois facteurs rationnels.

(Éd. Lucas.)

**776.** Les parallèles menées par un point de l'ellipse de Steiner aux médianes du triangle, rencontrent les côtés opposés sur une droite. Étudier l'enveloppe de cette droite, lorsque le point se déplace sur l'ellipse. (E. Cesáro.)

**777.** Soient M, N deux points correspondants d'une ellipse et du cercle décrit sur le grand axe comme diamètre. Le rayon OM de l'ellipse rencontrant en P la tangente menée en N au cercle, on demande l'aire de la courbe engendrée par le point P. (Mandart.)

**778.** Soient M, N deux points complémentaires par rapport au triangle ABC; U, V leurs triangles podaires. Trouver les lieux décrits par ces points lorsqu'on donne une relation de la forme $m\mathrm{U} + n\mathrm{V} = p$. Ces lieux peuvent-ils être des droites? (Déprez.)

---

# RELATIONS MÉTRIQUES DANS LES COURBES DU SECOND DEGRÉ;

par Cl. Servais, professeur à l'Université de Gand.

**1.** Prenons pour axes des coordonnées la tangente et la normale en un point M d'une conique; l'équation de la courbe est

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2fy = 0.$$

Soit $\rho$ le rayon de courbure de la courbe au point M, $n$ la corde normale, $t$ la portion de la tangente comprise entre le point M et le pôle de la corde normale; on trouve aisément

$$\rho = -\frac{f}{a}, \quad t = -\frac{f}{h}, \quad n = -\frac{2f}{b};$$

l'équation peut donc s'écrire

$$\frac{x^2}{\rho} + \frac{2xy}{t} + \frac{2y^2}{n} - 2y = 0.$$

**2.** Les coefficients angulaires des asymptotes sont les racines de l'équation

$$\frac{2z^2}{n} + \frac{2z}{t} + \frac{1}{\rho} = 0;$$

donc si $\alpha$ et $\beta$ sont les angles que ces droites font avec la normale, on a les relations :

$$\operatorname{tg}\alpha . \operatorname{tg}\beta = \frac{2\rho}{n}, \quad \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = -\frac{2\rho}{t}.$$

**3.** Les coefficients angulaires des axes sont les racines de l'équation

$$\frac{1}{t}z^2 + \left(\frac{1}{\rho} - \frac{2}{n}\right)z - \frac{1}{t} = 0;$$

donc si $\alpha_1$ et $\beta_1$ sont les angles que les axes font avec la tangente au point M on a

$$\operatorname{tg}\alpha_1 + \operatorname{tg}\beta_1 = t\left(\frac{2}{n} - \frac{1}{\rho}\right).$$

**4.** Dans le cas de la parabole,

$$ab - h^2 = 0;$$

donc en chaque point d'une parabole,

$$\rho n = 2t^2.$$

5. L'équation du diamètre passant par M est

$$\frac{x}{\rho} + \frac{y}{t} = 0;$$

donc si $\delta$ est l'angle aigu que ce diamètre fait avec la normale, on a

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{\rho}{t}.$$

6. Soient C et $C_1$ les cordes interceptées par la conique sur les bissectrices des angles formés par la tangente et la normale; les coordonnées des extrémités de ces cordes seront

$$x = y = \frac{C}{\sqrt{2}}, \quad -x = y = \frac{C_1}{\sqrt{2}};$$

on a donc

$$\frac{1}{\rho} + \frac{2}{t} + \frac{2}{n} = \frac{2\sqrt{2}}{C}, \quad \frac{1}{\rho} - \frac{2}{t} + \frac{2}{n} = \frac{2\sqrt{2}}{C_1}.$$

---

## SUR QUELQUES PROBLÈMES CONCERNANT LE DOUBLE CONTACT ET LE CONTACT DU TROISIÈME ORDRE DES CONIQUES(*);

par M. V. Retali, Professeur à Milan.

1. Problème. *Décrire une conique qui ait un double contact avec une hyperbole donnée* $K^2$, *qui passe par son centre, touche une des directrices, et dont le pôle de contact tombe sur une droite donnée.*

*Solution.* Je décris le cercle ayant pour centre le foyer correspondant à la directrice donnée et pour rayon le demi-axe non transversé de

---

(*) Les problèmes sur les coniques ayant avec une conique donnée un double contact ou un contact du troisième ordre ont été traités par Poncelet (*Traité des Propriétés projectives*), Steiner (*Journal de Crelle*, t. XLIV), et Chasles (*Traité des sections coniques*). Pour quelques-unes des nouvelles questions résolues par M. Retali, nous indiquons plus loin une démonstration analytique, ce qui permettra à nos jeunes lecteurs de suivre en partie l'intéressant article de M. Retali. L'abondance des matières et la nature spéciale des questions traitées sont la cause du retard qu'a subi la publication de cet article. (J. N.)

l'hyperbole donnée ; la droite donnée coupe ce cercle en deux points qui sont les pôles de contact de deux coniques satisfaisant à la question.

Remarque. Si la conique donnée, au lieu d'être une hyperbole, est une ellipse, il suffit de remplacer le cercle indiqué dans la solution qui précède, par son cercle imaginaire conjugué (complémentaire).

2. *Décrire une conique qui ait un double contact avec un cercle donné, qui passe par son centre, touche une droite donnée, et dont la corde de contact passe par un point donné.*

Les tangentes menées par le point donné au cercle qui coupe orthogonalement le cercle donné sur la droite donnée, sont les cordes de contact de deux coniques résolvant le problème.

3. *Décrire une parabole qui ait un double contact avec un cercle donné, qui passe par un point donné* R, *et dont la corde de contact passe par un point donné* A.

Les tangentes menées par le point A au cercle ayant R pour centre et coupant orthogonalement le cercle donné, sont les cordes de contact de deux paraboles satisfaisant au problème.

4. *Décrire une conique qui ait un contact du troisième ordre avec une conique donnée et dont un point donné soit un foyer.*

Les axes (rayons conjugués rectangulaires) de l'involution des couples de droites menées par le point donné et conjuguées par rapport à la conique donnée, coupent cette conique en quatre points qui sont les pôles de contact de quatre coniques résolvant la question.

5. *Décrire une conique qui ait un double contact avec un cercle donné, qui passe par le centre* R *de ce cercle et par deux autres points* P, Q.

Si nous appelons P′ et P″, Q′ et Q″, les points d'intersection des rayons RP, RQ, avec le cercle qui coupe orthogonalement le cercle donné sur la droite PQ, les droites P′Q′, P″Q″, P′Q″, P″Q′ sont les cordes de contact des coniques satisfaisant à la question.

6. *Décrire une parabole tangente à deux droites a, b et ayant un double contact avec une conique donnée* $K^2$.

Appelons $H^2$ la conique ayant pour asymptotes les tangentes menées à la conique donnée $K^2$ par le point $(ab)$ et tangente aux asymptotes de la même conique aux points d'intersection de ses asymptotes avec la polaire du point $ab$ par rapport à $K^2$ : les tangentes de $H^2$ parallèles à $a$, $b$ forment un parallélogramme dont les sommets sont les pôles de contact des coniques cherchées.

7. *Décrire une parabole qui ait un double contact avec un cercle donné et dont le foyer soit en un point donné.*

Construisons le cercle orthogonal au cercle donné et ayant pour centre le point donné : les foyers de la conique polaire réciproque de ce cercle par rapport au cercle donné, sont les pôles de contact de quatre coniques satisfaisant à la question.

8. *Décrire une conique tangente à deux droites a, b ayant un double contact avec un cercle donné et passant par son centre.*

Les tangentes communes aux deux cercles qui coupent orthogonalement le cercle donné sur les droites données, sont les cordes de contact de quatre coniques satisfaisant à la question.

9. *Décrire par un point donné* A *et par le centre* R *d'un cercle* $K^2$, *une conique qui ait un contact du troisième ordre avec ce cercle.*

Soient E, F les deux points qui sont harmoniquement séparés par A, R et par le cercle donné : les polaires de ces points coupent le cercle donné aux points d'osculation de quatre coniques résolvant la question.

10. *Décrire une parabole dont on connaît la direction des diamètres, qui passe par un point donné et ait un double contact avec un cercle donné.*

Menons le cercle ayant pour centre le point donné et orthogonal au cercle donné : les tangentes menées au cercle ainsi tracé perpendiculairement à la direction donnée des diamètres, sont les cordes de contact de deux coniques qui résolvent la question.

(*A continuer.*)

---

## THÉORIE DES PLANS HYPERCYCLIQUES DES SURFACES DU SECOND DEGRÉ;

par M. Joseph Gillet, Docteur en sciences physiques et mathématiques, professeur à l'École Abbatiale de Maredsous.

Suite, voir *Mathesis*, (2), II, p. 153.

10. *Lieu des centres des sections hypercycliques.* Les centres des sections parallèles au plan (1) sont situés sur le diamètre

$$\frac{a^2\alpha}{x} = \frac{b^2\beta}{y} = -\frac{c^2\gamma}{z} \qquad (19)$$

conjugué à ce plan ; si de plus la condition (5) est vérifiée, les sections

seront des hyperboles équilatères. En éliminant $\alpha, \beta, \gamma$ entre les équations (19) et (5), on voit que les diamètres (19) sont les génératrices du cône

$$\frac{b^2 - c^2}{a^2}x^2 + \frac{a^2 - c^2}{b^2}y^2 - \frac{a^2 + b^2}{c^2}z^2 = 0; \qquad (20)$$

en d'autres termes, *le lieu des centres de toutes les sections hypercycliques de l'hyperboloïde* (2) *est un cône du second ordre* (20). Ce théorème s'applique évidemment au cône asymptote (12).

**11**. *Étude du cône des centres.* Les axes et les plans principaux de ce cône ont même direction que ceux de l'hyperboloïde (2).

On sait que les plans cycliques d'un cône sont parallèles au plus grand des deux axes réels; si donc $a^2 > b^2 > c^2$, la direction des plans cycliques de (20) est donnée par l'équation

$$\left(\frac{a^2}{b^2 - c^2} - \frac{b^2}{a^2 - c^2}\right)\frac{c^2}{a^2 + b^2}y^2 - \left(\frac{a^2}{b^2 - c^2} + \frac{c^2}{a^2 + b^2}\right)\frac{b^2}{a^2 - c^2}z^2 = 0,$$

qui, après simplifications, se réduit à

$$(a^2 - b^2)c^2y^2 - (a^2 + c^2)b^2z^2 = 0. \qquad (11)$$

Cette équation n'est autre que celle des plans cycliques de l'hyperboloïde donné et de son cône asymptote; on arrive aux mêmes résultats dans l'hypothèse $a^2 > c^2 > b^2$; donc *le cône des centres* (20) *est homocyclique avec l'hyperboloïde* (2), *et avec le cône asymptote* (12); d'où le théorème corrélatif :

*Le supplémentaire du cône des centres*

$$\frac{a^2x^2}{b^2 - c^2} + \frac{b^2y^2}{a^2 - c^2} - \frac{c^2z^2}{a^2 + b^2} = 0 \qquad (21)$$

*et le supplémentaire* (13) *du cône asymptote sont homofocaux.*

**12**. *Conséquences des* §§ **5** *et* **11**. En rapprochant ces résultats des théorèmes du § **5**, on voit que *le cône asymptote, le cône des centres, et le supplémentaire du cône enveloppe sont trois surfaces homocycliques.*

*Le cône enveloppe et les supplémentaires du cône asymptote et du cône des centres sont trois surfaces homofocales.*

A la droite polaire d'un plan hypercyclique du cône asymptote (12) correspond le plan de contact de deux plans rectangulaires tangents au

cône (13) supplémentaire du cône asymptote; ce plan de contact est perpendiculaire à la droite polaire du plan hypercyclique ; par conséquent, il est tangent au cône (21) supplémentaire du cône des centres. Donc *le plan de contact de deux plans rectangulaires tangents à un cône du second ordre* (13), *enveloppe un autre cône du second ordre* (21), *homofocal au premier.*

**13.** *Intersection du cône des centres et de l'hyperboloïde.* L'ensemble des équations

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1, \tag{2}$$

$$\frac{b^2-c^2}{a^2}x^2+\frac{a^2-c^2}{b^2}y^2-\frac{a^2+b^2}{c^2}z^2=0, \tag{20}$$

représente l'intersection de l'hyperboloïde donné et du cône des centres; si de l'équation (2), multipliée par $a^2+b^2-c^2$, on retranche (20), on trouve

$$x^2+y^2+z^2=a^2+b^2-c^2, \tag{21}$$

équation de la sphère de Monge, c'est-à-dire du lieu des sommets des trièdres trirectangles dont les faces sont tangentes à l'hyperboloïde. Par suite :

*L'intersection du cône des centres* (20) *et de l'hyperboloïde* (2) *est une conique sphérique située sur la sphère de Monge.*

En tout point de cette conique sphérique, le plan tangent à la surface est parallèle à un plan hypercyclique; en d'autres termes, l'indicatrice en chacun des points de cette conique sphérique est une hyperbole équilatère. D'après une propriété connue, la somme des courbures principales de la surface au point considéré est nulle ; c'est-à-dire qu'en ce point la courbure moyenne est nulle; donc :

*La conique sphérique considérée est une ligne à courbure moyenne nulle de l'hyperboloïde.*

**14.** *Recherche analytique des lignes à courbure moyenne nulle de l'hyperboloïde.* La recherche analytique des lignes à courbure moyenne nulle de l'hyperboloïde peut se faire de la manière suivante.

Soit :

$$F(x, y, z)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0 \tag{2}$$

l'équation de l'hyperboloïde; les lignes cherchées doivent vérifier la relation

$$(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)\,t = 0,$$

dans laquelle $p, q, r, s, t$ sont les dérivées partielles

$$\frac{\partial z}{\partial x},\quad \frac{\partial z}{\partial y},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

On trouve facilement

$$p = \frac{c^2 x}{a^2 z},\quad q = \frac{c^2 y}{b^2 z},$$

$$r = \frac{c^2(a^2z^2 - c^2x^2)}{a^4 z^3},\quad s = -\frac{c^4 xy}{a^2 b^2 z^3},\quad t = \frac{c^2(b^2z^2 - c^2y^2)}{b^4 z^3}.$$

Au moyen de ces valeurs, l'équation aux dérivées partielles devient

$$(b^4z^2 + c^4y^2)(a^2z^2 - c^2x^2) - 2c^6x^2y^2 + (a^4z^2 + c^4y^2)(b^2z^2 - c^2y^2) = 0; \quad (22)$$

faisant la réduction des termes semblables, puis supprimant le facteur commun $z^2$, on trouve

$$(b^2 - c^2)\,b^2c^2x^2 + (a^2 - c^2)\,a^2c^2y^2 - (a^2 + b^2)\,a^2b^2z^2 = 0,$$

équation équivalente à (20).

**15.** *Génératrices rectangulaires de l'hyperboloïde.* Le plan tangent en un point de l'hyperboloïde (2) coupe cette surface suivant deux génératrices, qui sont parallèles aux asymptotes des sections planes parallèles au plan tangent. Conséquemment, les plans qui touchent l'hyperboloïde en un point de la conique sphérique considérée ci-dessus, coupent cet hyperboloïde suivant deux génératrices rectangulaires; donc *la conique sphérique, intersection du cône des centres* (20) *et de l'hyperboloïde* (2), *est le lieu des points de cette dernière surface où les génératrices se coupent à angle droit.*

Cette propriété peut se démontrer directement de la manière suivante :

Soient M un point de l'hyperboloïde; MA, MB deux génératrices rectangulaires. Le plan MAB sera tangent à la surface au point M. Par la normale MC et par chacune des génératrices AM, MB menons deux plans; ces deux plans seront tangents à la surface (*). Par conséquent,

(*) *Dans une surface gauche, tout plan mené par une génératrice rectiligne est tangent à la surface en un certain point de cette génératrice.*

M est le point d'intersection de trois plans tangents rectangulaires ; il appartient donc à la sphère de Monge.

**16.** ***Intersection du cône des centres et du cône asymptote.*** Les équations (12) et (20) résolues par rapport à $x^2$, $y^2$, $z^2$ donnent

$$\frac{x^2}{a^2(b^2+c^2)} = \frac{y^2}{b^2(a^2+c^2)} = \frac{-z^2}{c^2(a^2-b^2)} \tag{23}$$

pour équations des génératrices communes au cône des centres et au cône asymptote. Ces génératrices sont imaginaires ; conséquemment, ***le cône des centres et le cône asymptote ne se rencontrent pas.***

**17.** ***Plans tangents au cône des centres.*** Menons un plan tangent au cône (20) ; la génératrice de contact rencontre l'hyperboloïde (2) en un point de la conique sphérique considérée ; conséquemment, la tangente à la conique en ce point est perpendiculaire à la génératrice de contact ; cette génératrice est donc un axe de la section déterminée dans l'hyperboloïde par le plan tangent. Par suite, ***les sections diamétrales dont un des axes est constant et égal au rayon de la sphère de Monge, enveloppent le cône des centres des sections hypercycliques.***

On arrive à la même conclusion en faisant

$$R^2 = a^2 + b^2 - c^2$$

dans l'équation (3) aux carrés des demi-axes ; on trouve alors que le plan sécant (1) vérifie la relation

$$\frac{a^2\alpha^2}{b^2-c^2} + \frac{b^2\beta^2}{a^2-c^2} - \frac{c^2\gamma^2}{a^2+b^2} = 0, \tag{24}$$

c'est-à-dire qu'il est tangent au cône des centres.

**18.** ***Lieu des axes de ces sections.*** La génératrice de contact, c'est-à-dire l'un des axes, a pour équations

$$\frac{b^2-c^2}{a^2\alpha}x = \frac{a^2-c^2}{b^2\beta}y = -\frac{a^2+b^2}{c^2\gamma}z. \tag{25}$$

Le second axe de la section est déterminé par les équations

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = 0, \tag{1}$$

$$\frac{a^2\alpha}{b^2-c^2}x + \frac{b^2\beta}{a^2-c^2}y - \frac{c^2\gamma}{a^2+b^2}z = 0, \tag{26}$$

dont la première représente le plan diamétral perpendiculaire à la droite (25). Ces équations résolues par rapport à $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ donnent

$$\frac{\alpha}{(b^4-c^4)yz}=\frac{-\beta}{(a^4-c^4)zx}=\frac{\gamma}{(a^4-b^4)xy}, \tag{27}$$

et en éliminant $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ entre (27) et (24) on trouve, pour lieu du second axe, le cône :

$$\frac{(b^4-c^4)^2}{b^2-c^2}a^2y^2z^2+\frac{(a^4-c^4)^2}{a^2-c^2}b^2z^2x^2-\frac{(a^4-b^4)^2}{a^2+b^2}c^2x^2y^2=0. \tag{28}$$

**19.** *Intersection du cône des centres et du cône enveloppe.* Les équations (8) et (20) résolues par rapport à $x^2$, $y^2$, $z^2$ donnent pour équations des génératrices communes au cône enveloppe et au cône des centres :

$$\left.\begin{aligned}\frac{x^2}{a^2(b^4-c^4)(2a^2+b^2-c^2)}&=\frac{y^2}{b^2(a^4-c^4)(a^2+2b^2-c^2)}\\&=\frac{-z^2}{c^2(a^4-b^4)(a^2+b^2-2c^2)}\end{aligned}\right\} \tag{29}$$

Si $a^2>b^2>c^2$ les trois dénominateurs sont positifs et par suite, les droites (29) sont imaginaires.

Supposons $a^2>c^2>b^2$; les dénominateurs de $x^2$ et de $y^2$ sont alors positifs; le troisième dénominateur n'est positif que si l'on a $a^2+b^2>2c^2$; dans ce cas, les droites sont encore imaginaires.

Mais si l'on a $a^2+b^2<2c^2$, le dénominateur de $z^2$ est négatif et les droites (29) sont réelles. Donc, *si la condition* $(a^2+b^2<2c^2)$ *est vérifiée, le cône enveloppe et le cône des centres se coupent suivant quatre droites réelles, symétriques par rapport aux axes coordonnés.*

En particulier, lorsque $a^2+b^2=2c^2$, ces quatre droites se réduisent à deux situées dans le plan des $xy$, et suivant lesquelles les deux cônes sont tangents.

**20.** *Plans tangents communs au cône des centres et au cône enveloppe.* Le cône enveloppe et le cône des centres sont réciproques, en ce sens qu'à tout plan tangent de l'un correspond sur l'autre une génératrice qui est, par rapport à l'hyperboloïde, le diamètre conjugué du plan tangent. De même, à toute génératrice de l'un des cônes correspond, dans l'autre cône, un plan tangent qui est, par rapport à l'hyperboloïde, le plan conjugué de cette génératrice.

D'après cela, si nous considérons un plan tangent commun aux deux

cônes, le diamètre conjugué devra se trouver à la fois sur chacun d'eux ; c'est donc une des génératrices communes. Par conséquent, *les quatre plans tangents communs au cône des centres et au cône enveloppe ont pour diamètres conjugués les quatre génératrices communes de ces cônes.*

D'après le § 17, les sections déterminées dans l'hyperboloïde par ces quatre plans tangents sont des hyperboles équilatères dont les carrés des demi-axes sont égaux à $\pm (a^2 + b^2 - c^2)$.

Les équations de ces plans tangents s'obtiennent en exprimant que les coefficients $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ de l'équation

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$$

vérifient les relations

$$a^2 (b^2 - c^2)\alpha^2 + b^2 (a^2 - c^2)\beta^2 - c^2 (a^2 + b^2)\gamma^2 = 0, \qquad (5)$$

$$\frac{b^2 - c^2}{a^2\alpha^2} + \frac{a^2 - c^2}{b^2\beta^2} - \frac{a^2 - b^2}{c^2\gamma^2} = 0; \qquad (24)$$

puis éliminant $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ entre ces trois équations; on trouve

$$\left.\begin{aligned} &\frac{x}{a}\sqrt{(b^4 - c^4)(2a^2 + b^2 - c^2)} \\ \pm &\frac{y}{b}\sqrt{(a^4 - c^4)(2b^2 - c^2 + a^2)} \\ \pm &\frac{z}{c}\sqrt{(a^4 - b^4)(2c^2 - a^2 - b^2)} = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (30)$$

Eu égard à ce qui précède, on peut encore énoncer les deux théorèmes suivants, d'ailleurs faciles à démontrer directement :

*Les huit plans tangents aux deux cônes suivant les quatre génératrices communes* (29) *ont pour diamètres conjugués les huit génératrices de contact des quatre plans tangents* (30).

*Les sections hypercycliques dont les carrés des axes sont proportionnels à* $\pm (a^2 + b^2 - c^2)$, *ont leurs centres distribués sur les quatre génératrices communes au cône enveloppe et au cône des centres.*

**21.** *Lieu des axes des sections diamétrales hypercycliques.* D'après un théorème dû à M. Gilbert(*), les axes d'une section centrale sont à l'intersection du plan sécant

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$$

(*) Gilbert, loc. cit., p. 248, § 2.

et du cône

$$a^2\alpha\,(b^2+c^2)\,yz - b^2\beta\,(a^2+c^2)\,zx - c^2\gamma\,(a^2-b^2)\,xy = 0. \quad (31)$$

Mais si le plan sécant est hypercyclique, on a aussi

$$a^2\alpha^2\,(b^2-c^2) + b^2\beta^2\,(a^2-c^2) - c^2\gamma^2\,(a^2+b^2) = 0; \quad (5)$$

éliminant $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ entre ces trois équations, on trouve pour le lieu cherché

$$\left.\begin{aligned} &-a^2\,(b^2-c^2)\,[(a^2-b^2)\,c^2y^2 - (a^2+c^2)\,b^2z^2]^2\,x^2 \\ &+b^2\,(a^2-c^2)\,[(b^2+c^2)\,a^2z^2 + (a^2-b^2)\,c^2x^2]^2\,y^2 \\ &+c^2\,(a^2+b^2)\,[(c^2+a^2)\,b^2x^2 + (c^2+b^2)\,a^2y^2]^2\,z^2 = 0. \end{aligned}\right\} \quad (32)$$

Cette équation représente un cône du sixième degré; les quantités entre crochets, égalées à zéro, donnent les équations des plans cycliques de l'hyperboloïde (2).

**28.** *Cas particuliers.* 1° Lorsque les axes vérifient la relation

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2} = 0, \quad (a^2 > b^2) \quad (33)$$

l'hyperboloïde (2) est dit *équilatère* (*). Dans ce cas, *le cône enveloppe* (8) *se réduit au cône* (13) *supplémentaire du cône asymptote*. Le lieu des centres a pour équation

$$\frac{x^2}{a^6} + \frac{y^2}{b^6} - \frac{z^2}{c^6} = 0; \quad (34)$$

*c'est donc un cône dont les axes sont proportionnels aux cubes des axes de la surface.*

2° Si les axes vérifient l'équation

$$a^2 + b^2 - c^2 = 0, \quad (a^2 > b^2) \quad (35)$$

on a un hyperboloïde *orthogonal;* cette condition exige que $c$ soit le plus grand des axes; conséquemment, dans ce cas, *il n'y a pas de sections hypercycliques réelles.*

## II. Hyperboloïde à deux nappes.

**29.** L'hyperboloïde à une nappe

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad (2)$$

(*) Schröter, *Theorie der Oberflächen zweiter Ordnung und der Raumcurven dritter Ordnung*, Leipzig 1880, p. 197.

son conjugué

$$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \tag{2'}$$

et leur cône asymptote commun

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0 \tag{12}$$

sont coupés par un même plan suivant des courbes semblables. Ce que nous avons dit de l'hyperboloïde à une nappe s'applique donc à l'hyperboloïde à deux nappes, à part toutefois ce qui a rapport aux génératrices rectilignes.

## III. Paraboloïde hyperbolique.

**24.** *Condition pour qu'un plan donné soit hypercyclique.* Le plan représenté par

$$\alpha x+\beta y+\gamma z=0 \tag{36}$$

détermine dans la surface définie par l'équation

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\frac{2z}{c} \tag{37}$$

une section dans les carrés des demi-axes sont les racines $R_1^2$, $R_2^2$ de l'équation

$$\frac{Ka^2\alpha^2}{cR^2-Ka^2}-\frac{Kb^2\beta^2}{cR^2-Kb^2}-\gamma^2=0, \tag{38}$$

ou

$$c^2\gamma^2R^4-[a^2\alpha^2-b^2\beta^2+(a^2-b^2)\gamma^2]\,KcR^2-K^2a^2b^2=0, \tag{39}$$

dans laquelle on a posé

$$a^2\alpha^2-b^2\beta^2=Kc\gamma^2\ (*). \tag{40}$$

Pour que la section soit une hyperbole équilatère, il faut que la somme $R_1^2+R_2^2$ soit nulle, c'est-à-dire que

$$a^2\alpha^2-b^2\beta^2+(a^2-b^2)\gamma^2=0. \tag{41}$$

Cette condition exige que l'on ait $a^2>b^2$.

---

(*) Barbarin, loc. cit., p. 49, § 11.

Lorsqu'elle est vérifiée, on trouve, pour carrés des demi-axes de la section,

$$R^2 = \pm \frac{Kab}{c\gamma}, \tag{42}$$

et pour équations des axes :

$$\left.\begin{aligned} \frac{cR^2 - a^2K}{a^2\alpha}\left(x + \frac{a^2\alpha}{c\gamma}\right) + \frac{cR^2 + b^2K}{-b^2\beta}\left(y - \frac{b^2\beta}{c\gamma}\right) = 0 \\ \alpha x + \beta y + \gamma z = 0 \end{aligned}\right\} \tag{43}$$

$R^2$ étant à remplacer par l'une des valeurs (42).

**25.** ***Enveloppe des plans hypercycliques passant par le sommet du paraboloïde.*** La relation (41) nous apprend que les plans hypercycliques qui passent par l'origine enveloppent le cône parabolique

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{a^2 - b^2} = 0; \tag{44}$$

la génératrice de contact a pour équations :

$$\frac{x}{a^2\alpha} = -\frac{y}{b^2\beta} = \frac{z}{(a^2 - b^2)\gamma}. \tag{45}$$

Les lignes focales

$$z = 0, \quad \frac{x^2}{b^2} - \frac{y^2}{a^2} = 0, \tag{46}$$

du cône enveloppe (44) sont respectivement perpendiculaires aux plans directeurs

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \tag{47}$$

du paraboloïde. En résumé :

***Les plans hypercycliques qui passent par le sommet du paraboloïde*** (37) ***enveloppent un cône parabolique dont les droites focales sont perpendiculaires aux plans directeurs de ce paraboloïde.***

En combinant les équations (44) et (37), on trouve :

$$x = 0 \quad \text{et} \quad z = -\frac{2(a^2 - b^2)}{c}; \tag{48}$$

la première de ces équations représente le plan des $xy$; il coupe le paraboloïde suivant les traces des plans directeurs. La seconde représente un

plan perpendiculaire à l'axe de la surface ; il coupe donc celle-ci suivant une hyperbole.

On conclut de là que *le cône enveloppe* (44) *passe par les traces des plans directeurs sur le plan tangent au sommet, et rencontre le paraboloïde donné suivant une hyperbole dont le plan est perpendiculaire à l'axe de ce paraboloïde.*

On peut encore observer que *tout plan perpendiculaire à l'axe du paraboloïde rencontre cette surface et le cône enveloppe suivant deux hyperboles semblables et semblablement placées.*

Lorsque les plans hypercycliques, au lieu de passer par l'origine, sont issus d'un point $(\xi, \eta, \zeta)$, ils enveloppent le cône

$$\frac{(x-\xi)^2}{a^2} - \frac{(y-\eta)^2}{b^2} + \frac{(z-\zeta)^2}{a^2-b^2} = 0. \tag{49}$$

**86.** *Droites rectangulaires des plans directeurs.* Les plans hypercycliques menés par le sommet du paraboloïde rencontrent les plans directeurs (47) suivant deux droites rectangulaires ; par conséquent, *si autour d'un point pris sur l'intersection de deux plans fixes, on fait tourner un angle droit dont les côtés se meuvent dans les deux plans fixes, le plan de cet angle enveloppera un cône du second degré tangent aux deux plans fixes et dont les lignes focales seront perpendiculaires à ces deux plans* (*).

D'où le théorème corrélatif : *Si, autour de deux droites fixes qui se rencontrent, on fait tourner deux plans rectangulaires, leur intersection engendrera un cône du second degré passant par les deux droites fixes et dont les plans cycliques sont perpendiculaires à ces deux droites* (*).

**87.** *Lieu des centres des sections hypercycliques.* En opérant comme dans le cas de l'hyperboloïde (§ 10), on trouve que *le lieu des centres des sections hypercycliques du paraboloïde* (37) *est le cylindre hyperbolique :*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{a^2-b^2}{c^2} = 0. \tag{50}$$

*Ce cylindre est asymptotique aux plans directeurs ;* il rencontre le paraboloïde suivant une hyperbole située dans le plan

$$z = -\frac{a^2-b^2}{2c}, \tag{51}$$

(*) Chasles, *Mémoire de géométrie pure sur les propriétés générales des cônes du second degré* (Nouv. Mém. Acad. Brux., 1830, p. 40).

et le cône enveloppe suivant deux hyperboles dont les plans ont pour équations :

$$z = \pm \frac{a^2 - b^2}{c}; \qquad (52)$$

par conséquent, *le cylindre des centres* (50) *coupe le paraboloïde donné et le cône enveloppe* (44) *suivant des hyperboles situées dans des plans perpendiculaires à l'axe du paraboloïde.*

On démontrerait, comme pour l'hyperboloïde (§§ 12 et 15), que l'hyperbole déterminée par le plan (51) est le lieu des points du paraboloïde où les génératrices sont rectangulaires, et qu'en même temps c'est une ligne à courbure moyenne nulle de cette surface.

**18.** *Recherche analytique des lignes à courbure moyenne nulle du paraboloïde.* Remplaçons dans l'équation

$$(1 + q^2)\, r - 2pqs + (1 + p^2)\, t = 0$$

les quantités $p$, $q$, $r$, $s$, $t$ par leurs valeurs déduites de (37) nous aurons

$$p = \frac{cx}{a^2}, \quad q = -\frac{cy}{b^2}, \quad r = \frac{c}{a^2}, \quad s = 0, \quad t = -\frac{c}{b^2};$$

au moyen de ces valeurs, l'équation aux dérivées partielles devient après réductions :

$$b^2c^2x^2 - a^2c^2y^2 + a^2b^2(a^2 - b^2) = 0.$$

Cette équation n'est autre que celle du cylindre des centres, résultat qui s'accorde avec ce qui précède.

**19.** *Paraboloïde équilatère.* Lorsque les plans directeurs sont perpendiculaires ($a = b$), on dit que le paraboloïde est *équilatère* (*); les résultats précédents se simplifient et donnent lieu au théorème suivant :

*Les plans hypercycliques d'un paraboloïde hyperbolique équilatère sont perpendiculaires à l'axe de la surface; cet axe est le lieu des centres des sections qu'ils déterminent.*

(*A continuer.*)

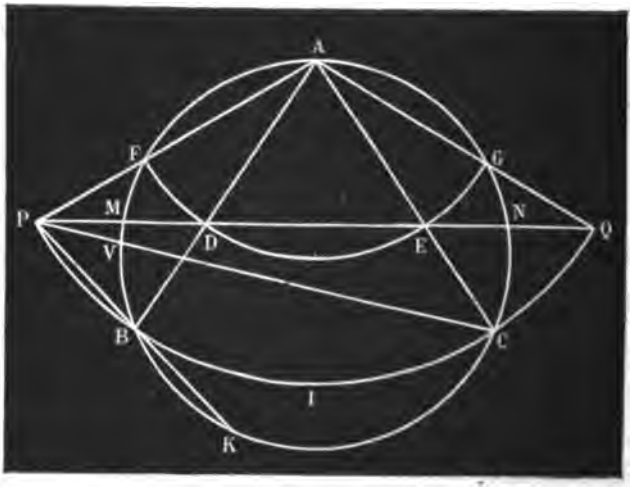
---

(*) Steiner, *Systematische Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten* etc. — Berlin, 1832, p. 210.

## *NOTES MATHÉMATIQUES.

*11. *Construction de la moyenne proportionnelle entre deux longueurs données a, b*; par M. Léon Collette, professeur agrégé. — La solution classique de ce problème exige huit opérations du compas et trois de la règle. La solution suivante n'emploie que quatre opérations du compas et trois de la règle.

Traçons une circonférence O avec un rayon visiblement plus grand que la moitié de la plus grande des longueurs *a, b*. D'un point quelconque A de cette ligne pris pour centre, avec les rayons *a* et *b* traçons deux arcs de cercle coupant la première circonférence respectivement en B et C, F et G. Le second arc de cercle rencontre les droites AB, AC aux points D, E; la droite DE rencontre la circonférence O aux points M, N. La corde AM est moyenne proportionnelle entre les droites AD et AB; car les triangles AMD, ABM sont équiangles.




Remarques. 1° Soient P,Q les points de rencontre de la corde MN avec les cordes AF, AG. On a $\overline{AM}^2 = AF.AP$; d'où il résulte que *les droites* DE, AF *et l'arc* BIC *se coupent en un même point* P.

2° *La droite* PB *passe au milieu* K *de l'arc* FBC.

En effet, si l'on égale les mesures des angles égaux APB, ABP prises dans le cercle O, on trouve *arc* FBK = KC.

3° *La droite* PC *passe au milieu* V *de l'arc* FB.

Car les angles APC, ACP sont égaux.

4° *La droite* KV *est perpendiculaire au milieu de* PF.

K étant le milieu de l'arc FBC, les cordes KC, KF sont égales ; de plus, les angles KPC, KCV ayant même mesure, on a KF = KC = KP. Par analogie, VB = VF = VP.

5° K *est le centre du cercle circonscrit au trapèze* PFEC *et* V *le centre du cercle circonscrit au trapèze* PFDB.

6° K *est l'orthocentre du triangle* PAV, *et* V *est l'orthocentre du triangle* PAK.

7° *Les quadrilatères* ADVP, AEKP *sont inscriptibles.*

8° *Les points* V, D, G *sont en ligne droite.*

En effet, le quadrilatère ADVP étant inscriptible, les angles PDV, PAV sont égaux; leurs mesures prises dans le cercle O sont donc égales, etc.

9° *Les points* K, E, G *sont en ligne droite.*

**12**. *Cas particuliers du paradoxe de Cramer* (*). M. Socoloff, de Kieff (Russie), nous communique les propositions suivantes :

I. *Dans un triangle* ABC, *on mène deux droites* L *et* L' *qui coupent les côtés en* $a, b, c$ *et* $a', b', c'$. *Démontrer que les droites* $ab', bc', ca'$ *coupent respectivement* AB, BC, CA *en trois points* $a'', b'', c''$ *situées en ligne droite. Les droites* $a'b, b'c, c'a$ *jouissent de la même propriété.*

II. *On donne une conique* $\Sigma$ *et une droite* $\lambda$. *Deux sécantes quelconques* L *et* L' *coupent* $\Sigma$ *et* $\lambda$ *aux points* $a, b, c$ *et* $a', b', c'$. *Démontrer que les droites* $ab', bc', ca'$ *coupent* $\lambda$ *et* $\Sigma$ *en des points* $a'', b'', c''$ *situés sur une même droite.*

Ces théorèmes sont susceptibles d'une démonstration élémentaire. Pour établir le premier, observons que

$$\frac{aB}{aC}\cdot\frac{b'C}{b'A}\cdot\frac{c''A}{c''B}=1,\quad \frac{a''B}{a''C}\cdot\frac{bC}{bA}\cdot\frac{c'A}{c'B}=1,\quad \frac{a'B}{a'C}\cdot\frac{b''C}{b''A}\cdot\frac{cA}{cB}=1;$$

en multipliant ces égalités membre à membre et en tenant compte des relations

$$\frac{aB}{aC}\cdot\frac{bC}{bA}\cdot\frac{cA}{cB}=1,\quad \frac{a'B}{a'C}\cdot\frac{b'C}{b'A}\cdot\frac{c'A}{c'B}=1,$$

(*) Cramer, *Introduction à l'analyse des lignes algébriques*, n° 48. Plücker ayant mis en lumière les conséquences qu'on peut tirer de ce paradoxe, celui-ci porte souvent aussi le nom de paradoxe de Plücker.

on trouve

$$\frac{a''B}{a''C}\cdot\frac{b''C}{b''A}\cdot\frac{c''A}{c''B}=1, \quad \text{etc.}$$

Le triangle ABC étant pris pour triangle de référence, si

$$\frac{x}{m}+\frac{y}{n}+\frac{z}{p}=0, \quad \frac{x}{m'}+\frac{y}{n'}+\frac{z}{p'}=0$$

sont les équations de L, L', les points $a''$, $b''$, $c''$ sont sur la droite

$$np'x+pm'y+mn'z=0.$$

Pour démontrer le second théorème, appliquons le théorème de Pascal à l'hexagone $ab'a'b''a''b$ : les points d'intersection des droites $ab'$ et $b''a''$, $b'a'$ et $a''b$, $a'b''$ et $ba$ sont en ligne droite, c'est-à-dire $a'b'$ et $b''a''$ se coupent sur la droite $cc'$.

Les deux propositions de M. Socoloff se déduisent aussi du théorème suivant : *Toutes les cubiques qui ont huit points communs passent par un même neuvième point.* En effet, les neuf points $a$, $b$, $c$, $a'$, $b'$, $c'$, $a''$, $b''$, $c''$ appartiennent à la cubique formée par les trois côtés du triangle ABC ou par la conique $\Sigma$ et la droite $\lambda$; ils se trouvent également sur la cubique formée par les trois droites $ab'$, $bc'$, $ca'$; par conséquent, ils sont aussi situés sur la cubique formée par les droites L, L' et $a''b''$ qui passent par huit de ces points; donc $a''b''$ passe par $c''$. (J. N.)

---

## ˣNOTES DE GÉOMÉTRIE RÉCENTE.

### I. Sur les points de Brocard;

par Madame Prime.

1. *Si le côté* AB *du triangle* ABC *est fixe et si le rapport* $b^2$: $a$ *est constant, le premier point de Brocard décrit une circonférence.*

La circonférence adjointe (A, AC), qui passe par C et touche AB en A, passe par le point $\Omega$. Soit A' le point où la droite B$\Omega$ rencontre une seconde fois cette circonférence et soit $A_1$ le point où B$\Omega$ coupe AC; on sait que AA' est parallèle à BC. Les triangles semblables $AA'A_1$, $CBA_1$ donnent

$$\frac{AA'}{BC}=\frac{AA_1}{A_1C}=\frac{b^2}{a^2}, \quad \text{d'où } AA'=\frac{b^2}{a}.$$

Donc si le côté AB est fixe et le rapport $b^2 : a$ constant, le point A′ décrit une circonférence. Mais $\overline{BA}^2 = BA' . B\Omega$; on en conclut que le point $\Omega$ décrit une ligne inverse de la circonférence parcourue par le point A′. Le lieu de $\Omega$ est donc une circonférence, à moins qu'on n'ait $b^2 = ac$, auquel cas le lieu de $\Omega$ est une droite.

2. *Soient* $\Omega$, $\Omega'$ *les points de Brocard du triangle* ABC. *Les circonférences* $A\Omega\Omega'$, $B\Omega\Omega'$, $C\Omega\Omega'$ *déterminent respectivement sur les côtés des angles* BAC, CBA, ACB, *six points situés sur deux droites qui forment avec* $\Omega\Omega'$ *un triangle isoscèle ayant pour angle à la base l'angle de Brocard du triangle* ABC.

En effet, si la circonférence $A\Omega\Omega'$ coupe AB en C′ et AC en B″, les angles $C'\Omega'\Omega$, $B''\Omega\Omega'$, égaux à $\Omega AB$, $\Omega' AC$ sont égaux à $\omega$.

Remarques. La droite A′B′C′ est le lieu du second point de Brocard d'un triangle semblable à ABC et inscrit dans ABC, le sommet homologue de A se trouvant sur AB. De même, la droite A″B″C″ est le lieu du premier point de Brocard d'un triangle semblable à ABC et inscrit dans ABC, le sommet homologue A étant situé sur AC.

## II. Sur les triangles inscrits et égaux à un triangle donné.

Nous résumons ici une note de M. Tucker qui a paru dans les *Proceedings of the London Mathematical Society*, vol. XXII, n° 428, sous le titre de *A property of the Circumcircle*. A la démonstration de M. Tucker, nous substituons des considérations géométriques qui rattachent la proposition à un théorème plus général que nous avons énoncé dans *Mathesis*, t. VIII, p. 216.

Soient $\Omega$, $\Omega'$ les deux points de Brocard de ABC, de sorte que

$$\text{angle } \Omega AB = \Omega BC = \Omega CA = \omega,$$
$$\text{angle } \Omega' AC = \Omega' BA = \Omega' AB = \omega.$$

Désignons par $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ les symétriques de A, B, C par rapport aux perpendiculaires abaissées de $\Omega$ respectivement sur AB, BC, CA, et par $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$ les symétriques de A, B, C par rapport aux perpendiculaires abaissées de $\Omega'$ respectivement sur AC, BA, AB. On peut obtenir le triangle $\alpha\beta\gamma$ en faisant tourner le triangle ABC de l'angle $A\Omega\alpha = 180° - 2\omega$ autour de $\Omega$ dans le sens ABC; de même, si l'on fait tourner le triangle ABC de l'angle $180° - 2\omega$ autour de $\Omega'$ dans le sens ACB, sa nouvelle position est $\alpha'\beta'\gamma'$.

Les triangles $\alpha\beta\gamma$, $\alpha'\beta'\gamma'$ sont égaux à ABC et ont même cercle circonscrit; car si l'on fait tourner le cercle ABC de l'angle $180° - 2\omega$, soit autour de $\Omega$ dans le sens ABC, soit autour de $\Omega'$ dans le sens ACB, il occupera une seule et même position et aura pour centre le symétrique de O par rapport à la droite $\Omega\Omega'$. (J. N.)

---

## QUESTIONS DE LICENCE;

par M. H. Brocard.

XLIII. *Déterminer la courbe* C *telle que le triangle* TMN, *dont les côtés sont la tangente* MT *en un point quelconque* M, *la normale* MN *au même point, la perpendiculaire* NT *élevée au pôle* O *sur le rayon vecteur* OM *ait une aire constante donnée* $a^2$. *On indiquera la figure de chacune des branches de la courbe.* (Paris, juillet 1880.)

L'équation différentielle de la courbe C est, en coordonnées polaires, $\rho$ et $\omega$,

$$2a^2 = \rho\left(\rho' + \frac{\rho^2}{\rho'}\right) \quad \text{d'où l'on tire} \quad \rho\rho' = a^2 \pm \sqrt{a^4 - \rho^4}.$$

La substitution

$$\sqrt{a^4 - \rho^4} = a^2 - \rho^2 u$$

donne

$$\rho^2 = \frac{2a^2 u}{1 + u^2}, \quad u = \frac{a^2 \pm \sqrt{a^4 - \rho^4}}{\rho^2},$$

et

$$\rho\rho' = a^2 \frac{1 - u^2}{(1 + u^2)^2} u' = a^2 \pm \left(a^2 - \frac{2a^2 u^2}{1 + u^2}\right).$$

En prenant le signe +, on a

$$\frac{1 - u^2}{1 + u^2} du = 2d\omega \quad \text{d'où} \quad 2 \operatorname{arc\,tg} u - u = 2\omega + c.$$

En prenant le signe —, il vient

$$\frac{1 - u^2}{u^2(1 + u^2)} du = 2d\omega \quad \text{d'où} \quad -\frac{1}{u} - 2 \operatorname{arc\,tg} u = 2\omega + c_1.$$

Il resterait à substituer à $u$ sa valeur en fonction de $\rho$.

XLIV. *Intégrer l'équation*

$$y\left(1 + 2\frac{dy^2}{dx^2}\right) + x\frac{dy}{dx} = 0. \quad \text{(Grenoble; juillet 1883).}$$

On tire de cette équation homogène

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x \pm \sqrt{x^2 - 8y^2}}{4y}.$$

En posant $y = ux$, on trouve

$$\frac{4u\,du}{1 + 4u^2 \pm \sqrt{1 - 8u^2}} = -\frac{dx}{x}.$$

Posons $1 - 8u^2 = t^2$, il viendra successivement

$$\frac{t\,dt}{t^2 \pm 2t - 3} + \frac{dx}{x} = 0, \quad \left(\frac{\frac{3}{4}}{t \pm 3} + \frac{\frac{1}{4}}{t \mp 1}\right) dt + \frac{dx}{x} = 0,$$

qui s'intègre immédiatement, mais qui conduit à une relation compliquée. On trouve, par la méthode générale, la solution singulière $y = \pm x\sqrt{-1}$.

XLV. *Le point* P *étant la projection d'un point quelconque* M *d'une surface sur le plan des xy et le point* N *étant la trace de la normale en* M *sur le même plan, quelle doit être cette surface pour que l'angle* NOP *soit constant?*

*Étudier les intersections des surfaces qui jouissent de cette propriété par des sphères ayant leur centre à l'origine des coordonnées?*

(Rennes, juillet 1883.)

Les droites OP et ON ont respectivement pour coefficients d'inclinaison

$$\frac{y}{x} \quad \text{et} \quad \frac{y + qz}{x + pz}.$$

En exprimant que la tangente de la différence des deux angles est constante et égale à $a$, on trouve pour équation différentielle des surfaces cherchées,

$$(y + ax)\,zp + (ay - x)\,zq + a(x^2 + y^2) = 0.$$

On a donc à intégrer le système

$$\frac{dx}{y + ax} = \frac{dy}{ay - x} = \frac{-z\,dz}{a(x^2 + y^2)}.$$

On en déduit immédiatement

$$x\,dx + y\,dy + z\,dz = 0. \quad x^2 + y^2 + z^2 = C;$$

et

$$a(y\,dx - x\,dy) = x\,dx + y\,dy$$

$$a \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x} + \log \sqrt{x^2 + y^2} = C_1. \qquad (1)$$

Par conséquent, l'équation des surfaces cherchées est

$$x^2 + y^2 + z^2 = \mathrm{F}\left(a \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x} + \log \sqrt{x^2 + y^2}\right).$$

L'équation (1) donne les intersections avec les sphères

$$x^2 + y^2 + z^2 = \mathrm{F}(\mathrm{C}_1).$$

Ces courbes se projettent sur le plan des $xy$ suivant des spirales logarithmiques.

---

## REVUE BIBLIOGRAPHIQUE.

*Cours d'Algèbre supérieure*, par J. CARNOY, professeur à l'université de Louvain, membre de l'Académie pontificale des *Nuovi Lincei*, de l'Académie royale de Lisbonne, etc. Louvain, Uitspruyst; Paris, Gauthier-Villars et fils, 1892 (XII-537 pages, grand in-8°). Prix : fr. 8-50.

Voici un sommaire des matières traitées dans cet ouvrage, avec quelques remarques critiques.

PREMIÈRE PARTIE. *Principes de la théorie des déterminants* (pp. 1-65).

1. Propriétés fondamentales. 2. Multiplication de deux déterminants. 3. Déterminants spéciaux : adjoints, symétriques, gauches, etc. [Les questions relatives au signe des termes d'un déterminant, et à celui des facteurs dans le théorème de Laplace, ne nous semblent pas traitées assez minutieusement. La détermination de la valeur du déterminant égal au produit des différences de $n$ quantités, n° 24, s'appuie au fond sur le théorème du n° 32; car on doit supposer les quantités $a, b, c$ réelles ou imaginaires à volonté].

DEUXIÈME PARTIE. *Théorie des équations* (pp. 69-389). I. *Principes fondamentaux*. 1. Calcul des expressions imaginaires, sous forme trigonométrique. 2. Toute équation algébrique a une racine et conséquences. [Démonstration d'Argand, en s'appuyant sur le postulat non établi dans l'ouvrage : Une fonction continue de deux variables non négative à une valeur minima; de plus, pour déduire du Théorème fondamental qu'une équation de degré $m$ a $m$ racines, il faut prouver préalablement que la première racine est fonction continue des coefficients]. 3. Principes d'identité, de substitution, des racines égales(*), des racines imaginaires, de la transformation des équations, des variations du premier membre. [Le premier principe aurait dû être prouvé même dans le cas des racines égales; pour le second, nous regrettons que

---

(*) Ici, et encore en d'autres endroits du livre, l'auteur suppose connue la théorie du plus grand commun diviseur. Il eût été utile, ce nous semble, d'en donner un exposé en tête de la théorie des équations, comme dans l'Algèbre de Lefébure.

l'auteur n'ait pas donné la démonstration de Cauchy, seule suffisante pour l'établir rigoureusement]. 4. Composition des coefficients d'une équation. Fonctions symétriques.

II. *Propriétés générales des équations*. 1. Théorème de Descartes. 2. Théorème de Budan [mis ici, à tort, sous le nom de Fourier]. 3. Théorème de Rolle. 4 Théorème de Sturm. [Exposé beaucoup plus complet que dans la plupart des manuels de la théorie des équations : l'auteur donne les théorèmes de Sylvester complémentaires de celui de Sturm]. 5. Théorème de Cauchy.

III. *Résolution des équations numériques à une inconnue*. 1. Limites des racines. 2. Recherches des racines commensurables. 3. Théorie des différences. Séparation des racines. [Il aurait fallu donner ici l'utile théorème de Choquet. Voir *Mathesis*, 1891, (2), I, pp. 218-221]. 4. Méthode de Newton, de Horner et des parties proportionnelles pour le calcul des racines incommensurables. [L'auteur ne donne pas la méthode de Lagrange, ni ici, ni au ch. VIII].

IV. *Équations simultanées*. 1. Équations linéaires. 2. Résultant de deux ou plusieurs équations d'ordre quelconque ; théorème de Bezout. 3. Méthode d'élimination d'Euler, de Sylvester, de Bézout et de Cauchy. [Principes fondamentaux sans les réciproques et sans démonstration de l'identité des résultants considérés dans ce paragraphe et le précédent]. Recherche des racines imaginaires. 4. Discriminant.

V. *Transformation des équations*. 1-3. Equations aux sommes, aux différences, aux produits, aux quotients. 4. Transformation de Tchirnhausen. 5. Réduction du premier membre d'une équation de degré pair à une différence de deux carrés. [Chapitre intéressant qui manque dans beaucoup de manuels d'algèbre supérieure. N'aurait-il pas fallu dire ici un mot de la méthode de Gräfe pour la résolution numérique des équations (*Mathesis*, 1891, (2), I, 183)].

VI. *Équations susceptibles d'abaissement*. 1. Cas particuliers. 2. Équations réciproques. 3. Équations binômes : théorie des racines primitives.

VII. *Résolution algébrique des équations*. 1. Deuxième degré (4 méthodes). 2. Troisième degré (5 méthodes). 3. Quatrième degré (7 méthodes). 4 Impossibilité de la résolution algébrique des équations de degré supérieur. [Cette dernière démonstration, faite en quatre pages, n'est évidemment qu'une esquisse; les autres paragraphes, où l'auteur, si nous ne nous trompons, a emprunté à Matthiessen maintes méthodes peu connues, intéressera sans doute beaucoup de lecteurs].

VIII. *Questions diverses*. 1. Compléments de la théorie des fractions continues. Résolution de l'équation $x^2 - Ay^2 = \pm 1$, en nombres entiers. 2. Développement de $\sin x$ et $\cos x$ en produits infinis. Formule de Wallis et de Stirling [Ce paragraphe laisse beaucoup à désirer au point de vue de la rigueur. Rouché a donné de la formule de Stirling une démonstration plus simple que celle de Serret reproduite ici]. 3. Premiers principes de la théorie des nombres entiers. Congruences, racines primitives, théorèmes de Fermat et de Wilson.

TROISIÈME PARTIE. *Introduction à la théorie des formes algébriques* (p. 393-537). I. *Définitions. Formes linéaires, formes quadratiques. Formes canoniques* 1. Trans-

formations linéaires et formes linéaires. 2. Formes quadratiques (14 pages). 3. Formes canoniques des formes binaires : application aux 3e, 4e et 5e degrés.

II. *Invariants et covariants.* 1. Définitions et propriétés des invariants. [Au n° 209, il faudrait, croyons nous, ajouter le théorème de Jordan : si $F(A_1A_2,\ldots) = Rf(a_1, a_2\ldots)$, nécessairement R est une puissance du module de transformation]. 2. Covariants. [Au n° 216, l'homogénéité du covariant n'est pas établie ; au n° 217, il faudrait ajouter la réciproque du théorème. N'aurait-il pas fallu définir explicitement ici les variables contragredientes, les contrevariants et les divariants]?

III. *Méthodes de formation des invariants et des covariants. Application aux formes binaires.* 1. Intermutants. 2. Émanants. 3. Évectants. 4. Hessien et Jacobien. 5. Application aux formes binaires. [A la fin du chapitre, il nous semblerait juste de citer, outre le nom de Clebsch, au moins ceux de Gordan et de Hilbert. Au point de vue didactique, il aurait été peut-être préférable de fondre ce chapitre et même une partie du suivant avec le deuxième, comme l'a fait Salmon].

IV. *Principes de la méthode symbolique allemande.* [D'après Salmon, *Higher Algebra*, 3th Edition, n° 162, cette méthode au fond est identique avec celle de Cayley, qui est *antérieure*]. 1. Expression symbolique des invariants et des covariants d'une forme binaire. 2. Opérations diverses du calcul symbolique : Faltungs process, polarisation, opération oméga, opération delta [due à Cayley, croyons nous et non à Aronhold], transvection. 3. Formation systématique des invariants et des covariants par la formule de Clebsch et Gordan.

V. *Formes binaires du 2e, du 3e et du 4e degré.* 1. Forme quadratique. 2. Forme cubique. 3. Système d'une forme cubique et d'une forme quadratique. 4. Forme biquadratique.

Malgré les imperfections que nous avons signalées et que l'on pourra faire disparaître dans une seconde édition, le livre de M. Carnoy sera très utile aux professeurs et aux élèves. Il est écrit avec concision et clarté comme les autres manuels de l'auteur. C'est le seul ouvrage écrit en français où l'on trouve réunies la théorie des déterminants, celle des équations et une introduction à l'invariantologie. Après l'avoir étudié, le lecteur abordera sans peine les traités de Serret, de Clebsch et de Salmon. P. M.

---

*Curso de Analyse Infinitesimal* por F. Gomes Teixeira, Director da Academia Polytechnica do Porto, etc. Porto, Typographia Occidental. Calculo Differential (1a Edição, 1887, 356 pp. in-8° ; 2a Edição, 1890, 358 pp. in-8°). Calculo Integral (Primera parte) (1889, 309 pp. in-8°) ; (Segunda parte) (1892, 346 pp. in-8°).

Depuis une quinzaine d'années, il a paru plusieurs Cours d'Analyse qui l'emportent de beaucoup sur les anciens manuels classiques de Duhamel, de Sturm et de Serret, soit par leur étendue, soit par la rigueur avec laquelle les principes fondamentaux du calcul infinitésimal y sont exposés. Nous citerons particulièrement le *Lehrbuch der Analysis* de Lipschitz (Bonn, 1877-1880), le *Cours d'Analyse* de Jordan (Paris, 1882, 1883, 1887), le *Calcolo differenziale e principii di Calcolo integrale* et les *Applicazioni geometriche del Calcolo infinitesimale* de Peano (Turin,

1884, 1887). On peut placer à côté de ces livres excellents le Cours de M. G. Teixeira. Voici le sommaire des matières traitées dans les trois volumes du savant professeur de Porto :

*Introduction*. 1. Nombres irrationnels, négatifs, imaginaires; limites, séries, produits infinis, fractions continues. 2. Principes généraux de la théorie des fonctions; fonctions algébriques, exponentielles, logarithmiques et circulaires.

*Calcul différentiel* 1. Dérivées. Méthode des limites. 2. Dérivées du premier ordre. 3. Applications géométriques. 4. Dérivées d'ordre quelconque. Théorème de Taylor. 5-6. Applications analytiques et géométriques de la formule de Taylor. 7. Fonctions définies par les séries. Singularités. 8. Fonctions d'une variable imaginaire.

*Calcul intégral*. A. 1. Intégrales indéfinies. 2. Intégrales définies. 3. Applications géométriques. 4. Applications analytiques (p. ex. théorie du nombre $\pi$). 4-5. Intégration des équations différentielles du premier ordre ou d'ordre quelconque. 6. Intégration des équations aux dérivées partielles. 7. Applications géométriques.

B. 1. Intégration des fonctions d'une variable imaginaire. 2. Fonctions eulériennes. 3-4. Fonctions elliptiques (sous la forme de Weierstrass) et applications. 5. Fonctions multiformes (algébriques, etc.), formule de Lagrange. 6. Calcul des variations.

Dans maints chapitres, l'auteur a complété les travaux de ses devanciers par des recherches personnelles. Nous recommandons avec confiance son livre aux professeurs et aux étudiants du doctorat, comme l'un des meilleurs qu'ils puissent prendre pour guide ou pour auxiliaire dans leur enseignement ou dans leurs études(*) P. M.

---

## SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

### Question 735.

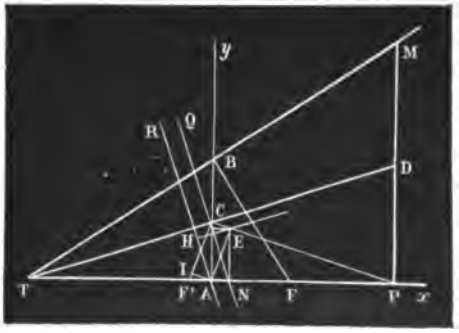
(Voir *Mathesis*, (2), I, p. 216.)

*Une parabole variable* U *touche une parabole fixe* V *en un point* M *et l'axe de* V *au pied* P *de l'ordonnée de* M. *Le lieu du foyer de* U *est une cissoïde; la tangente au sommet enveloppe une hypocycloïde à trois rebroussements; le lieu du pied de la directrice est une quintique; le centre du cercle osculateur de* U *en* P *décrit une parabole semicubique.* (DÉPREZ.)

---

(*) La langue portuguaise mathématique de M. Teixeira se comprend ou se devine presque toujours sans peine, sans qu'on doive recourir, ni à la grammaire, ni au dictionnaire.

*Solution par* M. Cristesco. 1° Soient A le sommet et F le foyer de V, T et B les points où la tangente en M rencontre l'axe A$x$ et la tangente au sommet, C et D les milieux de AB, PM. La parabole U touche T$x$ en P, TM en M; donc elle touche la droite AB, qui joint les milieux de TP et TM, au point C. Les tangentes AP, AC étant rectangulaires, A est un point de la directrice de U et le foyer de U est la projection E de A sur sa polaire CP (*). La tangente au sommet de U est la droite NQ qui unit les projections du foyer E sur les tangentes AC, A$x$; enfin la directrice est la droite AR menée par A parallèlement à NQ.




Soient $a$, $b$ les coordonnées de M, et $y^2 = 2px$ l'équation de V. Les droites CP et AE auront pour équations

$$\frac{x}{a} + \frac{4y}{b} = 1, \quad y = \frac{4a}{b}x; \tag{1}$$

ces égalités donnent

$$a = \frac{x^2 + y^2}{x}, \quad b = \frac{4(x^2 + y^2)}{y}.$$

Substituant ces valeurs dans la relation $b^2 = 2pa$, on obtient l'équation du lieu de E :

$$y^2 = \frac{x^3}{\frac{1}{8}p - x}. \tag{2}$$

---

(*) On a $\overline{MP}^2 = 2p.\,AP$, $MP = 4AC$; donc $\overline{AC}^2 = \frac{1}{8}p.\,AP$. Par conséquent, si l'on mène CF' perpendiculaire à CP, on a $AF' = \frac{1}{8}p$. Le point F' étant fixe, la droite CP enveloppe une parabole U', ayant pour foyer F' et pour sommet A. Le foyer E de U décrit donc la podaire du sommet A de U'; on sait que cette courbe est une cissoïde de Dioclès. D'ailleurs, si l'on mène AI parallèle à PC, le point I se meut sur la circonférence qui a pour diamètre AF'. AE est parallèle à F'C et égal au segment IC intercepté sur une sécante menée par F' entre cette circonférence et la tangente au point diamétralement opposé à F'. (J. N.)

La courbe cherchée est donc une cissoïde dont le cercle générateur a pour diamètre $\frac{1}{8}p$.

2° L'équation de NQ est

$$\frac{X}{x}+\frac{Y}{y}=1, \tag{3}$$

X, Y désignant les coordonnées courantes, et $x$, $y$ celles de E. De (3), on tire $y=xY:(x-X)$; substituant cette valeur dans l'équation de condition (2), on obtient

$$Y^2\left(\tfrac{1}{8}p-x\right)-x(x-X)^2=0. \tag{4}$$

Pour avoir l'équation de l'enveloppe de NQ; il faut éliminer $x$ entre l'égalité (4) et sa dérivée par rapport à $x$. Cette dérivée donne

$$Y^2+(x-X)^2+2x(x-X)=0;$$

d'où

$$x=\tfrac{1}{3}(2X\pm\sqrt{X^2-3Y^2}).$$

Portons cette valeur dans (4); il vient

$$4(X^2+Y^2)^2-\frac{p}{2}X(X^2+9Y)+\frac{27}{64}p^2Y^2=0. \tag{5}$$

Cette équation représente une hypocycloïde à trois rebroussements, engendrée par un point d'un cercle de rayon $\frac{1}{32}p$ roulant à l'intérieur d'un cercle de rayon $\frac{1}{32}p$.

3° La directrice AR et l'axe EH de U ont pour équations

$$Y=-\frac{y}{x}X,\quad Y-y=\frac{x}{y}(X-x), \tag{6}$$

où $x$, $y$ représentent les coordonnées du foyer E. Entre les égalités (2) et (6), éliminons $x$, $y$. De (6), on déduit

$$x=\frac{X(X^2+Y^2)}{X^2-Y^2},\quad y=-\frac{Y(X^2+Y^2)}{X^2-Y^2};$$

substituant ces valeurs dans (2), on trouve le lieu du pied H de la directrice :

$$X(X^2+Y^2)^2-\frac{1}{8}pY^2(X^2-Y^2)=0;$$

en passant aux coordonnées polaires, on obtient

$$\rho=\frac{1}{8}p\frac{\sin^2\omega\cos 2\omega}{\cos\omega}.$$

4° Les coordonnées $\alpha$, $\beta$ du centre de courbure d'une courbe au point $(x, y)$ sont déterminées par les équations

$$x - \alpha + (y - \beta)\, y' = 0, \quad 1 + y'^2 + (y - \beta)\, y'' = 0. \qquad (7)$$

La parabole U étant tangente aux axes Ax, Ay aux points P, C a pour équation

$$\pm\sqrt{\frac{x}{a}} \pm \sqrt{\frac{4y}{b}} = 1, \quad \text{ou} \quad y = \frac{b}{4}\left(1 + \frac{x}{a} \pm 2\sqrt{\frac{x}{a}}\right);$$

par conséquent

$$y' = \frac{b}{4}\left(\frac{1}{a} \pm \frac{1}{\sqrt{ax}}\right), \quad y'' = \pm\frac{b}{8\sqrt{ax^3}}.$$

Si l'on fait $x = a$, on obtient pour les valeurs de $y'$ et $y''$ :

$$\text{en M} \ldots y' = \frac{b}{2a}, \quad y'' = -\frac{b}{8a^2};$$

$$\text{en P} \ldots y' = 0, \quad y'' = \frac{b}{8a^2}.$$

Portant ces valeurs dans l'équation (7), on trouve :

$$\text{en M} \ldots a - \alpha + (b - \beta)\frac{b}{2a} = 0, \quad 1 + \frac{b^2}{4a^2} - (b - \beta)\frac{8a^2}{b} = 0; \qquad (8)$$

$$\text{en P} \ldots a - \alpha = 0, \quad 1 - \beta\frac{b}{8a^2} = 0. \qquad (9)$$

En éliminant $a$ et $b$ entre (8) et $b^2 = 2pa$ ou entre (9) et $b^2 = 2pa$, on aura pour le lieu du centre de courbure de U en M ou en P :

$$\beta^2 = \frac{32}{125p}\left(\alpha - \frac{3}{4}p\right)^2(\alpha - 2p), \quad \beta^2 = \frac{32\alpha^5}{p}.$$

*Solution par* M. Absolonne. 1° La tangente au point M $(a,b)$ ayant pour équation $yb - p(x + a) = 0$, la parabole U est représentée par

$$y(yb - px - pa) + \lambda(x - a)^2 = 0.$$

En exprimant que les termes du second degré forment un carré parfait, on trouve $p^2 - 4bd = 0$; d'où en éliminant $\lambda$ :

$$(2by - px)^2 - 4abpy - 2ap^2x + a^2p^2 = 0. \qquad (1)$$

On vérifie immédiatement que la courbe touche l'axe des $y$.

L'axe de U a pour équation

$$2by - px + \frac{ap(p - 8a)}{p + 8a} = 0. \qquad (2)$$

Soit E le foyer de U. La droite PE et l'axe de U ayant des directions symétriques par rapport à la tangente AP, l'équation de PE est

$$2by + p(x - a) = 0. \qquad (3)$$

Pour avoir l'équation du lieu de E, il faut éliminer $a, b$ entre (2), (3) et $b^2 = 2pa$; on trouve

$$y^2 (\tfrac{1}{8} p - x) = x^3,$$

équation d'une cissoïde.

2° La tangente au sommet de U a une équation de la forme

$$x \cos \omega + y \sin \omega = d,$$

$\omega$ étant l'angle de l'axe de U avec l'axe des $x$, de sorte que $tg\, \omega = \dfrac{2b}{p}$.

Cette tangente passant par le pied de l'ordonnée du foyer, on a $d = x \cos \omega$, où $x$ est l'abscisse du foyer. En résolvant (2) et (3) par rapport à $x$ et $y$, on trouve $x = ap : (p + 8a)$; par conséquent,

$$d = \frac{ap \cos \omega}{p + 8a}.$$

Mais

$$a = b^2 : 2p, \quad b = \tfrac{1}{2} p \cot \omega,$$

d'où

$$a = \tfrac{1}{2} p \cot^2 \omega \quad \text{et} \quad d = \tfrac{1}{8} p \cos^3 \omega.$$

On a donc pour la tangente au sommet de U,

$$x \cos \omega + y \sin \omega = \tfrac{1}{8} p \cos^3 \omega. \qquad (4)$$

Pour trouver l'enveloppe de cette droite, dérivons (4) par rapport à $\omega$ :

$$-x \sin \omega + y \cos \omega = -\tfrac{3}{8} p \cos^2 \omega \sin \omega, \qquad (5)$$

et résolvons (4) et (5) par rapport à $x, y$; nous aurons

$$x = \tfrac{1}{8} p \cos^2 \omega (\cos^2 \omega + 3 \sin^2 \omega), \quad y = -\frac{p}{4} \cos^5 \omega \sin \omega.$$

En écrivant ces valeurs ainsi :

$$x = \frac{3p}{32} + \frac{p}{32}(2 \cos 2\omega - \cos 4\omega), \quad y = -\frac{p}{32}(2 \sin 2\omega + \sin 4\omega),$$

nous voyons que l'enveloppe est une hypocycloïde ; le rayon du cercle fixe est $\frac{3}{32} p$, celui du cercle mobile $\frac{1}{32} p$; il y a par conséquent trois rebroussements dont un à l'origine.

3° La directrice passe par l'origine qui est le sommet d'un angle droit circonscrit à U; son équation est donc

$$y = -\frac{2b}{p}x.$$

En la combinant avec celle de l'axe on obtient, par l'élimination des paramètres, l'équation du lieu du pied de la directrice, savoir :

$$x(x^2 + y^2)^2 - py^2(x^2 - y^2) = 0.$$

*Solution partielle par* M. Brocard. Si la tangente en M rencontre l'axe A$x$ de V au point T, la médiane TD du triangle TMP est un diamètre de U, et A$y$ est la tangente à l'extrémité C de ce diamètre. Désignons par $(a, b)$ les coordonnées de M; le coefficient angulaire du diamètre TD étant $b : 4a$ ou $p : 2b$, l'équation de U est de la forme

$$(2by - px)^2 = dx + ey + f.$$

Exprimons que la courbe touche A$x$ au point $(a, o)$ et A$y$ au point $(o, \frac{1}{2}b)$; ces conditions déterminent $d$, $e$, $f$ et nous aurons pour l'équation de U

$$(2by - px)^2 - 4abpy - 2ap^2x + a^2p^2 = 0.$$

Pour déterminer l'axe et la tangente au sommet, nous mettons cette équation sous la forme

$$(2by - px + \mu)^2 - 4abpy - 2ap^2x + a^2p^2 - \mu^2 - 2\mu(2by - px) = 0$$

et nous écrivons que les deux droites représentées par

$$2by - px + \mu = 0,$$
$$4abpy + 2ap^2x - a^2p^2 + \mu^2 + 2\mu(2by - px) = 0,$$

sont rectangulaires; la seconde droite sera alors la tangente au sommet de U. Nous trouvons ainsi

$$\mu = \frac{ap(p^2 - 4b^2)}{p^2 + 4b^2} = \frac{ap(p - 8a)}{p + 8a},$$

et la tangente au sommet de U a pour équation

$$by + 4ax = \frac{4a^2p}{p + 8a}.$$

La perpendiculaire abaissée de l'origine sur cette droite est représentée par

$$bx - 4ay = 0.$$

Eliminant $a$ et $b$ entre ces égalités et $b^2 = 2pa$, on obtient

$$8(x^2 + y^2)^2 = px^5;$$

telle est l'équation de la podaire de l'origine par rapport à l'enveloppe de la tangente au sommet de U.

En coordonnées polaires on a

$$\rho = \tfrac{1}{8} p \cos^5 \omega;$$

on reconnaît l'équation d'une podaire d'hypocycloïde triangulaire par rapport à un de ses sommets. (Voir question 346 et le Trifolium, supplément à *Mathesis* (1892), pp. 26-27.)

M. Morel (Creusot) a également donné une bonne solution de la question 735.

---

## ×Question 748.

(Voir *Mathesis*, (2), I, p. 281.)

*Démontrer que l'égalité de deux des rapports*

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(\beta-\gamma)\sin 2\alpha - \sin\frac{1}{2}(2\alpha+\beta+\gamma)}{\sin\frac{1}{2}(2\alpha-\beta-\gamma)},$$

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(\gamma-\alpha)\sin 2\beta - \sin\frac{1}{2}(2\beta+\gamma+\alpha)}{\sin\frac{1}{2}(2\beta-\gamma-\alpha)},$$

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\sin 2\gamma - \sin\frac{1}{2}(2\gamma+\alpha+\beta)}{\sin\frac{1}{2}(2\gamma-\alpha-\beta)}$$

*entraîne celle des trois rapports.* (Richardson.)

Nous avons tiré cette question de l'*Educational Times* (1890, p. 89, n° 10470). L'auteur l'accompagne de la remarque suivante : « La solution de ce problème établit, au moyen des angles excentriques, un théorème qu'on démontre facilement au moyen des coordonnées triangulaires, à savoir : *Si un triangle* ABC *inscrit à une ellipse est tel que les normales en* B, C *sont les bissectrices des angles* ABC, ACB, *la normale en* A *est aussi la bissectrice de l'angle* BAC.

Soient A′, B′, C′ les sommets du triangle formé par les tangentes en A, B, C. Le dernier théorème peut prendre l'énoncé suivant : Si BB′, CC′ sont deux hauteurs du triangle A′B′C′, AA′ est la troisième hauteur. Sous cette forme, la proposition est évidente, étant donné que les trois droites AA′, BB′, CC′ concourent en un même point.

La normale en A et les tangentes en B, C ont pour équations

$$ax \sin\alpha - by\cos\alpha = (a^2 - b^2)\sin\alpha\cos\alpha,$$

$$\frac{x}{a}\cos\beta + \frac{y}{b}\sin\beta = 1, \quad \frac{x}{a}\cos\gamma + \frac{y}{b}\sin\gamma = 1.$$

Exprimons qu'elles concourent en un même point; il vient

$$\begin{vmatrix} a^2\sin\alpha & -b^2\cos\alpha & (a^2-b^2)\sin\alpha\cos\alpha \\ \cos\beta & \sin\beta & 1 \\ \cos\gamma & \sin\gamma & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Si on développe le déterminant suivant les éléments de la première ligne et qu'on supprime le facteur $\sin\frac{1}{2}(\beta-\gamma)$, on trouve

$$a^2\sin\alpha\cos\tfrac{1}{2}(\beta+\gamma) - b^2\cos\alpha\sin\tfrac{1}{2}(\beta+\gamma) - (a^2-b^2)\sin\alpha\cos\alpha\cos\tfrac{1}{2}(\beta-\gamma) = 0.$$

Cette équation donne

$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{\sin\alpha\cos\alpha\cos\frac{1}{2}(\beta-\gamma) - \sin\frac{1}{2}(\beta+\gamma)\cos\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha\cos\frac{1}{2}(\beta-\gamma) - \cos\frac{1}{2}(\beta+\gamma)\sin\alpha},$$

d'où

$$\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2} = \frac{\cos\frac{1}{2}(\beta-\gamma)\sin 2\alpha - \sin\frac{1}{2}(2\alpha+\beta+\gamma)}{\sin\frac{1}{2}(2\alpha-\beta-\gamma)}. \qquad (1)$$

Effectuant une permutation circulaire des lettres $\alpha, \beta, \gamma$, on trouve les conditions exprimant que BB′ est perpendiculaire à CA, CC′ à AB.

Désignons par $\frac{\lambda}{\mu}$ le second membre de (1), par $\frac{\lambda'}{\mu'}, \frac{\lambda''}{\mu''}$ les deux fractions analogues. Supposons qu'on donne $\frac{\lambda}{\mu} = \frac{\lambda'}{\mu'}$; si on détermine le rapport $\frac{a^2}{b^2}$ par l'équation

$$\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2} = \frac{\lambda}{\mu}, \qquad (2)$$

on aura aussi

$$\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2} = \frac{\lambda'}{\mu'};$$

par suite, si A, B, C sont les points qui, dans une ellipse dont les axes $2a$, $2b$ vérifient l'équation (2), ont pour paramètres angulaires $\alpha, \beta, \gamma$,

les normales en A, B coïncident avec AA′, BB′; CC′ est donc la normale en C, et l'on a

$$\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}=\frac{\lambda''}{\mu''},$$

ce qui démontre la question 748 par la géométrie analytique.

Pour l'établir par la trigonométrie, on devrait pouvoir mettre l'équation $\lambda\mu'-\lambda'\mu=0$ sous la forme $\delta\varepsilon=0$, $\varepsilon$ étant une fonction symétrique de $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ et $\delta$ un facteur qui s'annule pour $\alpha=\beta$ (on voit facilement que $\lambda\mu'-\lambda'\mu$ s'annule pour $\alpha=\beta$).

Nous engageons nos lecteurs à chercher une solution de la question par cette méthode. Voici des formes possibles de la fonction $\varepsilon$. De

$$\frac{\lambda}{\mu}=\frac{\lambda'}{\mu'}=\frac{\lambda''}{\mu''} \tag{3}$$

on déduit

$$\frac{\lambda}{\mu}=\frac{\lambda\sin\frac{1}{2}(\beta-\gamma)+\lambda'\sin\frac{1}{2}(\gamma-\alpha)+\lambda''\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\mu\sin\frac{1}{2}(\beta-\gamma)+\mu'\sin\frac{1}{2}(\gamma-\alpha)+\mu''\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}.$$

Comme $\Sigma\mu\sin\frac{1}{2}(\beta-\gamma)=0$, on a nécessairement $\Sigma\lambda\sin\frac{1}{2}(\beta-\gamma)=0$, ou

$$\sin 2\alpha\sin(\beta-\gamma)+\sin 2\beta\sin(\gamma-\alpha)+\sin 2\gamma\sin(\alpha-\beta)=0. \tag{4}$$

C'est la condition, bien connue, qui exprime que les normales en A, B, C concourent en un même point; on peut en supprimant un facteur étranger (Voir *Mathesis*, t. VI, p. 88), la ramener à

$$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\beta+\gamma)+\sin(\gamma+\alpha)=0. \tag{5}$$

On a aussi

$$\frac{\lambda}{\mu}=\frac{\lambda\cos\frac{1}{2}(\beta-\gamma)+\cdots}{\mu\cos\frac{1}{2}(\beta-\gamma)+\cdots}.$$

Comme $\Sigma\mu\cos\frac{1}{2}(\beta-\gamma)=0$, on doit avoir $\Sigma\lambda\cos\frac{1}{2}(\beta-\gamma)=0$, ou

$$\Sigma 2\sin(\alpha+\beta)-\Sigma\sin 2\alpha-\Sigma\sin 2\alpha\cos(\beta-\gamma)=0. \tag{6}$$

Les équations (4), (5), (6) sont, à des facteurs étrangers près, des formes possibles de l'équation $\varepsilon=0$.

Un honorable correspondant a déduit, des égalités (3), l'équation (6); comme celle-ci n'a pas lieu identiquement, il a conclu, à tort, que la question 748 est fausse. La conclusion aurait dû être que l'équation (6) est équivalente à $\lambda\mu'-\lambda'\mu=0$. (J. N.)

## Question 751.

(Voir *Mathesis*, (2), t. II, p. 32.)

*On donne deux droites rectangulaires* AB *et* CD, *non situées dans un même plan; soit* AC *leur plus courte distance. Une droite s'appuie sur* AB *et* CD *en interceptant des segments égaux à partir de* A *et de* C. *Déterminer la courbe d'intersection de la surface engendrée par cette droite, avec la sphère décrite sur* AC *comme diamètre.* (H. Brocard.)

*Solution analytique par* MM. Mandart, Quint *et* Dents. Prenons pour origine des coordonnées le milieu de AC, pour axes des $x$ et des $y$ des parallèles à AB et à AC, pour axe des $z$ la droite AC.

Supposons $OA = a$, $AB = CD = b$. BD sera l'une des positions de la droite mobile et ses projections sur les plans coordonnés seront B'D', AD, CB; OB' et OC' sont des segments de $Ox$ et $Oy$ égaux à $b$. Les équations de BD seront donc

$$x + y = b, \quad \frac{2y}{b} + \frac{z}{a} = 1, \quad -\frac{z}{a} + \frac{2x}{b} = 1.$$

Si l'on élimine $b$ entre deux de ces égalités, on trouve

$$z(x + y) + a(x - y) = 0. \tag{1}$$

La sphère a pour équation

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2.$$

La courbe cherchée est représentée par le système des équations (1) et (2). Si l'on prend pour axes les bissectrices des angles $xOy$, $yOx'$, les équations de la courbe sont

$$zy + ax = 0, \quad x^2 + y^2 + z^2 = a^2.$$

La droite mobile engendre un paraboloïde hyperbolique, dont les plans directeurs sont le plan horizontal et le plan bissecteur du dièdre $xOy'$.

Nous conseillons à nos lecteurs de tracer l'épure du problème. (J. N.)

---

## Question 758.

(Voir *Mathesis*, (2), t. II, p. 56.)

*On donne une sphère de rayon* R, *rapportée à trois diamètres rectangulaires. On considère la section* ZOX *et on suppose que celle-ci tourne autour de* OZ *d'un mouvement uniforme pendant que le rayon* OA *de cette*

*section, partant de la position* OZ *se déplace autour de* O *avec la même vitesse. Étudier la courbe ainsi décrite sur la sphère par le point* A.

(H. Brocard.)

*Solution par* M. Mandart. Soient A un point de la courbe, P sa projection sur XOY, Q sa projection sur OX. L'angle ZOA que nous désignons par $\varphi$ est égal à l'angle QOP.

On a

$$OQ = x = OP\cos\varphi,\quad PQ = y = OP\sin\varphi,\quad z = R\cos\varphi,\quad OP = R\sin\varphi.$$

Donc les équations de la courbe en fonction du *paramètre* $\varphi$ sont

$$x = R\sin\varphi\cos\varphi,\quad y = R\sin^2\varphi,\quad z = R\cos\varphi.$$

Éliminant $\varphi$ entre ces équations on trouve

$$Ry + z^2 = R^2,\quad x^2 + y^2 - Ry = 0.$$

La courbe se projette sur le plan ZOY suivant une parabole dont OY est l'axe, le sommet se trouvant au point de rencontre de la sphère et de OY.

La projection sur XOY est un cercle. On peut donc dire que la courbe est l'intersection de la sphère avec le cylindre droit ayant pour base un cercle décrit sur le rayon OY de cette sphère comme diamètre.

La courbe proposée est la *courbe de Viviani*.

Solutions analogues par MM. Denys et Decamps.

---

## ×Question 760.

(Voir *Mathesis*, (2) II, p. 128.)

*Résoudre l'équation*

$$(x-a)^3(x+a-2b) - (a-b)^3(a+b-2x) = 0.\quad \text{(E. Gelin.)}$$

*Solution par* MM. H. Brocard, François, Emmerich, F. Vanhelst, Absalonne. 1° On peut mettre l'équation sous la forme

$$(x-a)^3[x-a+2(a-b)] + (a-b)^3[2(x-a)+a-b] = 0,$$

ou en posant $x - a = y$, $a - b = d$:

$$y^4 + 2dy^3 + 2d^3y + d^4 = 0. \qquad (1)$$

2° Cette équation peut être résolue à la manière des équations réciproques. En divisant par $d^2y^2$, ce qui donne

$$\frac{y^2}{d^2}+2\frac{y}{d}+2\frac{d}{y}+\frac{d^2}{y^2}=0$$

puis faisant

$$\frac{y}{d}+\frac{d}{y}=z,$$

on obtient

$$z^2+2z-2=0, \quad z=-1\pm\sqrt{3}, \text{ etc.}$$

3° L'équation (1) étant écrite ainsi :

$$(y^2+dy+d^2)^2-3\,d^2y^2=0,$$

on est conduit à deux équations du second degré :

$$y^2+(1\pm\sqrt{3})\,dy+d^2=0;$$

donc

$$y=\frac{d}{2}(-1\mp\sqrt{3}\pm\sqrt[4]{12}) \quad y=\frac{d}{2}(-1\mp\sqrt{3}\pm i\sqrt[4]{12}),$$

$\sqrt[4]{12}$ désignant la racine 4e arithmétique de 12.

---

## ×Question 750.

(Voir *Mathesis*, (2), II, p. 128.)

*Vérifier l'identité*

$$\operatorname{tg}(a-b)\operatorname{tg}(c-d)+\operatorname{tg}(a-c)\operatorname{tg}(d-b)+\operatorname{tg}(a-d)\operatorname{tg}(b-c)=$$
$$-\operatorname{tg}(a-b)\operatorname{tg}(a-c)\operatorname{tg}(a-d)\operatorname{tg}(c-d)\operatorname{tg}(d-b)\operatorname{tg}(b-c) \quad \text{(A)}$$

(J. Neuberg.)

*Solution par* M. Emmerich. Si l'on fait

$$a-b=\beta, \quad a-c=\gamma, \quad a-d=\delta,$$

l'égalité proposée prend la forme

$$\Sigma\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}(\gamma-\delta)=-\Pi\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}(\gamma-\delta), \qquad (1)$$

où il est bien entendu que les autres termes de la somme $\Sigma$ ou les autres facteurs du produit $\Pi$ se déduisent de $\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}(\gamma-\delta)$ au moyen de permutations tournantes des lettres $\beta$, $\gamma$, $\delta$.

Pour démontrer l'égalité (1), observons que

$$\operatorname{tg}(\gamma-\delta)=\frac{\operatorname{tg}\gamma-\operatorname{tg}\delta}{1+\operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\delta}$$

ou

$$\operatorname{tg}(\gamma-\delta)+\operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\delta\operatorname{tg}(\gamma-\delta)=\operatorname{tg}\gamma-\operatorname{tg}\delta.$$

Multiplions cette égalité par $\operatorname{tg}\beta$ et ajoutons-y les deux égalités analogues; il vient

$$\Sigma\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}(\gamma-\delta)+\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\delta\,\Sigma\operatorname{tg}(\gamma-\delta)=0. \qquad (2)$$

La somme des arcs $\gamma-\delta$, $\delta-\beta$, $\beta-\gamma$ étant nulle, on a

$$\Sigma\operatorname{tg}(\gamma-\delta)=\Pi\operatorname{tg}(\gamma-\delta); \qquad (3)$$

des égalités (2) et (3) résulte l'identité proposée.

*Solution par* M. E. Gelin. Si

$$p+q+r=0,$$
$$\operatorname{tg}p+\operatorname{tg}q+\operatorname{tg}r=\operatorname{tg}p\operatorname{tg}q\operatorname{tg}r.$$

Cette identité donne

$$\operatorname{tg}(c-d)\operatorname{tg}(d-b)\operatorname{tg}(b-c)=\operatorname{tg}(b-c)+\operatorname{tg}(c-d)+\operatorname{tg}(d-b).$$

Multiplions les deux membres par $\operatorname{tg}(a-b)\operatorname{tg}(a-c)\operatorname{tg}(a-d)$; le second membre devient

$$-\operatorname{tg}(a-b)\operatorname{tg}(b-c)\operatorname{tg}(c-a)\operatorname{tg}(a-d)$$
$$-\operatorname{tg}(a-c)\operatorname{tg}(c-d)\operatorname{tg}(d-a)\operatorname{tg}(a-b)$$
$$-\operatorname{tg}(a-b)\operatorname{tg}(b-d)\operatorname{tg}(d-a)\operatorname{tg}(a-c).$$

Si dans chacun de ces termes on remplace le produit des trois premières tangentes (les arcs correspondants ont pour somme 0) par leur somme, on trouve, après suppression des termes qui se détruisent deux à deux,

$$-\operatorname{tg}(a-d)\operatorname{tg}(b-c)-\operatorname{tg}(a-b)\operatorname{tg}(c-d)-\operatorname{tg}(a-c)\operatorname{tg}(d-b),$$

ce qui démontre la question.

Notes. 1. M. Emmerich observe que par le changement de $a$ en $90^\circ+a$ l'identité (A) devient

$$\operatorname{cotg}(a-b)\operatorname{tg}(c-d)+\operatorname{cotg}(a-c)\operatorname{tg}(d-b)+\operatorname{cotg}(a-d)\operatorname{tg}(b-c)$$
$$=-\operatorname{cotg}(a-b)\operatorname{cotg}(a-c)\operatorname{cotg}(a-d)\operatorname{tg}(b-c)\operatorname{tg}(c-d)\operatorname{tg}(d-b),$$

ou

$$\frac{\operatorname{tg}(c-d)}{\operatorname{tg}(a-b)}+\frac{\operatorname{tg}(d-b)}{\operatorname{tg}(a-c)}+\frac{\operatorname{tg}(b-c)}{\operatorname{tg}(a-d)}+\frac{\operatorname{tg}(b-c)\operatorname{tg}(c-d)\operatorname{tg}(d-b)}{\operatorname{tg}(a-b)\operatorname{tg}(a-c)\operatorname{tg}(a-d)}=0.$$

2. Entre trois arcs $a$, $b$, $c$, on a les égalités

$$\Sigma \sin a \sin(b-c) = 0, \quad \Sigma \cos a \sin(b-c) = 0,$$

qu'on obtient en développant suivant les éléments de la première colonne les déterminants nuls

$$\begin{vmatrix} \sin a & \sin a & \cos a \\ \sin b & \sin b & \cos b \\ \sin c & \sin c & \cos c \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \cos a & \sin a & \cos a \\ \cos b & \sin b & \cos b \\ \cos c & \sin c & \cos c \end{vmatrix}.$$

En y remplaçant $a$, $b$, $c$ par $a-d$, $b-d$, $c-d$, on obtient les identités

$$\Sigma \sin(a-b)\sin(c-d) = 0, \quad \Sigma \cos(a-b)\sin(c-d) = 0,$$

dans lesquelles on ne fait porter la permutation circulaire que sur les lettres $b$, $c$, $d$. La première de ces relations conduit facilement au théorème sur le produit des diagonales d'un quadrilatère inscriptible et à une proposition sur les aires des triangles qui ont un sommet commun O et pour bases les six côtés d'une quadrangle complet ABCD, à savoir :

$$\mathrm{OAB}.\mathrm{OCD} + \mathrm{OAC}.\mathrm{ODB} + \mathrm{OAD}.\mathrm{OBC} = 0.$$

Si l'on développe les déterminants

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \sin 2a & \cos 2a \\ 1 & 1 & \sin 2b & \cos 2b \\ 1 & 1 & \sin 2c & \cos 2c \\ 1 & 1 & \sin 2d & \cos 2d \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & \sin^2 a & \sin a \cos a & \cos^2 a \\ 1 & \sin^2 b & \sin b \cos b & \cos^2 b \\ 1 & \sin^2 c & \sin c \cos c & \cos^2 c \\ 1 & \sin^2 d & \sin d \cos d & \cos^2 d \end{vmatrix}$$

suivant les éléments de la première colonne, on obtient une autre identité entre quatre arcs :

$$\sin(a-b)\sin(b-c)\sin(c-a) - \sin(b-c)\sin(c-d)\sin(d-b) + \sin(c-d)\sin(d-a)\sin(a-b) - \sin(d-a)\sin(a-b)\sin(b-d) = 0,$$

dont on peut déduire une propriété des quatre triangles formés par quatre droites prises trois à trois. Si $S_1$, $S_2$, $S_3$, $S_4$ sont les aires de ces triangles, et $R_1$, $R_2$, $R_3$, $R_4$ les rayons des cercles circonscrits, on a

$$\frac{S_1}{R_1^2} - \frac{S_2}{R_2^2} + \frac{S_3}{R_3^2} - \frac{S_4}{R_4^2} = 0.$$

Peut-on de même démontrer et interpréter géométriquement l'identité (A)?

**8.** Nous avons été conduit à l'identité (A) en cherchant l'intégrale de

$$\operatorname{tg}(x-a)\operatorname{tg}(x-b)\operatorname{tg}(x-c)\,dx.$$

Pour cela, on pose

$$\operatorname{tg}(x-a)\operatorname{tg}(x-b)\operatorname{tg}(x-c)=A\operatorname{tg}(x-a)+B\operatorname{tg}(x-b)+C\operatorname{tg}(x-c). \quad (N)$$

En faisant $x=a, b, c$, on trouve

$$\frac{A}{\operatorname{tg}(b-c)}=\frac{B}{\operatorname{tg}(c-a)}=\frac{C}{\operatorname{tg}(a-b)}, \quad \text{ou} \quad A=\rho\operatorname{tg}(b-c), \ldots$$

Substituant ces valeurs dans (N) et remplaçant $x$ par 0, on obtient le facteur de proportionnalité $\rho$.

Les valeurs de A, B, C, $\rho$ rendent les deux membres de (N) identiques. Car si l'on développe $\operatorname{tg}(x-a)$, $\operatorname{tg}(x-b)$, $\operatorname{tg}(x-c)$ et que l'on chasse les dénominateurs, les deux membres de (N) seront des polynômes du troisième degré en $\operatorname{tg} x$, qui prennent la même valeur pour quatre valeurs $\operatorname{tg} a$, $\operatorname{tg} b$, $\operatorname{tg} c$, 0 de $\operatorname{tg} x$; donc etc.

(J. N.)

M. François (La Haye) a également résolu la question 770.

---

## QUESTIONS PROPOSÉES.

**779.** Soient AA′, BB′ deux diamètres rectangulaires d'un cercle O. Une sécante quelconque menée par A rencontre BB′ en C; la perpendiculaire élevée en C sur AC coupe AA′ en D; trouver le lieu géométrique du point M, intersection de AC avec BD.

En déduire la construction d'un angle dont la tangente soit le carré de la tangente d'un angle donné. (H. Brocard.)

**780.** Un diamètre d'une ellipse est donné en grandeur et en position. Son conjugué est donné en grandeur seulement. Trouver le lieu des foyers. (A. Morel.)

**781.** Par l'extrémité B du diamètre de courbure AB au point A d'une hyperbole, on mène sur une asymptote une perpendiculaire, qui coupe en K la tangente au point A. Soit N le point où la normale AB rencontre la seconde fois l'hyperbole. Démontrer que le droite NK et la seconde asymptote sont également inclinées sur la normale AB. (Cl. Servais.)

**782.** On considère toutes les paraboles touchant une droite donnée AB au même point A et ayant même diamètre AC. Démontrer que le

centre des moyennes harmoniques, relatif au diamètre AC, des points où chacune de ces paraboles rencontre une courbe géométrique donnée, est un point fixe. (Cl. Servais.)

*783. De combien de manières un pion du jeu de dames, placé en un coin du damier, peut il se rendre sur le bord opposé en progressant par cases consécutives parallèlement à l'une ou l'autre diagonale ?

Suivant que le damier a $2n$ ou $2n+1$ cases de côté, le nombre cherché est égal à $C_{2n-1,n-1}$ ou $C_{2n,n}$. (Éd. Lucas.)

784. Trouver

$$\int \frac{\sin(x-a_1)\sin(x-a_2)\dots\sin(x-a_m)}{\sin(x-b_1)\sin(x-b_2)\dots\sin(x-b_n)}\,dx.$$ (J. Neuberg.)

785. Soient $H_a$, $H_b$, $H_c$ les pieds des hauteurs d'un triangle ABC; $M_a$, $M_b$, $M_c$ les points de rencontre des droites AM, BM, CM avec BC, CA, AB. Les triangles $AH_bH_c$, $H_aBH_c$, $H_aH_bC$ étant semblables à ABC, appelons $M'_a$, $M'_b$, $M'_c$ respectivement l'homologue de $M_a$ dans $AH_cH_b$, l'homologue de $M_b$ dans $H_aBH_c$, l'homologue de $M_c$ dans $H_aH_bC$. Trouver le lieu du point M tel que les droites $M_aM'_a$, $M_bM'_b$, $M_cM'_c$ concourent en un même point M'; trouver aussi le lieu du point M'. (E. Lemoine.)

*786. Les côtés AB, BC, CD, DA d'un quadrangle sphérique ABCD étant divisés aux points E, F, G, H de manière que

$$\frac{\sin AE}{\sin BE}=\frac{\sin CF}{\sin BF}=\frac{\sin CG}{\sin DG}=\frac{\sin AH}{\sin DH}=\lambda,$$

démontrer que les arcs de grand cercle EG, FH se coupent en un point I de l'arc joignant les milieux K, L des diagonales AC, BD. Si ces diagonales sont égales, on a $\sin KL : \sin LI = \lambda$. (J. Tate.)

*787. Les côtés BC, CA, AB d'un triangle ABC sont divisés aux points P, Q, R dans un même rapport $p:q$ et aux points P', Q', R' dans le rapport inverse. Démontrer que les cercles PQR, P'Q'R' ont pour axe radical la droite QR joignant le centre de gravité de ABC au point de Lemoine. (Tucker.)

Lorsque le rapport $p:q$ varie, l'axe radical des cercles ABC, PQR enveloppe une conique. (J. N.)

## SUR QUELQUES SUITES FINIES;

par M. VERNIORY, élève-ingénieur des mines (Liége).(*)

1. Posons

$$U_k^\alpha \equiv \sum_{i=1}^{i=n} i^\alpha (i+1)(i+2)\cdots(i+k-1),$$

$k$ et $\alpha$ étant regardés comme des *indices* de U. Comme on a

$$i^{\alpha-1}(i+1)(i+2)\cdots(i+k-1)(i+k)$$
$$= i^\alpha (i+1)(i+2)\cdots(i+k-1) + k i^{\alpha-1}(i+1)(i+2)\cdots(i+k-1),$$

on trouve, en faisant $i = 1, 2, \cdots, n$, et en ajoutant les égalités ainsi obtenues,

$$U_{k+1}^{\alpha-1} = U_k^\alpha + k U_k^{\alpha-1},$$

d'où

$$U_k^\alpha = U_{k+1}^{\alpha-1} - k U_k^{\alpha-1}. \qquad (A)$$

Cette formule permet de calculer, de proche en proche, la valeur de $U_k^\alpha$, car l'on sait que

$$U_k^1 = \frac{n(n+1)\cdots(n+k)}{k+1}.$$

On peut déduire, de l'égalité (A), une formule exprimant $U_k^\alpha$ en fonction des quantités connues $U_k^1$, $U_{k+1}^1$, $U_{k+2}^1$, ... $U_{k+\alpha-1}^1$; mais le résultat n'a rien de remarquable.

Désignons par $N_p$ la somme de tous les produits des nombres $1, 2, \ldots, k-1$ pris $p$ à $p$, et par $S_p$ la somme des puissances $p^{es}$ des nombres $1, 2, \ldots, n$; on trouve facilement

$$U_k^\alpha = S_{\alpha+k-1} + N_1 S_{\alpha+k-2} + N_2 S_{\alpha+k-3} + \cdots + N_{k-1} S_\alpha.$$

2. Soit maintenant

$$U_{k,p}^\alpha = \sum_{i=1}^{i=n} i(i+1)(i+2)\cdots(i+p-1)^\alpha (i+p)\cdots(i+k-1).$$

Si l'on remplace $i+k$ par $(i+p-1)+(k-p+1)$, on trouve

$$i(i+1)\cdots(i+p-1)^{\alpha-1}(i+p)\cdots(i+k-1)(i+k)$$
$$= i(i+1)\cdots(i+p-1)^\alpha (i+p)\cdots(i+k-1)$$
$$+ (k-p+1)\, i(i+1)\cdots(i+p-1)^{\alpha-1}(i+p)\cdots(i+k-1);$$

(*) Aujoud'hui ingénieur des mines à Mons.

par conséquent,

$$U^{\alpha}_{k+1,p} = U^{\alpha}_{k,p} + (k-p+1)\,U^{\alpha-1}_{k},$$

d'où

$$U^{\alpha}_{k,p} = U^{\alpha-1}_{k+1,p} - (k-p+1)\,U^{\alpha-1}_{k,p}. \qquad (B)$$

Au moyen de cette formule, on peut faire dépendre le calcul de $U^{\alpha}_{k,p}$, des expressions de $U^{1}_{k,p}$, $U^{1}_{k+1,p}$, ..., $U^{1}_{k+\alpha-1,p}$.

**3.** Faisons

$$U_{k,pqr} = \sum_{i=1}^{i=n} i(i+1)\cdots(i+p-1)^2\cdots(i+q-1)^2\cdots(i+r-1)^2\cdots(1+k-1).$$

Dans le second membre, les facteurs de rangs $p, q, r, \ldots$ sont élevés au carré. Si l'on fait $p-1=p'$, $q-1=q'$, $r-1=r'$, on peut écrire

$$\begin{aligned} &i(i+1)\cdots(i+p-1)^2\cdots(i+q-1)^2\cdots(i+r-1)^2\cdots(i+k-1)\\ &= i(i+1)\cdots(i+p-1)\cdots(i+q-1)\cdots(i+r-1)\cdots(i+k-1)\\ &\qquad \times(i+p')(i+q')(i+r'); \end{aligned}$$

par suite

$$U_{k,pqr} = U^{1}_{k,1} + (p'+q'+r')\,U^{2}_{k,1} + (p'q'+q'r'+r'p')\,U^{3}_{k,1} + p'q'r'\,U^{4}_{k,1},$$

ce qu'on peut écrire symboliquement

$$U_{k,pqr} = U^{1}_{k,1}(U+p')(U+q')(U+r'),$$

les indices supérieurs de U se comportant comme des exposants.

Ce résultat peut être généralisé. En particulier,

$$\sum_{i=1}^{i=n} [i(i+1)(i+2)\cdots(i+k-1)]^2 = U^{2}_{k}(U+1)(U+2)\cdots(U+k-1).$$

**4.** Voici quelques applications :

$$\sum 1^2.2.3\cdots k = \frac{n(n+1)\cdots(n+k)\,[(k-1)n+1]}{(k+1)(k+2)},$$

$$\sum 1^2.2 = \frac{n(n+1)(n+2)(3n+1)}{12},$$

$$\sum 1^2.2 = \frac{n(n+1)(n+2)(12n^2+9n-1)}{60},$$

$$\sum 1^2.2^2.3.4\cdots k$$

$$= \frac{n(n+1)(n+2)\cdots(n+k)}{(k+1)(k+2)(k+3)}\,[n^2(k+1)(k+2)+n(k+1)(k+6)+4],$$

$$\Sigma 1.2.3\cdots p^2\cdots k$$
$$=\frac{n(n+1)(n+2)\cdots(n+k)}{(k+1)(k+2)}[(n-1)(k+1)+p(k+2)],$$

$$\Sigma(1.2.3)^2=\tfrac{1}{70}\cdot n(n+1)(n+2)(n+3)(10n^3+45n^2+47n+3),$$

$$\Sigma 1.2.3\cdots(k-1)k^2=\frac{n(n+1)\cdots(n+k)}{(k+1)(k+2)}[(k+1)n+(k^2+k+1)].$$

**Remarque.** On trouverait de même des formules relatives aux suites analogues dont les termes sont des produits de $k$ facteurs consécutifs d'une même progression arithmétique :

$$a,\ a+h,\ a+2h, \text{ etc.}$$

Seraing, 1888.

---

## SUR QUELQUES PROBLÈMES CONCERNANT LE DOUBLE CONTACT ET LE CONTACT DU TROISIÈME ORDRE DES CONIQUES;

par M. V. Retali, Professeur à Milan.

(*Suite et fin*, voir p. 178).

**11.** *Tracer une conique qui soit tangente à un cercle donné en un point donné* A *et en un autre point non déterminé, et qui passe par le centre* R *du cercle et par un autre point donné* B.

Soient C, D les intersections de la droite RB avec le cercle coupant orthogonalement le cercle donné sur la droite AB : les droites AC, AD sont les cordes de contact de deux coniques satisfaisant aux conditions données.

**12.** *Décrire une conique tangente à un diamètre et à l'une des directrices d'une hyperbole*(*), *qui ait avec cette hyperbole une asymptote commune et une autre tangente commune, non déterminée*, avec le même point de contact.

Nommons $d$ le diamètre, $r$ la directrice, R le foyer correspondant à cette directrice, $f$ l'asymptote, $b$ la longueur du demi-axe non transverse de l'hyperbole donnée. Par le point $rd$, menons les tangentes au cercle ayant R pour centre et $b$ pour rayon; ces tangentes coupent l'asymptote $f$ en deux points qui sont les pôles de contact des coniques satisfaisant à la question.

---

(*) Voir la *Remarque* du n° 1, qui est aussi applicable aux problèmes 14 et 15.

**13.** ***Décrire une conique qui soit tangente à un cercle donné en un point donné A et en un autre point déterminé, et qui, en outre, passe par le centre du cercle et soit tangente à une droite donnée b.***

Les tangentes menées par le point A au cercle qui coupe orthogonalement le cercle donné sur la droite *b*, sont les cordes des coniques cherchées.

**14.** ***Décrire une conique ayant un double contact avec une hyperbole donnée et qui touche l'une des directrices et un diamètre donné, celui-ci au centre de l'hyperbole.***

Nommons R le foyer correspondant à la directrice donnée, *d* le diamètre donné. Construisons le cercle ayant son centre en R et pour rayon le demi-axe non transverse de l'hyperbole donnée : le diamètre de l'hyperbole, conjugué à *d* par rapport à ce cercle, le coupe aux pôles de contact des deux coniques résolvant le problème.

**15.** ***Décrire une conique tangente à une hyperbole donnée en un point non déterminé, tangente à une directrice et passant par le centre de l'hyperbole.***

Soient *t* la tangente au point donné et R le foyer de l'hyperbole correspondant à la directrice donnée. Les points où *t* coupe le cercle ayant R pour centre et dont le rayon est égal au demi-axe transverse de l'hyperbole, sont les pôles de contact de deux coniques satisfaisant à la question.

**16.** Si *t* est l'une quelconque des quatre tangentes communes à l'hyperbole et au cercle du problème précédent, les coniques qui passent par le centre de l'hyperbole et ont avec cette courbe un contact du troisième ordre sur la droite *t*, sont tangentes à la directrice correspondante au foyer de l'hyperbole qui est le centre du cercle.

**17.** ***Décrire une conique qui ait un contact du troisième ordre avec un cercle donné, qui passe par le centre de ce cercle et soit tangente à une droite donnée.***

Menons le cercle qui coupe orthogonalement le cercle donné sur la droite donnée : les quatre tangentes communes à ces deux cercles orthogonaux sont les tangentes de contact des coniques cherchées.

**18.** ***Décrire une parabole tangente à un cercle donné en un point donné et en un autre point non déterminé, et qui passe par un point donné.***

Les tangentes menées par le point donné sur le cercle au cercle

qui coupe orthogonalement le cercle donné et a son centre au point donné, sont les cordes de contact des deux paraboles qui résolvent la question.

**19.** Les points d'osculation, avec un cercle, des paraboles qui ont avec lui un contact du troisième ordre et passent par un point donné, sont ses points de contact avec les tangentes qui lui sont communes avec le cercle orthogonal ayant son centre au point donné.

Milan, le 13 avril 1890.

NOTE. **1.** Soient $\alpha$, $\beta$ les coordonnées du pôle de contact de $K^1$ avec la conique cherchée. Celle-ci a pour équation

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 + \left(\frac{\alpha x}{a^2} - \frac{\beta y}{b^2} - 1\right)^2 = 0.$$

La condition de toucher la directrice représentée par $x = \frac{a^2}{c}$ donne l'égalité

$$(\alpha - c)^2 + \beta^2 = b^2.$$

Donc : *si une conique a un double contact avec une hyperbole donnée et touche une directrice de celle-ci, le pôle de la corde de double contact décrit une circonférence, ayant pour centre le foyer correspondant à la directrice et pour rayon le demi-axe imaginaire.*

**2.** L'équation d'une conique ayant un double contact avec la circonférence $x^2 + y^2 - r^2 = 0$ et passant par le centre est

$$x^2 + y^2 - r^2 + (ax + by + r)^2 = 0.$$

Si la conique touche la droite $ax = r^2$, on a l'égalité de condition

$$(a^2 + b^2 + 1)\, r^2 + 2ar\alpha - b^2\alpha^2 = 0.$$

On en conclut que *la corde de contact enveloppe une circonférence ayant pour centre le point* $(\alpha, 0)$ *et pour rayon la tangente menée de ce point au cercle donné.*

**3.** Soient $x^2 + y^2 - r^2 = 0$ l'équation du cercle donné, $x\cos\delta + y\sin\delta - p = 0$ celle de la corde de contact, $\alpha$ et $\beta$ les coordonnées de R. La parabole a pour équation

$$x^2 + y^2 - r^2 - (x\cos\delta + y\sin\delta - p)^2 = 0,$$

avec la condition

$$\alpha^2 + \beta^2 - r^2 - (\alpha\cos\delta + \beta\sin\delta - p)^2 = 0.$$

On en déduit que *la corde de contact enveloppe un cercle ayant pour centre le point* R *et pour rayon la tangente menée de* R *au cercle.*

4. Comparer CHASLES, *Traité des sections coniques*, p. 351, problème V.

5. L'équation d'une conique ayant un double contact avec la circonférence $x^2 + y^2 - r^2 = 0$ et passant par le centre de cette courbe, est

$$x^2 + y^2 - r^2 + (\alpha x + \beta y - r)^2 = 0.$$

Si la conique passe par un point donné P $(x_1, y_1)$, on a l'égalité

$$\alpha x_1 + \beta y_1 - r = \pm\sqrt{r^2 - x_1^2 - y_1^2};$$

celle-ci exprime que la corde de contact passe par un point fixe ayant pour coordonnées

$$\frac{rx_1}{r \pm \sqrt{r^2 - x_1^2 - y_1^2}}, \quad \frac{ry_1}{r \pm \sqrt{r^2 - x_1^2 - y_1^2}}.$$

Ce point est situé sur la droite R P.

De même, si la conique doit passer par un second point donné Q, la corde des contacts passe par un point déterminé de la droite RQ.

6. Comparer CHASLES, *Sections coniques*, p. 352, problème VI.

7. Voici une solution assez simple de ce problème.

Si la parabole touche le cercle aux points A et B et a pour foyer le point F, les normales en A et B concourent au centre N du cercle, et les tangentes en A et B en un point T. T et N sont sur l'axe de la parabole, et F est le milieu du segment TN. Donc la circonférence décrite du centre F avec le rayon FN passe par A et B, etc.

8. La solution se déduit de la propriété qui a servi à résoudre le problème 2°.

9. Une conique qui passe par le centre de la circonférence $x^2 + y^2 - r^2 = 0$ et a avec elle un contact du troisième ordre a une équation de la forme

$$x^2 + y^2 - r^2 + (x \cos\alpha + y \sin\alpha - r)^2 = 0,$$

car les sécantes communes se réduisent à une tangente au cercle.

Si la conique doit passer par le point A $(x_1, y_1)$, on doit avoir

$$x_1 \cos\alpha + y_1 \sin\alpha - r = \pm\sqrt{r^2 - x_1^2 - y_1^2}.$$

La tangente commune passe donc par le point ayant pour coordonnées

$$\frac{rx_1}{r \pm \sqrt{r^2 - x_1^2 - y_1^2}}, \quad \frac{ry_1}{r \pm \sqrt{r^2 - x_1^2 - y_1^2}}.$$

De là, une autre solution que celle du texte.

**10.** L'équation d'un cercle doublement tangent à la parabole $y^2 - 2px = 0$ est de la forme

$$y^2 - 2px + (ax + by + c)^2 = 0.$$

On trouve immédiatement les conditions $b = 0$, $a = 1$; la corde de contact est donc perpendiculaire aux diamètres de la parabole. On a ensuite l'identité :

$$y^2 - 2px = S - (x + c)^2,$$

si $S = 0$ est l'équation du cercle. Par conséquent, la tangente menée par un point A de la parabole au cercle est égale à la distance de A à la corde de contact, etc.

**11.** Voir le n° 5.

**12.** L'hyperbole cherchée a un double contact avec l'hyperbole donnée, la corde de contact étant parallèle à une asymptote. La propriété qui a servi à résoudre le problème 1°, donne aussi la solution de la question actuelle.

**13.** Voir le n° 2.

**14** et **15.** Voir le n° 1.

**17** Voir le n° 2.

**18.** Voir le n° 3. (J. N.)

---

## THÉORIE DES PLANS HYPERCYCLIQUES DES SURFACES DU SECOND DEGRÉ;

par M. Joseph Gillet, Docteur en sciences physiques et mathématiques, professeur à l'École Abbatiale de Maredsous.

(Suite et fin, voir *Mathesis*, (2), II, pp. 153 et 180.)

### IV. Cylindre hyperbolique.

**20.** ***Condition pour qu'un plan donné soit hypercyclique.*** Lorsqu'on cherche les axes de la section du cylindre

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{53}$$

par le plan

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = 0, \tag{54}$$

l'équation de Sedley Taylor se réduit à

$$\frac{a^2\alpha^2}{R^2 - a^2} - \frac{b^2\beta^2}{R^2 + b^2} - \gamma^2 = 0, \tag{55}$$

ou

$$\gamma^2 R^4 + [a^2\alpha^2 - b^2\beta^2 - (a^2 + b^2)\gamma^2]\, R^2 - a^2 b^2 = 0. \tag{56}$$

Pour que la section soit une hyperbole équilatère, il faut que la somme $R_1^2 + R_2^2$ soit nulle, c'est-à-dire que

$$a^2\alpha^2 - b^2\beta^2 - (a^2 + b^2)\gamma^2 = 0; \tag{57}$$

cette condition exige que l'on ait $a^2 > b^2$.

Lorsqu'elle est vérifiée, on trouve pour carrés des demi-axes de la section :

$$R^2 = \pm\frac{ab}{\gamma}, \tag{58}$$

et pour équations des axes :

$$\frac{x(R^2 - a^2)}{a^2\alpha} = \frac{y(R^2 + b^2)}{b^2\beta} = -\frac{z}{\gamma}, \tag{59}$$

$R^2$ étant à remplacer par une des valeurs (58).

**21.** ***Enveloppe des plans hypercycliques passant par l'origine.*** La relation (57) exprime que le plan sécant est tangent au cône

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{a^2 + b^2} = 0; \tag{60}$$

la génératrice de contact a pour équations :

$$\frac{x}{a^2\alpha} = -\frac{y}{b^2\beta} = \frac{z}{(a^2 + b^2)\gamma}; \tag{61}$$

on peut donc énoncer le théorème suivant :

***Les plans hypercycliques issus d'un point de l'axe du cylindre*** (53) ***enveloppent un cône du second degré.***

En combinant par soustraction les équations (53) et (60), on obtient après réductions

$$z = \pm\sqrt{a^2 + b^2}. \tag{62}$$

On conclut de là que ***le cône enveloppe rencontre le cylindre donné suivant deux hyperboles dont les plans sont perpendiculaires à l'axe de ce cylindre.***

Lorsque les plans hypercycliques, au lieu de passer par l'origine, sont issus d'un point $(\xi, \eta, \zeta)$, le cône enveloppe a pour équation :

$$\frac{(x-\xi)^2}{a^2} - \frac{(y-\eta)^2}{b^2} - \frac{(z-\zeta)^2}{a^2+b^2} = 0. \qquad (63)$$

**82.** Les centres de toutes les sections hypercycliques sont distribués sur l'axe du cylindre. — Quant aux axes des sections qui passent par l'origine, on trouve, en procédant comme pour l'hyperboloïde (§ **81**), qu'ils sont les génératrices du cône représenté par l'équation :

$$\left.\begin{aligned} &a^2[(a^2+b^2)y^2 + b^2z^2]^2 x^2 \\ &- b^2[(a^2+b^2)x^2 + a^2z^2]^2 y^2 \\ &- (a^2-b^2)[a^2y^2 - b^2x^2]z^2 = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (64)$$

---

## *BIBLIOGRAPHIE.

*Premiers principes d'algèbre à l'usage des classes de Troisième et de Seconde*, par C.-A. Laisant, ancien élève de l'École Polytechnique, docteur es sciences mathématiques, et Elie Perrin, professeur de mathématiques à l'École J. B. Say; avec plus de 1200 exercices gradués. Paris, Delagrave, 1892. Un vol. in-12° de X-345 p.

Ce volume fait partie du cours complet d'enseignement secondaire conforme aux programmes officiels de 1891, que publie la librairie Delagrave.

Voici comment les auteurs exposent, dans l'avant-propos, le but et le plan de leur ouvrage.

« L'Algèbre est une science claire et simple, une langue écrite, dont la précision est entière, dont les règles sont enchaînées avec une admirable rigueur.

« Présenter les premiers éléments de la syntaxe de cette langue du calcul, avec la plus grande clarté et la plus grande simplicité, tel est le but que nous avons essayé d'atteindre.

« Bien que ce petit livre soit spécialement destiné aux classes de *troisième* et de *seconde* de l'enseignement secondaire moderne, nous y voyons, d'une manière plus générale, un moyen d'initiation pour quiconque veut aborder l'étude des premières notions d'algèbre en possédant uniquement les éléments ordinaires d'arithmétique. A ce point de vue, nos *premiers principes* pourront, nous en sommes convaincus, rendre de précieux services aux élèves et aux professeurs des classes préparatoires aux baccalauréats, et aux candidats qui se destinent à certaines écoles spéciales.

« Nous avons adopté la division en leçons, qui se prête mieux que toute autre à une étude progressive. La première partie (1re à 11e leçon, inclusivement) comprend le *calcul littéral*, base fondamentale de l'algèbre et dont il faut avant tout posséder la pratique. Des règles précises, nettement formulées, permettent à l'élève un peu attentif, de faire rapidement des progrès qui encourageront ses efforts.

« Dans le *Calcul par équations* (12e à 29e leçon), nous avons cru nécessaire de discuter quelques équations, dans le but de développer l'intelligence des élèves, et d'effacer les doutes et les obscurités que l'absence de discussion engendre assez souvent dans l'esprit. Dans cet ordre d'idées, nous avons notamment consacré deux leçons (25e et 26e) à l'étude du trinôme du 2e degré.... Nous avons aussi étudié quelques équations qui se ramènent immédiatement à celles du 2e degré, à cause de leur importance comme applications, et du rôle qu'elles jouent également dans un grand nombre de questions d'examen.

« L'étude générale des problèmes a été l'objet de toute notre attention. Nous avons surtout insisté sur la différence fondamentale, et qu'on n'établit pas toujours assez nettement, entre la solution d'un problème et la solution des équations auxquelles ce problème conduit.

« La théorie des *Progressions et des Logarithmes* (30e à 34e leçon) a été traitée, comme l'exigent les programmes, avec toute la netteté désirable, mais cependant d'une façon assez sommaire, sans se perdre dans de fastidieux développements. Nous avons jugé bon d'y introduire quelques courtes indications sur la *Règle à calcul*, qui rend de si grands services dans la pratique.

« Un *Appendice* contient quelques notions sur divers sujets qui d'habitude ne sont pas compris dans l'algèbre élémentaire, mais qui cependant, par leur nature même, ne sortent pas des limites abordables pour les commençants. Ces aperçus sont de nature à éveiller la curiosité des élèves, et à provoquer chez eux l'initiative et l'esprit de recherche.

« Enfin, nous avons complété notre livre par un choix d'exercices et de problèmes gradués, dont les énoncés figurent à la suite de chaque leçon, ainsi que par des *exercices divers*, qui terminent le volume. Nous avons cherché à varier autant que possible ces applications, de manière à présenter surtout un grand nombre de *types de problèmes*. Nous pensons que les professeurs trouveront là une source abondante d'exercices utiles. »

C'est avec le plus vif intérêt que nous avons pris connaissance des *Premiers principes d'algèbre*. Ce livre est fort bien écrit : le style en est simple, clair, parfaitement approprié à la matière; les auteurs ont su se borner à ce qui est à la portée des commençants, sans les fatiguer et sans rien omettre de ce qui est essentiel. Les exercices sont d'un choix très heureux ; ils sont très propres à initier rapidement les élèves au mécanisme du calcul et à leur inspirer le goût de la science.

Bien que l'ouvrage soit plus spécialement écrit pour les établissements français, les professeurs et les élèves des athénées ou collèges belges peuvent en retirer le plus grand fruit. (J. N.).

## NOTES MATHÉMATIQUES.

**13.** *Sur un théorème de Jacobi*, par M^e^ PRIME. Soient $u_1, u_2, \cdots u_n$ $n$ fonctions distinctes de $n$ variables indépendantes $x_1, x_2, \cdots x_n$ Imaginons que l'on élimine successivement les variables $x_1, x_2, \cdots x_{n-1}$ et qu'ainsi on exprime les quantités $u$ par des relations de la forme

$$u_i = f_i(u_1, u_2, \cdots u_{i-1}, x_i, \cdots x_n).$$

Posons

$$F_i = u_i - f_i.$$

Le déterminant fonctionnel $D\left(\frac{u}{x}\right)$ devient un déterminant fonctionnel de fonctions implicites et, par suite,

$$D\left(\frac{u}{x}\right) = (-1)^n . D\left(\frac{F}{x}\right) : D\left(\frac{F}{u}\right).$$

Mais :

$$(-1)^n . D\left(\frac{F}{x}\right) = (-1)^n \begin{vmatrix} -\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{\partial f_1}{\partial x_2} & -\frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \\ -\frac{\partial f_1}{\partial x_n} & -\frac{\partial f_2}{\partial x_n} & \cdots & -\frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{i=n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i},$$

et

$$D\left(\frac{F}{u}\right) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & & 0 \\ -\frac{\partial f_2}{\partial u_1} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \\ -\frac{\partial f_n}{\partial u_1} & -\frac{\partial f_n}{\partial u_2} & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

donc :

$$D\left(\frac{u}{x}\right) = \prod_{i=1}^{i=n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}. \qquad \text{C. Q. F. T.}$$

REMARQUE. Comme on suppose les fonctions $u$ distinctes, l'élimination des variables $x$ pourra se faire.

×22. *Sur les coefficients binomiaux, par* M. MANDART.

I. Si $p < n$, on a :

$$C_{n,1} - 2^p C_{n,2} + 3^p C_{n,3} \cdots + (-1)^{n-1} n^p C_{n,n} = 0,$$

Si $p = n$, on trouve

$$C_{n,1} - 2^n C_{n,2} + 3^n C_{n,3} \cdots + (-1)^{n-1} n^n C_{n,n} = (-1)^{n-1} 1.2.3 \ldots n.$$

En effet,

$$(1-x)^n = 1 - C_{n,1} x + C_{n,2} x^2 \cdots + (-1)^n C_{n,n} x^n.$$

Dérivons :

$$n(1-x)^{n-1} = C_{n,1} - 2C_{n,2} x + \cdots + (-1)^{n-1} n C_{n,n} x^{n-1}.$$

Multipliant par $x$ et dérivant, on trouve

$$n(1-x)^{n-1} - n(n-1)(1-x)^{n-2} = C_{n,1} - 2^2 C_{n,2} x + \cdots + (-1)^{n-1} n^2 C_{n,n} x^{n-1}.$$

Si l'on répète cette dernière opération $(p-1)$ fois, on aura

$$(1-x) F(1-x) = C_{n,1} - 2^p C_{n,2} x + \cdots + (-1)^{n-1} n^p C_{n,n} x^{n-1};$$

en faisant $x = 1$, on obtient la première formule.

Si l'on avait répété l'opération $(n-1)$ fois, on aurait eu :

$$(1-x) F(1-x) + (-1)^{n-1} n(n-1) \cdots 2.1 = C_{n,1} - 2^n C_{n,2} x + \cdots + (-1)^{n-1} n^n C_{n,n} x^{n-1}.$$

L'hypothèse $x = 1$ donne la seconde formule :

$$C_{n,1} - 2^n C_{n,2} + 3^n C_{n,3} \cdots + (-1)^{n-1} n^n C_{n,n} = (-1)^{n-1} \times 1.2.3 \ldots n.$$

II. On a les formules suivantes :

$$1.2.3 \ldots p.\, C_{n,1} - 2.3.4 \ldots (p+1) C_{n,2} + 3.4.5 \ldots (p+2) C_{n,3} - \ldots - (-1)^n n(n+1) \ldots (n+p-1) C_{n,n} = 0,$$

$$1.2.3 \ldots n\, C_{n,1} - 2.3.4 \ldots (n+1) C_{n,2} + 3.4.5 \ldots (n+2) C_{n,3} - \ldots - (-1)^n n(n+1) \ldots (2n-1) C_{n,n} = (-1)^{n+1} 1.2.3.4 \ldots n$$

où $p$ est plus petit que $n$.

En effet, partons de la formule :

$$(1-x)^n = 1 - C_{n,1} x + C_{n,2} x^2 - C_{n,3} x^3 + \ldots + (-1)^n C_{n,n} x^n.$$

On en déduit par dérivation :

$$n(1-x)^{n-1} = 1.C_{n,1} - 2 C_{n,2} x + 3 C_{n,3} x^2 - \ldots - n(-1)^n C_{n,n} x^{n-1}.$$

Multiplions par $x^2$ et dérivons :

$$2.n(1-x)^{n-1}x - n(n-1)(1-x)^{n-2}x^2$$
$$= 1.2.C_{n,1}x - 2.3.C_{n,2}x^2 + 3.4\,C_{n,3}x^3 - \ldots - n(n+1)(-1)^n C_{n,n}x^n.$$

Faisons l'opération précédente $(p-1)$ fois, nous aurons pour le premier membre de l'égalité résultante un multiple de $1-x$ et pour le second,

$$1.2.3\ldots p\,C_{n,1}x^{p-1} - 2.3.4\ldots(p+1)C_{n,2}x^p$$
$$+ \ldots - n(n+1)\ldots(n+p-1)(-1)^n C_{n,n}x^{n+p-2}.$$

Si nous faisons $x=1$, nous avons la première formule.

Si nous avions répété l'opération $(n-1)$ fois, on aurait eu pour le premier membre de l'égalité résultante :

$$\text{multiple de } (1-x) + (-1)^{n+1}\,1.2.3\ldots n.x^{2n-2}$$

et pour le second,

$$1.2.3\ldots n\,C_{n,1}x^{n-1} + 2.3.4\ldots(n+1)C_{n,2}x^n + \cdots$$
$$- n(n+1)\ldots(2n-1)(-1)^n C_{n,n}x^{2n-2}.$$

Si l'on fait $x=1$, on a la seconde formule.

×**15.** *Sur les coefficients binomiaux; par* M. Cristesco. Soit $n_p$ le coefficient de $x^p$ dans le développement de $(1+x)^n$. On a les relations :

1° $$1 + n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_n$$
$$= (1 - n_2 + n_4 - n_6 + \cdots)^2 + (n_1 - n_3 + n_5 - n_7 + \cdots)^2.$$

2° Si $n = 2k+1$,

$$(-1)^k(1 + n_1 + n_2 + \cdots + n_n) =$$
$$2[1 - n_2 + n_4 - n_6 + \cdots + (-1)^k n_{n-1}][n_1 - n_3 + n_5 - n_7 + \cdots + (-1)^k n_n].$$

3° Si $n = 4k+2$,

$$1 - n_2 + n_4 - n_6 + \cdots - n_n = 0.$$

4° Si $n = 4k$,

$$n_1 - n_3 + n_5 - n_7 + \cdots - n_{n-1} = 0.$$

*Démonstration.* 1° On a

$$\left.\begin{array}{l}(1+\sqrt{-1})^n = \\ (1 - n_2 + n_4 - n_6 + \cdots) + \sqrt{-1}\,(n_1 - n_3 + n_5 - n_7 + \cdots),\end{array}\right\} \quad (1)$$

$$\left.\begin{array}{l}(1-\sqrt{-1})^n = \\ (1 - n_2 + n_4 - n_6 + \cdots) - \sqrt{-1}\,(n_1 - n_3 + n_5 - n_7 + \cdots).\end{array}\right\} \quad (2)$$

Si l'on multiplie ces deux égalités membre à membre, on a

$$2^n = 1 + n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_n$$
$$= (1 - n_2 + n_4 - n_6 + \cdots)^2 + (n_1 - n_3 + n_5 - n_7 + \cdots)^2.$$

2° En ajoutant et en retranchant membre à membre les égalités (1) et (2), on obtient

$$(1 + \sqrt{-1})^n + (1 - \sqrt{-1})^n = 2(1 - n_2 + n_4 - n_6 + \cdots)$$
$$(1 + \sqrt{-1})^n - (1 - \sqrt{-1})^n = 2\sqrt{-1}(n_1 - n_3 + n_5 - n_7 + \cdots).$$

Si l'on multiplie ces deux dernières égalités on a

$$\left.\begin{array}{c}(2\sqrt{-1})^n - (-2\sqrt{-1})^n \\ = 2^2\sqrt{-1}(1 - n_2 + n_4 - n_6 + \cdots)(n_1 - n_3 + n_5 - n_7 + \cdots)\end{array}\right\} (3)$$

Soit $n = 2k + 1$, $k$ étant un nombre entier quelconque positif ; l'égalité précédente devient

$$2.2^n(-1)^k =$$
$$2^2(1 - n_2 + n_4 - n_6 + \cdots + (-1)^k n_{n-1})(n_1 - n_3 + n_5 + n_3 - n_7 + \cdots (-1)^k n_n)$$

ou

$$(-1)^k(1 + n_1 + n_2 + \cdots + n_n)$$
$$= 2(1 - n_2 + n_4 - \cdots + (-1)^k n_{n-1})(n_1 - n_3 + n_5 - \cdots + (-1)^k n_n).$$

3° et 4°. Si $n = 2(2k + 1)$, ou si $n = 4k$, la relation (3) donne respectivement

$$1 - n_2 + n_4 - n_6 + \cdots - n_n = 0, \quad (4)$$
$$n_1 - n_3 + n_5 - n_7 + \cdots - n_{n-1} = 0. \quad (5)$$

Les égalités (4) et (5) sont évidentes ; car les termes à égale distance des extrêmes sont égaux et de signes contraires.

**16. *La formule de Snell ou d'Ozanam appartient à Nicolas de Cusa.*** (Extrait d'une lettre de M. *le Professeur* E. Lampe). « La formule dite d'Ozanam ou de Snell :

$$\varphi = \frac{3 \sin \varphi}{2 + \cos \varphi}$$

qui a fait l'objet de deux notes insérées aux tomes IX, p. 161, 181, 265 et X, p. 34 de *Mathesis*, se rencontre déjà deux siècles avant Snell et semble appartenir à Nicolas de Cusa. En effet, dans le second volume des

*Vorlesungen über die Geschichte der Mathematik* de Cantor, on trouve le passage suivant : « Il résulte de là enfin

$$\varphi = \frac{3\dfrac{a_n}{2s_n}}{2+\dfrac{p_n}{s_n}}, \qquad (1)$$

(formule où $a_n$ est le côté d'un polygone régulier de $n$ côtés inscrit dans un cercle de rayon $s_n$, circonscrit à un autre de rayon $p_n$ et où $\varphi$ est l'angle opposé à $\frac{1}{2}a_n$ dans le triangle rectangle ayant pour côtés $\frac{1}{2}a_n$, $p_n$, $s_n$). « On comprend mieux l'importance de ce résultat si l'on introduit les « notations modernes

$$\sin\varphi = \frac{a_n}{2s_n}, \quad \cos\varphi = \frac{p_n}{s_n}$$

« La formule approximative de N. de Cusa devient

$$\varphi = \frac{3\sin\varphi}{2+\cos\varphi}. \text{ »}$$

L'auteur trouve la relation (1), en supposant assez arbitrairement, ce semble, qu'il y a une valeur de $(x : s_n)$, qui, pour toute valeur de $n$, vérifie l'égalité

$$\frac{s_n\varphi}{\frac{1}{2}a_n} = \frac{s_n+x}{p_n+x}.$$

Il trouve $(x : s_n) =$ aproximativement 2, en posant $n = 4$, $n = 6$.

---

## SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES(*).

### Question 749.

(Voir *Mathesis*, (2), I, p. 281.)

*On donne deux cercles de même centre* O. *Par un point fixe* A *du cercle extérieur, on mène une sécante quelconque, rencontrant le cercle intérieur en* N, N′ *et le cercle extérieur en* P. *Trouver le lieu du point* M *où la droite* ON *coupe la tangente menée en* P *au cercle extérieur.* (MANDART.)

---

(*) Nous avons à mentionner de bonnes solutions de la question 759 par MM. Fraipont, Laurens et Delahaye, de la question 760 par M. Joachimescu, de la question 769 par MM. Déprez et Bergmans.

*Solution par* M^lle C. POMPILIANU. Soient

$$x^2 + y^2 = R^2, \quad x^2 + y^2 = r^2$$

les équations des deux cercles, et

$$y = m(x - R)$$

l'équation de la sécante AP. On trouve facilement pour les coordonnées de P :

$$x = R\frac{m^2 - 1}{m^2 + 1}, \quad y = -\frac{2Rm}{m^2 + 1};$$

la tangente PM a donc pour équation

$$(m^2 - 1)\,x - 2my = (m^2 + 1)\,R. \tag{1}$$

Des équations du cercle NN′ et de la droite AP, on déduit l'équation homogène en $x$, $y$,

$$(x^2 + y^2)\,m^2 R^2 - (y - mx)^2 r^2 = 0, \tag{2}$$

qui représente l'ensemble des deux droites ON, ON′.

Pour avoir le lieu cherché, il suffit d'éliminer $m$ entre les égalités (1) et (2). Introduisons les coordonnées polaires en remplaçant $x$, $y$ par $\rho\cos\omega$, $\rho\sin\omega$; nous aurons

$$\rho\,[(m^2 - 1)\cos\omega - 2m\sin\omega] = R(m^2 + 1),$$
$$mR = \pm r(\sin\omega - m\cos\omega).$$

On en déduit

$$\rho = R\frac{R^2 + r^2 \pm 2Rr\cos\omega}{\mp 2Rr - (R^2 + r^2)\cos\omega}.$$

Il est facile de voir qu'il suffit de prendre les signes supérieurs.

Autre solution par M. DÉPREZ.

L'équation de la courbe est de la forme

$$\rho = a + \frac{b}{1 + e\cos\omega}, \qquad (e > 1)$$

donc elle représente une conchoïde d'hyperbole, le pôle étant placé au foyer de la conique.

## Question 757.

(Voir *Mathesis*, (2), II, p. 56.)

*Discuter les racines de l'équation*

$$x^4 + [2d(d-a) - b]\,x^2 + d^2[(d-a)^2 - b] = 0,$$

*où $d$ est un paramètre variable de $-\infty$ à $+\infty$; $a$ et $b$ sont des nombres positifs constants. Trouver la condition pour que le produit de deux racines soit égal à la somme de deux autres.* (Baccal. Poitiers, 1891).

*Solution par* M. Joachimescu. I. Soient

$$p = 2d(d-a) - b, \quad q = d^2[(d-a)^2 - b].$$

Les valeurs de $d$ pour lesquelles $p$ et $q$ changent de signe sont :

$$p = \frac{a - \sqrt{a^2+2b}}{2}, \quad \frac{a+\sqrt{a^2+2b}}{2};$$

$$q = a - \sqrt{b}, \quad a + \sqrt{b}.$$

Les valeurs de $x^2$ sont imaginaires pour

$$d < -\frac{b}{4a}.$$

On prouve facilement que l'on a toujours

$$-\frac{b}{4a} < a - \sqrt{b}, \quad \frac{a+\sqrt{a^2+2b}}{2} < a + \sqrt{b},$$

car ces inégalités se ramènent à

$$(2a - \sqrt{b})^2 > 0, \quad 2a\sqrt{b} + b > 0.$$

La relation

$$\frac{a - \sqrt{a^2+2b}}{2} \lessgtr -\frac{b}{4a}$$

se ramène successivement à

$$2a^2 + b \lessgtr 2a\sqrt{a^2+2b}, \quad 4a^4 + 4a^2b + b^2 \lessgtr 4a^4 + 8a^2b, \quad b \lessgtr 4a^2.$$

Lorsque $a > \sqrt{b}$, on a

$$\frac{a - \sqrt{a^2+2b}}{2} < a - \sqrt{b}, \tag{1}$$

car le premier membre de cette inégalité est négatif et le second positif. Lorsque $a < \sqrt{b}$, l'inégalité (1) se transforme successivement ainsi :

$$2\sqrt{b} - a < \sqrt{a^2 + 2b}, \quad 4b - 4a\sqrt{b} + a^2 < a^2 + 2b, \quad b < 4a^2.$$

On déduit de là

$$\frac{a - \sqrt{a^2 + 2b^2}}{2} \lesseqgtr a - \sqrt{b}, \quad \frac{a - \sqrt{a^2 + 2b}}{2} \lesseqgtr -\frac{b}{4a}$$

suivant que $b$ est inférieur ou supérieur à $4a^2$.

Si l'on a $b < 4a^2$,

$$\frac{a - \sqrt{a^2 + 2b}}{2} < -\frac{b}{4a} < a - \sqrt{b} < \frac{a + \sqrt{a^2 + 2b}}{2} < a + \sqrt{b},$$

et l'on a le tableau suivant :

1° $-d < -\frac{b}{4a}$. $x$ a quatre valeurs imaginaires.

2° $-\frac{b}{4a} < d < a - \sqrt{b}$. $p < 0$, $q > 0$, $x$ a quatre valeurs réelles.

3° $a - \sqrt{b} < d < a + \sqrt{b}$. $p \lesseqgtr 0$, $q < 0$, $x$ a deux valeurs réelles et deux valeurs imaginaires.

4° $d > a + \sqrt{b}$. $p > 0$, $q > 0$, les quatre racines sont imaginaires.

Supposons $b > 4a^2$ ; alors

$$-\frac{b}{4a} < a - \sqrt{b} < \frac{a - \sqrt{a^2 + 2b}}{2} < \frac{a + \sqrt{a^2 + 2b}}{2} < a + \sqrt{b},$$

et l'on a la discussion suivante :

1° $d < a - \sqrt{b}$. $p > 0$, $q > 0$, les quatre racines sont imaginaires.

2° $a - \sqrt{b} < d < a + \sqrt{b}$. $p \gtreqless 0$, $q < 0$, deux valeurs de $x$ sont réelles, les deux autres imaginaires.

3° $d > a + \sqrt{b}$. $p > 0$, $q > 0$, $x$ a quatre valeurs imaginaires.

II. Soient $-x_1$, $+x_1$, $-x_2$, $+x_2$ les quatre valeurs de $x$.

Si l'on exprime que le produit de deux racines est égal à la somme des deux autres, les différentes combinaisons donnent :

$$x_1^2 = 0, \; x_2^2 = 0, \; x_1 x_2 = \pm (x_1 + x_2), \; x_1 x_2 = \pm (x_1 - x_2).$$

Les deux premières exigent que

$$(d - a)^2 = b, \text{ ou } d = a \pm \sqrt{b};$$

les autres donnent

$$x_1^2 x_2^2 = x_1^2 + x_2^2 \pm 2 x_1 x_2 \text{ ou } q = -p \pm 2\sqrt{q}.$$

## Question 762.

(Voir *Mathesis*, (2) II, p. 104.)

*Soit* ABCD *un parallélogramme articulé. Le sommet* A *est fixe et les côtés* AB, AD *tournent autour de* A *d'angles égaux en sens contraires. Démontrer que le point* C *décrit une ellipse* (MANNHEIM.)

*Solution analytique par* MM. EMMERICH, MANDART, ABSOLONNE, QUINT, MOREL, DE BOZOKY, DENYS, LEMOINE, LISTRAY, DROZ, DÉPREZ *et* BELLENS. Prenons pour axes la bissectrice de l'angle BAD et la perpendiculaire menée en A. Les coordonnées des points B, D sont

$$(a\cos\varphi,\ a\sin\varphi),\quad (b\cos\varphi,\ -b\sin\varphi),$$

$a$, $b$ désignant les longueurs AB, AD, et $\varphi$ l'angle variable BA$x$. Les coordonnées de C, égales à la somme des abscisses et à celle des ordonnées de B et D, sont

$$x=(a+b)\cos\varphi,\quad y=(a-b)\sin\varphi;$$

d'où l'on déduit l'équation du lieu parcouru par D :

$$\frac{x^2}{(a+b)^2}+\frac{y^2}{(a-b)^2}=1.$$

*Solution géométrique par* MM. LEMOINE, DÉPREZ *et* LISTRAY. Soient K et H les points de rencontre de BC avec la bissectrice A$x$ de l'angle BAD et avec la perpendiculaire A$y$. Les triangles BAK, BAH étant isoscèles, on a AB = BK = BH. Donc la longueur HK est constante, et C est un point fixe de la droite HK qui se meut entre deux axes fixes ; le lieu de C est donc une ellipse.

*Solution géométrique par* M. FRAIPONT (Liège). Soient A$x$ la bissectrice de l'angle BAC, et E, F les points de rencontre des droites AB, AD avec la perpendiculaire abaissée de C sur A$x$. On a BE = BC, DF = DC, EC : CF = BE : DC. Le point E décrit donc une circonférence, et le point C divise l'ordonnée de C relative à A$x$ dans un rapport constant, etc.

REMARQUES (dues à M. DÉPREZ). 1° La tangente menée en C à l'ellipse est perpendiculaire à la diagonale BD ; c'est ce qu'on démontre par un calcul facile.

2° La diagonale BD enveloppe la développée de l'ellipse décrite par le centre du parallélogramme articulé.

3° Les côtés BC, CD enveloppent des hypocycloïdes à quatre rebroussements. Car les longueurs interceptées sur ces droites par l'angle $xAy$ sont constantes.

4° Lorsque AB, AD tournent autour de A en sens contraires et d'angles dont l'un est double de l'autre, le point C décrit une quartique, dont l'équation s'obtient en éliminant $\varphi$ entre les équations

$$y = a\sin\varphi + b\sin 2\varphi\,, \quad x = a\cos\varphi - b\cos 2\varphi\,.$$

M. Vladimirescu a donné une bonne solution par les équipollences.

---

## Question 766.

(Voir *Mathesis*, (2), II, p. 104.)

*Sur les côtés* $Ax$, $Ay$ *d'un angle donné, on prend deux segments variables* AB, AC *satisfaisant à la condition* $AB + AC = 2p$. *Démontrer que la droite* BC *enveloppe une parabole de paramètre* $2p\sin\frac{1}{2}A\,\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}A$; *le point de contact de* BC *est l'isotomique du pied de la bissectrice de l'angle* BAC.

(Sollertinsky).

*Solution analytique par* MM. Quint, Denys, Polak (*Bruxelles*), Mandart *et* Gillet. Les axes étant $Ax$, $Ay$, l'équation de BC est

$$\frac{x}{c} + \frac{y}{2p-c} - 1 = 0, \tag{1}$$

$c$ étant un paramètre variable. La dérivée par rapport à $c$ donne

$$-\frac{x}{c^2} + \frac{y}{(2p-c)^2} = 0, \quad \text{ou} \quad \frac{\sqrt{x}}{c} = \frac{\pm\sqrt{y}}{2p-c} = \frac{\sqrt{x} \pm \sqrt{y}}{2p}. \tag{2}$$

Si on tire de là $c$ et $2p - c$ pour en substituer les valeurs dans l'équation (1), on trouve

$$\sqrt{x} \pm \sqrt{y} = \pm\sqrt{2p}, \quad \text{ou} \quad x^2 - 4xy + y^2 - 4p(x+y) + 4p^2 = 0.$$

Telle est l'équation de l'enveloppe; elle représente une parabole. Le changement de $x$ en $y$ et $y$ en $x$ la laisse inaltérée; donc la bissectrice $Ax'$ de l'angle $yAx$ est l'axe de la parabole. Prenant pour axes $Ax'$ et la perpendiculaire en A, on a les formules de transformation

$$x = \frac{x'\sin\frac{1}{2}A - y'\cos\frac{1}{2}A}{\sin A}, \quad y = \frac{x'\sin\frac{1}{2}A + y'\cos\frac{1}{2}A}{\sin A};$$

l'équation de la courbe sera maintenant

$$y'^2 = 4p\frac{\sin^2\frac{1}{2}A}{\cos\frac{1}{2}A}(x' - p\cos\alpha).$$

On en conclut que le paramètre est $4p\sin\frac{1}{2}A\,tg\frac{1}{2}A$, et que le sommet a pour abscisse $p\cos\alpha$.

Soit D le point de contact de BC avec son enveloppe; les coordonnées de ce point vérifient l'équation (2), d'où

$$\frac{y}{x} = \frac{(2p-c)^2}{c^2} = \frac{\overline{AC}^2}{\overline{AB}^2}.$$

Mais le rapport des coordonnées de D est égal à celui des perpendiculaires abaissées de ce point sur $Ax$ et $Ay$, ou égal à $DB\sin B : DC\sin C$; par suite,

$$\frac{DB\sin B}{DC\sin C} = \frac{\overline{AC}^2}{\overline{AB}^2}, \quad \text{ou} \quad \frac{DB}{DC} = \frac{AC}{AB},$$

ce qui démontre que D est l'isotomique du pied de la bissectrice de l'angle BAC.

*Solution géométrique par* MM. Droz, Mandart *et* Quint (partielle). Les points B, C marquent sur $Ax$, $Ay$ des ponctuelles égales; donc la droite BC enveloppe une parabole touchant $Ax$, $Ay$ aux points qui correspondent au point A considéré dans l'autre ponctuelle. Si nous prenons sur $Ax$, $Ay$ les longueurs $AB' = AC' = 2p$, B' et C' sont les points de contact de $Ax$, $Ay$. On voit facilement que la droite joignant A au milieu M de B'C' est l'axe de la parabole. Le paramètre est égal à

$$\frac{\overline{C'M}^2}{\frac{1}{2}AM} = \frac{\overline{AC'}^2\sin^2\frac{1}{2}A}{\frac{1}{2}AC'\cos\frac{1}{2}A} = 4p\sin\tfrac{1}{2}A\,tg\tfrac{1}{2}A.$$

Soient BC, $B_1C_1$ deux positions infiniment voisines de la droite mobile, D leur point de concours. Le triangle ABC coupé par le transversale $B_1C_1$ donne

$$\frac{DB}{DC}\cdot\frac{B_1A}{B_1B}\cdot\frac{C_1C}{C_1A} = 1,$$

d'où, à cause de $BB_1 = C_1C$ et en passant à la limite,

$$\frac{DB}{DC} = \frac{CA}{BA}.$$

Le point de contact de BC avec son enveloppe est donc l'isotomique du pied de la bissectrice.

*Solution géométrique et remarques par* M. Déprez. Soit F le point de rencontre de la circonférence ABC avec la bissectrice de l'angle BAC. Si l'on mène FB′, FC′ perpendiculaires à A$x$, A$y$, les triangles FBB′, FCC′ sont égaux; par conséquent $BB' = CC'$, $AB' + AC' = AB + AC = 2p$. Ainsi, le point F est fixe; l'angle BFC étant constant et supplémentaire de l'angle BAC, la droite BC enveloppe une parabole ayant pour foyer F, pour tangente au sommet B′C′; le quart du paramètre est égal à la distance de F à B′C′ ou égal à $p \sin \frac{1}{2} A \operatorname{tg} \frac{1}{2} A$.

Soient I le point de rencontre de AF avec BC, D le point de contact de BC, C″ celui de AC; on sait que FC = FB, FD = FI. De plus, les angles IFB, CFD sont égaux; car l'angle $DFC = \frac{1}{2} DFC'' = ACI = AFB$, les points A, B, F, C étant concycliques. On en conclut BI = DC.

Le milieu du côté BC décrit la tangente au sommet de la parabole; le centre de gravité du triangle ABC parcourt donc une perpendiculaire à AF; l'orthocentre de ABC se meut sur la directrice de la parabole; le centre du cercle circonscrit au triangle ABC a pour lieu géométrique la perpendiculaire au milieu de AF. Le centre du cercle des neuf points a aussi pour lieu une perpendiculaire à AF; il est fixe quand l'angle CAB = 60°, car la figure AHFO est alors un losange. La droite d'Euler du triangle ABC passe par un point fixe de AF; en effet, AH et OF étant parallèles, OH divise AF dans le rapport $AH : OF = 2 \cos A$. Le point de Lemoine de ABC décrit une cubique, le pôle de BC par rapport à la circonférence ABC parcourt une droite et les pôles de CA, BA par rapport à ce cercle se meuvent sur des hyperboles. Les points de Brocard ont pour lieu géométrique des quintiques. Le cercle des neuf points a pour enveloppe une ellipse, etc.

M. de Bőzóky a donné une bonne solution analytique en prenant directement pour axes la bissectrice de l'angle BAC et la perpendiculaire en A.

---

## ×Question 772.

(Voir *Mathesis*, (2), II, p. 152.)

***Étant donnés sur une circonférence*** O ***deux points*** A ***et*** B, ***mener une tangente telle, que le produit de ses distances aux points*** A ***et*** B ***soit égal à un carré donné*** $K^2$. ***Discussion.*** (Miller.)

*Solution par* MM. Sollertinsky, Droz, Bellens, Denys, Emmerich, Delahaye *et* Déprez. Les parallèles à AB, menées à la distance K, rencontreront la circonférence O aux points de contact cherchés.

En effet, C étant l'un de ces points, D l'intersection de AB avec la tangente en C, on a $DA.DB = \overline{DC}^2$; mais, A', B', C' étant les projections de A, B sur CD et de C sur AB, les triangles semblables DAA', DBB', DCC' donneront

$$\frac{DA}{AA'} = \frac{DB}{BB'} = \frac{DC}{CC'}.$$

Donc

$$AA'.BB' = \overline{CC'}^2 = K^2.$$

La discussion ne présente pas de difficultés.

M. Déprez a résolu la question analogue pour deux points A, B d'un petit cercle tracé sur une sphère, et aussi pour le cas où A et B ne sont pas sur le cercle donné.

---

## *QUESTION D'EXAMEN.

**533.** Les arêtes latérales SA, SB, SC d'une pyramide triangulaire sont représentées par $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, et les arêtes de la base ABC par $a$, $b$, $c$. 1° Exprimer qu'il existe un cône droit tangent aux faces latérales et dont la base est tangente aux côtés de la base de la pyramide. Calculer l'angle $2\varphi$ au sommet du cône. 2° On donne $a$, $b$, $c$, $\varphi$; calculer le rayon $\rho$ d'une sphère tangente au cône et aux faces de la pyramide qui passent par le sommet C. (*Agrégation de l'enseignement spécial*, 1890.)

1° Les conditions cherchées sont

$$\beta^2 - \gamma^2 = (p-b)^2 - (p-c)^2, \quad \gamma^2 - \alpha^2 = (p-c)^2 - (p-a)^2$$

et l'on a

$$\sin\varphi = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p(\gamma+p-c)(\gamma-p+c)}}.$$

2° Deux solutions sont

$$\rho = r\,\mathrm{tg}(45^\circ \mp \tfrac{1}{2}\varphi);$$

les quatre autres sont

$$\rho = r\,\mathrm{tg}(45^\circ - \tfrac{1}{2}\varphi \mp \omega), \quad \text{où} \quad \mathrm{tg}\,\omega = \sin\tfrac{1}{2}C\,\mathrm{tg}(45^\circ \mp \tfrac{1}{2}\varphi).$$

---

## QUESTIONS PROPOSÉES.

×**788.** Soient A, B, C, D, quatre points d'une circonférence. Les perpendiculaires élevées en A et B sur la corde AB, et les perpendiculaires élevées en C et D sur la corde CD forment un parallélogramme.

La même construction étant appliquée aux cordes AC et BD, ou aux cordes AD et BC, donne deux autres parallélogrammes.

Démontrer que ces trois parallélogrammes ont pour centre commun le centre du cercle ABCD et que leurs diagonales sont perpendiculaires aux côtés du triangle qui a pour sommets les points de concours des couples de cordes AB et CD, AC et BD, AD et BC. (A. C.)

×**789.** Soient (L, M, N), ($L_1$, $M_1$, $N_1$), ($L_2$, $M_2$, $N_2$), ($L_3$, $M_3$, $N_3$) les points de contact des côtés BC, CA, AB du triangle ABC avec le cercle inscrit I et avec les cercles exinscrits $I_a$, $I_b$, $I_c$. Exprimer, en fonction des éléments du triangle ABC, les côtés et l'aire du triangle formé par les droites $M_1N_1$, $N_2L_2$, $L_3M_3$ ou par les droites $N_2M_3$, $M_3L_1$, $L_1M_2$, suffisamment prolongées. (J. Neuberg.)

**790.** Théorème. *$x$ étant en nombre inférieur à l'unité, et* P, Q *désignant les produits indéfinis :*

$$(1-x)(1-x^3)(1-x^5)(1-x^7)\cdots,\ (1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)\cdots;$$

1° *Le produit* PQ *égale* 1 ; 2° *Le produit indéfini* P, *dont tous les facteurs sont moindres que* 1, *a une limite positive;* 3° *Le produit* Q, *dont tous les facteurs surpassant l'unité, a une limite*(*).

**791.** On donne un quadrilatère ABCD. Par A, B on fait passer une circonférence quelconque O; par C, D une circonférence I coupant orthogonalement la précédente. Trouver : 1° l'enveloppe de la ligne des centres des deux cercles; 2° celle de leur axe radical; 3° le lieu de l'intersection des deux circonférences ; 4° le lieu du pied de l'axe radical; 5° le lieu du point de rencontre des tangentes menées en A et C respectivement aux deux cercles O et I. (Déprez.)

**792.** Quelles sont les courbes dont le cercle de courbure passe par un point fixe. (Mandart.)

---

(*) Avec la théorie des *fonctions elliptiques*, les propositions sont évidentes (et connues). Peut-on les démontrer par les éléments d'Arithmétique ou d'Algèbre ?

## SUR L'HYPERBOLE DE KIEPERT(*).

1. Soient : A′, B′, C′ les milieux des côtés du triangle ABC ; H, O, I, K, G, l'orthocentre, le centre du cercle circonscrit, le centre du cercle inscrit, le point de Lemoine et le centre de gravité.

Construisons sur BC, CA, AB trois triangles isoscèles semblables $BCP_a$, $CAP_b$, $ABP_c$, tous trois tournés vers l'intérieur ou vers l'extérieur du triangle ABC; l'angle à la base sera désigné par $\theta$ et considéré comme positif dans le premier cas, comme négatif dans le second.

Les points $P_a$, $P_b$, $P_c$ marquent sur les droites OA′, OB′, OC′ trois ponctuelles semblables; donc les droites $AP_a$, $BP_b$ se correspondent dans deux faisceaux projectifs et leur point d'intersection P décrit une conique passant par les centres A, B des deux faisceaux, le centre de gravité G ($\theta = 0$), l'orthocentre H ($\theta = 90°$) et le sommet C ($\theta = C$). Cette courbe est donc l'hyperbole équilatère circonscrite au triangle ABC et passant par G; on l'appelle *hyperbole de Kiepert*. Le point d'intersection de $AP_a$, $CP_c$ engendre, évidemment, la même courbe ; par suite, les droites $AP_a$, $BP_b$, $CP_c$ concourent en un même point P.

Les distances de P à AB, AC sont proportionnelles à celles de $P_a$ aux mêmes droites ou proportionnelles à $\sin(B - \theta)$, $\sin(C - \theta)$; on en conclut que les coordonnées normales de P sont

$$\frac{1}{\sin(A-\theta)}, \quad \frac{1}{\sin(B-\theta)}, \quad \frac{1}{\sin(C-\theta)}.$$

2. Lorsqu'un point M décrit une droite $d$, les droites AM, BM, CM se correspondent dans trois faisceaux perspectifs, et leurs isogonales, c'est-à-dire les symétriques de AM, BM, CM par rapport à AI, BI, CI, engendrent trois faisceaux projectifs; on en conclut que l'inverse de M décrit une conique $\delta$ passant par A, B, C. Si $d$ rencontre la circon-

---

(*) Cette note ne renferme rien de nouveau. Elle réunit les principales propriétés de l'hyperbole de Kiepert, celles qui ont déjà paru dans *Mathesis*, t. VII, p. 208, et celles qui ont été publiées dans d'autres recueils. Son principal but est de servir d'introduction à une note analogue sur l'hyperbole de Feuerbach, note due à M. Mandart.

Nous nous servons de préférence des méthodes synthétiques. (J. N.).

férence ABC en deux points réels $m$, $m'$, $\delta$ est une hyperbole dont les asymptotes sont parallèles aux isogonales des droites Am, Am'. L'hyperbole devient équilatère quand $d$ passe par O; les asymptotes sont alors les droites de Simson des points $m$, $m'$. Les paraboles circonscrites à ABC sont les transformées par points inverses des tangentes au cercle ABC; les diamètres sont respectivement parallèles aux isogonales des droites joignant A, B, C au point de contact de la tangente au cercle ABC.

On voit facilement que l'hyperbole de Kiepert est la transformée, par points inverses, de la droite OK; car les inverses des points O, K sont H, G.

3. Considérons deux *triangles de Kiepert*, $P_aP_bP_c$ et $Q_aQ_bQ_c$, tels, que les angles $P_aBC$, $Q_aBC$ sont complémentaires (et de même sens); je dis que $AQ_a$ est perpendiculaire à $P_bP_c$. En effet, les deux lignes brisées $P_bB'C'P_c$, $AB'A'Q_a$ ont leurs côtés $P_bB'$ et $AB'$, $B'C'$ et $A'Q_a$, $C'P_c$ et $B'A'$ perpendiculaires et proportionnels; on en conclut que les résultantes $P_bP_c$ et $AQ_a$ sont perpendiculaires et que leur rapport est égal à $tg\ P_bAC$. De même, les droites $BQ_b$, $CQ_c$ sont perpendiculaires à $P_cP_a$, $P_aP_b$. Donc, *les perpendiculaires abaissées de* A, B, C *sur les côtés correspondants d'un triangle* $P_aP_bP_c$ *de Kiepert concourent en un même point* Q *de l'hyperbole de Kiepert.*

Les points $P_a$, $Q_a$ étant des éléments conjugués d'une involution, les rayons $AP_a$, $AQ_a$ se correspondent également dans une involution, et il en est de même des points P, Q, intersections des droites $AP_a$ et $BP_b$, $AQ_a$ et $BQ_b$; il s'en suit que la droite PQ passe par un point fixe. On verra que ce point est le centre O du cercle ABC.

4. Les développements du paragraphe précédent comportent plusieurs cas particuliers remarquables.

*a*) Prenons pour $P_a$, $P_b$, $P_c$ les centres des carrés construits, tous trois extérieurement ou tous trois intérieurement, sur BC, CA, AB; ce sont les points doubles de l'involution $(P_aQ_a)$. On a d'abord ce théorème assez curieux (*);

*Si* $P_a$, $P_b$, $P_c$ *sont les centres des carrés construits intérieurement ou extérieurement sur les côtés d'un triangle* ABC, *les droites* $AP_a$, $BP_b$, $CP_c$

(*) Nous l'avons énoncé dans la N. C. M., t. IV, p. 142. M. Collignon l'a retrouvé de son côté; voir *Ass. fr. pour l'av. des sciences*, Congrès de Marseille, 1891.

*sont égales et perpendiculaires aux côtés du triangle* $P_aP_bP_c$ *et concourent en un même point* T *ou* T′ *de l'hyperbole de Kiepert.*

*Les coordonnées normales des points* T, T′ *sont :*

$$\frac{1}{\sin A \pm \cos A}, \quad \frac{1}{\sin B \pm \cos B}, \quad \frac{1}{\sin C \pm \cos C}.$$

*b*) Faisons coïncider $P_a$, $P_b$, $P_c$ avec les sommets des triangles équilatéraux construits extérieurement ou intérieurement sur les côtés du triangle ABC ; les points $Q_a$, $Q_b$, $Q_c$ se confondront avec les centres de ces mêmes triangles. Or, les droites $AP_a$, $BP_b$, $CP_c$ concourent en un *centre isogone* Z ou Z′ de ABC (point d'où l'on voit les côtés de ABC sous des angles de 120° ou de 60°) ; il en résulte que le triangle $Q_aQ_bQ_c$ est maintenant équilatéral.

*c*) Si les points $P_a$, $P_b$, $P_c$ sont en A′, B′, C′, les points $Q_a$, $Q_b$, $Q_c$ passent à l'infini sur OA′, OB′, OC′ ; donc les points H, G forment un couple de l'involution (PQ).

*d*) Enfin, les points $P_a$, $P_b$, $P_c$ peuvent coïncider avec les sommets $A_1$, $A_2$, $A_3$ du premier triangle de Brocard ($\theta = \omega$) ; les points $Q_a$, $Q_b$, $Q_c$ sont alors les centres $N_a$, $N_b$, $N_c$ des cercles, lieux des sommets équibrocardiens avec ABC et ayant pour bases BC, CA ou AB. Donc les droites $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$ concourent en un point D de l'hyperbole équilatère ABCG, et sont perpendiculaires aux côtés du triangle $N_aN_bN_c$ ; les droites $AN_a$, $BN_b$, $CN_c$ concourent en un point N (point de Tarry) de la même courbe et sont perpendiculaires aux côtés du triangle $A_1B_1C_1$.

5. Soit $P_aP_bP_c$ un triangle quelconque ayant ses sommets sur OA′, OB′, OC′, et soit Q le point de concours des perpendiculaires abaissées de A, B respectivement sur $P_bP_c$, $P_cP_a$. Les perpendiculaires élevées aux milieux des droites QA, QB, QC forment un nouveau triangle $p_ap_bp_c$, dont les sommets sont évidemment les centres des cercles circonscrits aux triangles QBC, QCA, QAB ; donc ces sommets sont situés sur OA′, OB′, OC′. Comme les triangles $P_aP_bP_c$, $p_ap_bp_c$ ont pour centre d'homologie O et deux couples de côtés correspondants parallèles, les troisièmes côtés $P_aP_b$, $p_ap_b$ sont également parallèles ; par suite, $P_aP_b$ est perpendiculaire à QC. En imprimant ensuite à la figure $OP_aP_bP_c$ une translation parallèle dans son plan, on trouve la propriété fondamentale des triangles orthologiques, savoir : si deux triangles ABC, $P_aP_bP_c$ sont tels, que les perpendiculaires abaissées des sommets du second sur

les côtés correspondants sont concourantes, les perpendiculaires abaissées des sommets du premier triangle sur les côtés correspondants du second se coupent également en un même point.

Considérons maintenant deux triangles quelconques $P_aP_bP_c$, $Q_aQ_bQ_c$ ayant leurs sommets sur les trois droites OA′, OB′, OC′, et soient respectivement Q, P les points de concours des perpendiculaires abaissées de A, B, C sur les côtés homologues des deux triangles. Désignons par $p_ap_bp_c$, $q_aq_bq_c$ les deux triangles formés respectivement par les perpendiculaires élevées aux milieux des droites QA, QB, QC et PA, PB, PC. Si $r_a$, $r_b$, $r_c$ sont les intersections des côtés correspondants des triangles homologiques $p_ap_bp_c$ et $q_aq_bq_c$, $r_a$ est le centre du cercle circonscrit au triangle APQ; car c'est le point de rencontre des médiatrices de AP, AQ; de même $r_b$, $r_c$ sont les centres des cercles BPQ, CPQ. Or on conclut que l'axe d'homologie $r_ar_br_c$ des triangles $p_ap_bp_c$, $q_aq_bq_c$ est perpendiculaire à la droite PQ. Mais cet axe est parallèle à celui des triangles $P_aP_bP_c$, $Q_aQ_bQ_c$(*); par suite, l'axe d'homologie de $P_aP_bP_c$, $Q_aQ_bQ_c$ est perpendiculaire à la droite PQ (Steiner).

Supposons maintenant que $P_aP_bP_c$, $Q_aQ_bQ_c$ soient deux triangles de Kiepert dont les angles à la base sont complémentaires, et désignons par $\beta$, $\gamma$ les points de rencontre de BC avec OB′, OC′. En calculant en fonction de $b$, $c$, B, C, $\theta$ les segments B′O, $\beta$O, ..., C′O, $\gamma$O, ..., on démontre facilement que les deux quaternes $\beta OP_bQ_b$, $\gamma OP_cQ_c$ ont même rapport anharmonique. Par suite, à cause de l'élément uni O, les droites $\beta\gamma$, $P_bP_c$, $Q_bQ_c$ concourent en un même point : donc les *trois triangles* ABC, $P_aP_bP_c$, $Q_aQ_bQ_c$ *ont, deux à deux, un même axe d'homologie.*

Les faisceaux projectifs (B, $\beta OP_bQ_b$), (C, $\gamma OP_cQ_c$) ont un rayon uni B$\beta\gamma$C; donc les points d'intersection O, P, Q, des autres couples de rayons homologues sont en ligne droite. Ainsi, *la droite* PQ *passe constamment par le point* O *et est perpendiculaire à l'axe d'homologie des triangles* ABC, $P_aP_bP_c$, $Q_aQ_bQ_c$(**). Si l'on applique cette proposition

(*) On peut considérer la figure formée par OA′, OB′, OC′ et les quatre triangles $p_ap_bp_c$, $P_aP_bP_c$, $q_aq_bq_c$, $Q_aQ_bQ_c$ comme la projection orthogonale d'un trièdre coupé par deux paires de plans parallèles. — Il suffit également de quelques proportions pour démontrer que l'axe d'homologie des triangles $P_aP_bP_c$, $Q_aQ_bQ_c$ est parallèle à celui des triangles $P_aP_bP_c$, $q_aq_bq_c$, puis à celui des triangles $p_ap_bp_c$, $q_aq_bq_c$.

(**) Nous avions déjà vu au § 3 que PQ passe par un point fixe, mais sans préciser la position de ce point.

aux cas particuliers considérés ci-dessus, on trouve plusieurs propriétés assez curieuses ; par exemple, les points D, N sont en ligne droite avec O et cette droite est perpendiculaire à l'axe d'homologie des triangles ABC, $A_1B_1C_1$ (*) ; les tangentes aux points T, T′ de l'hyperbole de Kiepert se coupent en O.

6. Les côtés des triangles de Kiepert enveloppent respectivement trois paraboles $\pi_a$, $\pi_b$, $\pi_c$. En effet, la droite $P_bP_c$, par exemple, détermine sur OB′, OC′ deux ponctuelles semblables ; donc elle touche constamment une parabole $\pi_a$, qui a pour tangentes OB′, OC′, B′C′, la bissectrice intérieure et la bissectrice extérieure de l'angle BAC (ces droites correspondent à $\theta = \frac{1}{2}A$ ou $90^\circ - \frac{1}{2}A$.)

La directrice de $\pi_a$ passe par A, intersection de deux tangentes rectangulaires. Pour trouver la direction des diamètres, observons que les points de contact de OB′, OC′ sont les homologues de O considéré dans les deux ponctuelles semblables $(P_c)$, $(P_b)$ ; ces points sont situés sur la hauteur AH, l'isogonale de AO. Le triangle formé par AH, O′B, O′C ayant ses côtés perpendiculaires à ceux de ABC, la médiane issue de O, qui est un diamètre de $\pi_a$, est perpendiculaire à la médiane AA′ de ABC ; donc AG est la directrice de $\pi_a$. Le foyer de $\pi_a$ est le sommet $A_2$ du second triangle de Brocard ; car il est à l'intersection du cercle OB′AC′ circonscrit au triangle de trois tangentes, avec la symédiane AK, qui est symétrique de la directrice AA′ par rapport à la tangente AG ; ce point appartient aussi au cercle circonscrit au triangle $OB_1C_1$ de trois tangentes, c'est-à-dire au cercle de Brocard de ABC (**).

7. Les trois paraboles $\pi_a$, $\pi_b$, $\pi_c$ ont deux tangentes communes, passant par G et parallèles aux asymptotes de l'hyperbole de Kiepert.

En effet, ces tangentes correspondent à un *triangle aplati* $P_aP_bP_c$ ; les perpendiculaires abaissées de ABC sur les côtés de ce triangle sont parallèles et comme elles doivent concourir en un même point de

---

(*) Cette propriété, signalée par M. Brocard, n'avait pas encore été démontrée synthétiquement.

(**) Plus simplement, la directrice passe par A, intersection de deux tangentes rectangulaires et par A′, orthocentre du triangle circonscrit OB′C′.

l'hyperbole, elles sont parallèles à une asymptote. Les deux tangentes(*) communes étant rectangulaires passent par le point G, intersection des trois directrices. (J. Neuberg.)

---

## SOLUTION DE LA QUESTION DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE posée au Concours général de Belgique en 1892,

par un Abonné.

***Trouver en coordonnées polaires l'équation du lieu des centres des cercles circonscrits à des triangles ayant même périmètre et un angle commun. Construire la courbe.***

Si l'on désigne par $2\alpha$(**) l'angle formé par les côtés $x\mathrm{A}x'$, $y\mathrm{A}y'$ de l'angle donné, par $\rho$ le rayon vecteur AM joignant le pôle A au centre M de l'un des cercles circonscrits au triangle ABC et par $\omega$ l'angle que ce rayon $\rho$ fait avec l'axe polaire que nous supposons dirigé suivant la bissectrice de l'angle $2\alpha$, l'équation du lieu du point M est le résultat de l'élimination de $a, b, c$ entre les quatre équations

$$(1) \qquad a + b + c = 2p,$$

$$(2) \qquad \begin{cases} \dfrac{c}{2} = \rho \cos(\rho, \mathrm{AB}) = \rho \cos(\alpha + \omega), \\ \dfrac{b}{2} = \rho \cos(\rho, \mathrm{AC}) = \rho \cos(\alpha - \omega), \\ \dfrac{a}{2} = \rho \cos(\mathrm{MB}, \mathrm{BC}) = \rho \sin 2\alpha, \end{cases}$$

$a, b, c$ désignant les côtés du triangle et $2p$, le périmètre donné.

Cette élimination se fait sans difficulté et l'on trouve pour l'équation du lieu du centre M

$$\rho = \frac{p}{\cos(\alpha + \omega) + \cos(\alpha - \omega) + \sin 2\alpha}.$$

---

(*) Ces droites sont les axes de l'ellipse circonscrite à ABC et ayant son centre en G. Pour une étude plus complète de ces axes, nous renvoyons à un mémoire que nous avons publié en collaboration avec M. Gob dans l'Annuaire de l'*Ass. fr. pour l'av. des sciences, Congrès de Paris*, 1889.

(**) Sur la figure, il y a $d$ au lieu de $\alpha$.

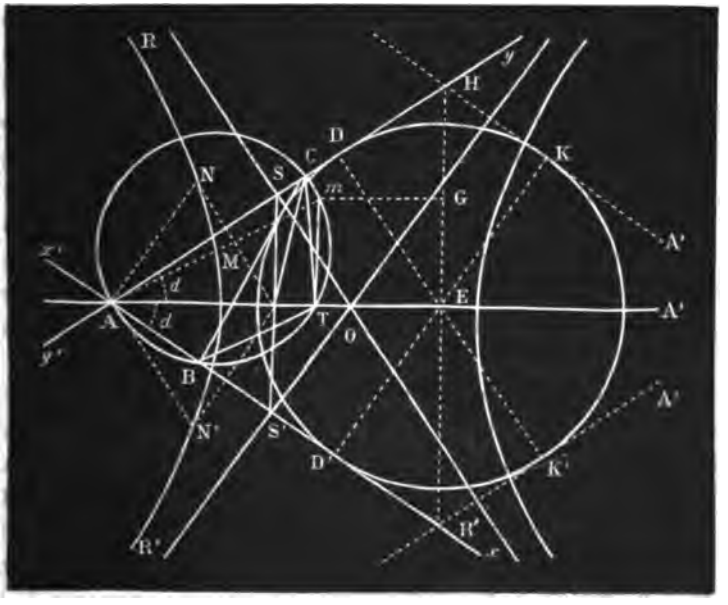
Cette équation s'écrit plus simplement en posant

$$\frac{p}{\sin 2\alpha} = p' \quad \text{et} \quad \frac{1}{\sin \alpha} = e;$$

elle prend alors la forme ordinaire des équations des sections coniques, savoir :

$$\rho = \frac{p'}{1 + e \cos \omega}. \tag{3}$$

La quantité désignée par $e$ étant nécessairement plus grande que l'unité, cette équation représente une hyperbole dont le foyer est au sommet A de l'angle commun et dont l'axe focal est l'axe polaire.




On peut naturellement se proposer la question suivante : Que signifie la seconde branche de l'hyperbole? Pourquoi la courbe s'étend-elle à l'infini? car le lieu tel qu'il est défini est nécessairement limité.

Pour répondre à ces questions, observons que les équations primitives (1) et (2) sont plus générales que ne semble l'indiquer l'énoncé de la question; les cosinus qui figurent dans ces équations peuvent être

successivement négatifs. Ainsi quand le côté mobile BC se trouve dans l'angle $yAx'$, la première des équations (2) devient

$$\frac{c}{2} = \rho \cos [180^\circ - (\alpha + \omega)] = - \rho \cos (\alpha + \omega),$$

et, partant, si $a + b - c$ reste constant et égal à $2p$, le lieu ne changera pas. Le côté $c$ est alors considéré comme négatif. De même, lorsque le côté mobile BC se trouvera dans l'angle $xAy'$, c'est le côté $b$ qui sera négatif. Mais comment $a$ devient-il négatif?

Remarquons que l'enveloppe du côté BC est un cercle : c'est le cercle ex-inscrit au triangle ABC et tangent au côté BC. L'énoncé de la question pourrait être modifié dans ce sens. Soient D le point de contact de ce cercle avec le côté $Ay$ de l'angle et D' le point de contact situé sur $Ax$; menons parallèlement aux droites $xx'$, $yy'$ des tangentes à ce cercle et nommons H le point de rencontre de l'une de ces parallèles avec $Ay$ et H' le point de rencontre de la seconde avec $Ax$. Ces parallèles et les côtés de l'angle forment un losange AHA'H' circonscrit au cercle enveloppe et le touchant aux points D, D' et K, K'. Ces points partagent le cercle en quatre arcs ayant chacun une signification différente :

Lorsque le côté mobile BC est tangent à l'arc DD', c'est la somme arithmétique $a + b + c$ qui est constante et le centre du cercle circonscrit décrit l'arc d'hyperbole NMN', le point N étant le centre du cercle circonscrit lorsque BC coïncide avec AD; ce cercle est tangent au côté $Ax$ et passe par D.

Lorsque le côté mobile BC est tangent à l'arc DK, on a $a + b - c = 2p$ et le centre du cercle décrit l'arc NR, le point R étant le point de la courbe situé à l'infini; il correspond au cas où le côté mobile est parallèle à $x'Ax$. Le triangle a alors deux côtés infinis et un côté fini AH; le centre du cercle circonscrit se trouve à l'infini sur la perpendiculaire élevée sur la droite AH en son milieu S; c'est la *première asymptote*. La seconde asymptote s'obtient d'une manière analogue au moyen de l'arc symétrique D'K'.

Lorsque le côté mobile BC est devenu tangent à l'arc KK', sa direction varie brusquement de 180° et la troisième des équations (2) est alors remplacée par la suivante :

$$\frac{a}{2} = \rho \cos [180^\circ - (90^\circ - 2\alpha)] = - \rho \sin 2\alpha;$$

dans ce cas, on a $b + c - a = 2p$ et *le centre du cercle circonscrit parcourt la seconde branche de l'hyperbole.*

Enfin, lorsque le côté BC est tangent à l'arc D'K', on a $a + c - b = 2p$ et le point M décrit l'arc N'R'.

Remarque. La directrice relative au foyer A s'obtiendrait sans difficulté, car on en connaît un point, savoir : le point S milieu de AH et projection du foyer sur l'asymptote. Le pied de la directrice est donc au milieu de AE, le point E étant le centre du cercle ex-inscrit.

Note. Soient T, $m$ les points où la circonférence ABC rencontre les droites AE, AM. L'angle AT$m$ est droit, et $Am = 2AM$. On démontre facilement que le lieu de $m$ est une hyperbole ayant pour foyer A, pour directrice la droite HH' perpendiculaire en E sur AE.

En effet, la distance de $m$ à la droite HH' = TE = TC = TB, et le rapport $mA : TC = 1 : \sin \alpha$.

Il suit de là que M décrit une hyperbole ayant pour foyer A et pour directrice la perpendiculaire au milieu de AE(*).

Les triangles rencontrés ici ont été considérés déjà dans *Mathesis*, (2), I, pp. 153-157.

---

## SUR LA CONSTRUCTION DES QUADRIQUES QUI ONT UN CONTACT DU DEUXIÈME ORDRE AVEC UNE SURFACE,

par M. S. Mangeot, Docteur ès sciences, professeur au lycée de Troyes (France).

Je considère une surface quelconque, et soient $o$ un point non singulier de la surface, $oz$ la normale, $ox$, $oy$ les tangentes principales en ce point, R, R' les rayons de courbure principaux correspondants, et $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ trois paramètres de longueur. Si l'on prend comme axes de coordonnées les droites $ox$, $oy$, $oz$, l'équation

$$2z\left(\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}-1\right)+\frac{x^2}{R}+\frac{y^2}{R'}+\frac{z^2}{\gamma}\left[1+\frac{R\gamma^2}{(\gamma-R)\alpha^2}+\frac{R'\gamma^2}{(\gamma-R')\beta^2}\right]=0$$

représente une quadrique qui est l'une quelconque de celles ayant un contact d'ordre supérieur à 1 avec la surface, au point 0 : car les tangentes principales de cette quadrique, au point 0, sont confondues avec

(*) Cette démonstration nous a été communiquée par M. Massau.

les droites $ox$, $oy$, et ses sections par les plans $zox$, $zoy$ ont leurs rayons de courbure égaux à R et R′. L'équation dite équation en S relative au premier membre de la relation qui précède a une racine égale à $(1 : \gamma)$. Exprimée en fonction de $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, R, R′, l'équation de chaque plan de symétrie de la quadrique et la formule qui détermine la grandeur de chacun de ses axes ou paramètres principaux, sont algébriques par rapport à toutes les quantités qu'elles renferment et ne peuvent contenir d'autres irrationnelles que des radicaux dont l'indice est 2. Dès lors on saura (en partant de l'équation précédente) construire géométriquement, en grandeur comme en position, au moyen de la règle et du compas, les axes de symétrie d'autant de quadriques que l'on voudra, ayant un contact du second ordre avec une surface quelconque dont on connaît les rayons de courbure principaux relatifs au point de contact ainsi que les tangentes principales en ce point.

---

## SUR LA CONSTRUCTION DE LA MOYENNE PROPORTIONNELLE;

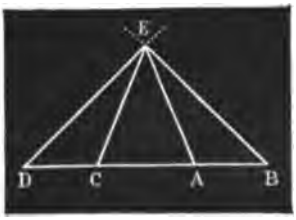
par M. E. Catalan, professeur émérite à l'Université de Liége.

La construction indiquée dans le numéro d'août de *Mathesis* (p. 192) est bien moins simple que celle qui a été donnée par M. Bordage(*).

Je rappelle, en peu de mots, la Note de M. Bordage.

On peut supposer que $CA = a$, $CAB = b$ sont les longueurs données.

1° Dans la direction AC prolongée, on prend $AD = BC$.




2° Des points B, D, comme centres, avec BC comme ouverture de compas, on trace deux arcs se coupant en E : EC est la *moyenne porportionnelle* demandée.

En effet, le point E appartient à la perpendiculaire au milieu de BD; donc, à cause de $CD = AB$, les droites EA, EC sont égales : le triangle ECA est isoscèle.

Par construction, le triangle BCE est isoscèle.

---

(*) *Journal de Mathématiques élémentaires* (1885, p. 75). De plus, dans la figure, quelques droites ont été omises.

De plus, ces triangles ont même angle à la base; donc ils sont semblables :

$$\frac{CA}{CE} = \frac{CE}{CB}.$$

*P. S.* Si l'on compte les opérations *nécessaires*, on trouve *trois* arcs et *une* droite.

Liège, 3 juillet 1892.

---

## NOTES MATHÉMATIQUES.

**17.** *Somme des carrés des coefficients des termes du binôme* $(1+x)^n$. M. Mister nous communique la note suivante qui se trouve dans une lettre de Laplace à Lagrange du 11 août 1780. « On a

$$d^n uy = ud^n y + ndud^{n-1}y + \frac{n(n-1)}{1.2} d^2 u d^{n-2} y + \text{etc.}$$

Soit $y = u = x^n$; on aura

$$d^n x^{2n} = 1.2.3 \ldots n x^n \left\{ 1 + n^2 + \left[\frac{n(n-1)}{1.2}\right]^2 + \left[\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\right]^2 + \text{etc.} \right\}$$
$$= 2n(2n-1)(2n-2)\ldots(n+1)x^n,$$

ce qui donne

$$1 + n^2 + \left[\frac{n(n-1)}{1.2}\right]^2 + \cdots = \frac{(1.2.3\ldots 2n)}{(1.2.3\ldots n)^2} = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{1.2.3\ldots n} 2^n.$$

On peut arriver à cette formule d'une autre manière. Si l'on considère le produit $(1+x)^n \left(1+\frac{1}{x}\right)^n$, on remarque que le terme de ce produit indépendant de $x$ est précisément la somme des carrés des coefficients, ce qui se voit aisément en développant séparément les deux quantités $(1+x)^n$ et $\left(1+\frac{1}{x}\right)^n$, et en les multipliant l'une par l'autre; or, en mettant le produit $(1+x)^n \left(1+\frac{1}{x}\right)^n$ sous cette forme $\frac{1}{x^n}(1+x)^{2n}$, le terme indépendant de $x$ sera visiblement égal au coefficient de $x^n$ dans le développement de $(1+x)^{2n}$, c'est-à-dire à

$$\frac{2n(2n-1)(2n-2)\ldots(n+1)}{1.2.3\ldots n} = \frac{1.2.3.4\ldots 2n}{(1.2.3\ldots n)^2}$$
$$= \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{1.2.3\ldots n} 2^n;$$

on aura donc

$$1+n^2+\left[\frac{n(n-1)}{1.2}\right]^2+\ldots=\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{1.2.3\ldots n}2^n.$$

**18.** *Sur trois coniques du plan d'un triangle, par* M. E. Lemoine. (Comparez *Mathesis*, (2), II, p. 130). Je prends les notations de M. Bertrand. L'ellipse $\alpha$ a pour équation en coordonnées normales

$$a^2(-x\cos A+y\cos B+z\cos C)^2-16R^2yz\cos B\cos C=0.$$

Si j'appelle $l$, $m$, $n$ les longueurs des droites qui joignent l'orthocentre aux sommets de ABC, le centre de $\alpha$ a pour coordonnées

$$m^2+n^2,\quad ab,\quad ac;$$

on voit qu'il est situé sur la symédiane AK.

Le carré du demi petit axe de $\alpha$ a pour expression

$$\frac{b^2c^2}{4R^2}\cos A\cos B\cos C.$$

L'ellipse $\beta$ et l'ellipse $\gamma$ ont pour corde commune la droite ayant pour équation

$$yb^2\cos C=zc^2\cos B.$$

Les trois cordes communes respectivement à $\beta$ et $\gamma$, à $\gamma$ et $\alpha$, à $\alpha$ et $\beta$ se coupent en point ayant pour coordonnées

$$\frac{\cos A}{\sin^2 A},\quad \frac{\cos B}{\sin^2 B},\quad \frac{\cos C}{\sin^2 C}.$$

L'ellipse $\alpha$ coupe BC aux points ayant pour coordonnées

$$0,\quad a^2\cos C,\quad (2R\pm l)^2\cos B.$$

Les deux coniques $\beta$ et $\gamma$ se rencontrent aux deux points dont les coordonnées sont

$$\frac{4R^2(m\pm n)^2}{\cos A},\quad \frac{c^2m^2}{\cos B},\quad \frac{b^2n^2}{\cos C}.$$

**19.** *Sur les Brocardiennes d'une droite par rapport à une autre droite, par* M. E. Lemoine. Le théorème I de M. Socoloff (*Mathesis* 1892, p. 193) a une certaine importance dans la Géométrie du triangle.

La droite $a''b''c''$ et la droite $a'''b'''c'''$ ($a'''$, $b'''$, $c'''$ sont les intersections de $a'b$, $b'c$, $c'a$ avec AB, BC, CA) sont respectivement la Brocardienne directe et la Brocardienne rétrograde de L par rapport à L'.

Cela est dans mon mémoire de A. F., 1886, Congrès de Nancy et forme une partie du chapitre intitulé : *Études des droites qui se déduisent d'une droite donnée, comme les points de Brocard se déduisent du point de Lemoine*, où j'ai, je crois, considéré le premier les Brocardiennes d'une droite.

Si les équations

$$Ax + By + Cz = 0, \quad A'x + B'y + C'z = 0$$

représentent les droites L et L', leurs Brocardiennes se coupent en un point ayant pour coordonnées

$$\frac{A^2B'C' - A'^2BC}{AA'}, \text{ etc.}$$

d'où l'on peut déduire la *construction* d'un grand nombre de points remarquables. Ainsi :

Si L et L' sont la droite de Lemoine et celle de l'infini, on a le point

$$\frac{a^4 - b^2c^2}{a}, \text{ etc.}$$

Si L et L' sont la droite de Brocard et de celle de l'infini, on a le point

$$\frac{1}{a(a^4 - b^2c^2)}, \text{ etc.}$$

Si L et L' sont la droite de Lemoine et l'axe antiorthique, ou l'axe antiorthique et la droite de l'infini, on a le point

$$\frac{a^2 - bc}{a}, \text{ etc.}$$

---

## SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

### Question 743.

(Voir *Mathesis*, (2), I, p. 263.)

1° *Étant donnés une conique et deux points* A, B *dans son plan, les points de contact des tangentes à cette conique, menées par les deux points* A, B, *sont sur une deuxième conique* S *passant par les deux points* A, B. *A quelle condition la conique* S *est-elle une hyperbole équilatère ?*

2° *Démontrer qu'après avoir choisi le point* A, *on peut trouver comment il*

*suit un point* B *remplissant la condition indiquée ci-dessus : Du point* A *on trace deux droites quelconques et par le pôle de chacune d'elles, on mène une perpendiculaire à l'autre. Ces deux droites se coupent au point cherché* B.

3° *Le point* A *étant fixe, et les deux droites dont il vient d'être question tournant autour du point* A, *quel est le lieu du point* B? (V. JAMET.)

*Solution par* MM. DÉPREZ *et* BELLENS. 1° Soient

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$$

l'équation de la conique donnée et $(\alpha, \beta)$, $(\alpha', \beta')$ les coordonnées des points A, B. Toute conique passant par les points de contact des tangentes issues des points A, B peut être représentée par

$$\lambda(a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2) - (a^2\beta y + b^2\alpha x - a^2b^2)(a^2\beta' y + b^2\alpha' x - a^2b^2) = 0. \qquad (1)$$

Si l'on exprime qu'elle passe par A ou par B, on trouve une même égalité

$$\lambda - (a^2\beta\beta' + b^2\alpha\alpha' - a^2b^2) = 0. \qquad (2)$$

Donc les quatre points de contact et les deux points A, B appartiennent à une même conique (*).

Cette courbe sera une hyperbole équilatère, si la somme des coefficients de $x^2$ et $y^2$ dans l'équation (1) est nulle; cette condition, eu égard à la valeur de $\lambda$ donnée par (2), se réduit à

$$\beta\beta' + \alpha\alpha' = a^2 + b^2.$$

Par suite, les points A et B sont conjugués par rapport au cercle circonscrit au rectangle des axes (cercle de Monge), et si le point A est fixe, le point B décrit la polaire de A par rapport à ce cercle.

2° Soient $(x_1, y_1)$, $(x_2\ y_2)$ les coordonnées de deux points C, D situés sur la polaire de A; les polaires de ces points passent par A. Les perpendiculaires abaissées des points C, D respectivement sur les polaires de D, C ont pour équations

$$y - y_1 = \frac{a^2y_2}{b^2x_2}(x - x_1), \quad y - y_2 = \frac{a^2y_1}{b^2x_1}(x - x_2),$$

(*) Si C, D sont les points de contact des tangentes issues de A, et E, F ceux des tangentes issues de B, la figure ACEBFD est un hexagone de Pascal, car les côtés EC, FD se coupent sur la troisième diagonale du quadrilatère formé par les quatre tangentes. (J. N.).

ou

$$a^2y_2x - b^2x_2y - a^2y_2x_1 + b^2x_2y_1 = 0, \quad a^2y_1x - b^2x_1y - a^2y_1x_2 + b^2x_1y_2 = 0;$$

d'où, par soustraction,

$$a^2x(y_2 - y_1) - b^2y(x_2 - x_1) - (a^2 + b^2)(y_2x_1 - y_1x_2) = 0, \quad (3)$$

équation qui est vérifiée par les coordonnées du point d'intersection E des deux perpendiculaires.

Mais en identifiant l'équation de la droite CD avec celle de la polaire de A, c'est-à-dire les équations

$$x(y_2 - y_1) - y(x_2 - x_1) + x_2y_1 - y_2x_1 = 0, \quad b^2\alpha x + a^2\beta y - a^2b^2 = 0,$$

on trouve

$$\frac{y_2 - y_1}{b^2\alpha} = \frac{x_2 - x_1}{-a^2\beta} = \frac{x_1y_2 - y_1x_2}{a^2b^2}. \quad (4)$$

Si, dans l'équation (3), on remplace les binômes $y_2 - y_1$, $x_2 - x_1$, $x_1y_2 - y_1x_2$ par les quantités $b^2\alpha$, $-a^2\beta$, $a^2b^2$ qui leur sont proportionnelles, il vient

$$\alpha x + \beta y = a^2 + b^2;$$

donc E est sur la polaire de A par rapport au cercle de Monge.

Pour traiter *directement* le cas où la courbe donnée est une parabole, nous substituons à l'équation (1) celle-ci :

$$\lambda(y^2 - 2px) - [y\beta - p(x + \alpha)][y\beta' - p(x + \alpha')] = 0, \quad (5)$$

avec la condition

$$\lambda = \beta\beta' - p(\alpha + \alpha').$$

L'équation (5) représente une hyperbole équilatère si $\alpha + \alpha' = -p$. Donc, si le point A est fixe, le point B décrit une perpendiculaire à l'axe de la parabole.

Remarque. Les points A et B, et les points de contact des tangentes menées par A et B à l'ellipse donnée peuvent être situés sur une même circonférence. Cela arrive lorsque le symétrique de B par rapport à l'axe focal de l'ellipse est l'inverse de A par rapport au cercle décrit sur la distance des foyers comme diamètre.

Si la courbe donnée est une parabole, la même condition exige que A et B soient symétriques par rapport au foyer. (Dépréz.)

Autres solutions analytiques par MM. Absolonne et Mandart.

## Question 747.

(Voir *Mathesis*, t. I (2), p. 281.)

*Soient* $\lambda$, $\lambda'$ *les angles sous lesquels on voit d'un même point d'une ellipse deux diamètres conjugués quelconques. Démontrer que la somme* $\operatorname{cotg}^2\lambda + \operatorname{cotg}^2\lambda'$ *est constante.*

*Solution par* MM. Déprez, Cristesco *et* Joachimescu. Soient CC', DD' deux diamètres conjugués quelconques, M un point quelconque de l'ellipse. La courbe étant rapportée à ses axes principaux, nous prenons pour coordonnées des points C, C', M :

$$(a\cos\varphi,\ b\sin\varphi),\quad (-a\cos\varphi,\ -b\sin\varphi),\quad (a\cos\alpha,\ b\sin\alpha).$$

Les coefficients angulaires des droites MC, MC' seront

$$\frac{b(\sin\varphi-\sin\alpha)}{a(\cos\varphi-\cos\alpha)},\quad \frac{b(\sin\varphi+\sin\alpha)}{a(\cos\varphi+\cos\alpha)};$$

on en déduit facilement

$$\operatorname{cotg}\lambda = -\frac{c^2\sin(\varphi+\alpha)}{2ab}.$$

Pour passer à l'angle BMD', il suffit de changer $\varphi$ en $\frac{1}{2}\pi+\varphi$ ; donc

$$\operatorname{cotg}\lambda' = -\frac{c^2\cos(\varphi+\alpha)}{2ab};$$

conséquemment

$$\operatorname{cotg}^2\lambda + \operatorname{cotg}^2\lambda' = \frac{c^4}{4a^2b^2}.$$

Autres solutions par Mlle Pompilianu et MM. P. Decamps, Mandart, Vladimirescu.

---

## Question 758.

(Voir *Mathesis*, (2), II, p. 56 et 210.)

*On donne une sphère de rayon* R, *rapportée à trois diamètres rectangulaires. On considère la section* ZOX *et on suppose que celle-ci tourne autour de* OZ *d'un mouvement uniforme pendant que le rayon* OA *de cette section, partant de la position* OZ *se déplace autour de* O *avec la même vitesse. Étudier la courbe ainsi décrite sur la sphère par le point* A.

(H. Brocard.)

*Solution par* M. Déprez. Désignons par X, Y, Z les extrémités des rayons dirigés suivant les axes des coordonnées. Si l'on mène par Z un grand cercle perpendiculaire à l'arc XY et rencontrant celui-ci en D, il suffit de prendre sur la circonférence ZD un arc ZA égal à XD, ou un arc DA = DY pour avoir un point du lieu. La définition de notre courbe est donc analogue à celle de la strophoïde droite.

Si l'on considère YX et YZ comme étant l'équateur et le premier méridien, la longitude de chaque point de la courbe est égale à sa latitude.

Le triangle DAY étant isoscèle, on voit facilement que dans le triangle variable AYZ, la différence des angles ZAY, ZYA est constante et égale à un angle droit.

En prenant pour coordonnées $x, y, z$, les distances sphériques AX, AY, AZ, on peut représenter la courbe par l'une des équations

$$\cos x = \sin z \cos z, \quad \cos y = \sin^2 z, \quad \cos^2 x = \cos y (1 - \cos y).$$

---

## ×Question 768.

(Voir *Mathesis*, (2), II, p. 128.)

*Soient* D, E *les projections du sommet* A *du triangle* ABC *sur le côté* BC *et la médiatrice* ME *de ce côté. Démontrer que la droite* DE *passe par le sommet* $A_2$ *du second triangle de Brocard et que*

$$EA_2 = \frac{\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2}{4AM}. \qquad \text{(Sollertinsky.)}$$

*Solution par* M. Déprez. Soient S le pied de la symédiane AK, M' et S' les points où la médiane AM et la symédiane AS rencontrent la circonférence circonscrite au triangle ABC. Les angles BAM, SAC étant égaux, les arcs BM', CS' sont égaux ; donc M'S' est parallèle à BC, et EM est perpendiculaire au milieu de M'S'. Les directions de MM', MS' sont donc symétriques par rapport à EM ; il en est de même des diagonales AM, ED du rectangle ADME. On conclut de là que ED est parallèle à MS' ; comme ED passe par le milieu de AM, cette droite passe aussi par le milieu de AS', c'est-à-dire par le sommet $A_2$ du second triangle de Brocard.

La parallèle à BC par $A_2$ coupe AM' en son milieu P ; la figure $EAA_2P$ est donc un trapèze isocèle et $EA_2 = AP = \frac{1}{2}AM'$. Mais

$$BM.MC = AM.MM' = AM(AM' - AM);$$

d'où

$$2EA_2 = AM' = \frac{BM.MC + \overline{AM}^2}{AM} = \frac{\overline{BM}^2 + \overline{AM}^2}{AM} = \frac{\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2}{2AM}.$$

*Solution par* M. A. Droz. Soit T le point de rencontre des tangentes menées en B et C à la circonférence ABC. La droite AT, symédiane du triangle ABC rencontre la circonférence ABC en un point L, le côté BC en un point F, enfin la droite ED en un point $A_2$. ET et AD, EA et MF étant parallèles, on a

$$\frac{AA_2}{A_2T} = \frac{AD}{ET} = \frac{EM}{ET} = \frac{AF}{AT}.$$

AL étant divisée harmoniquement en F et T, on a aussi

$$\frac{AF}{AT} = \frac{LF}{LT}.$$

Par conséquent

$$\frac{AA_2}{A_2T} = \frac{LF}{LT}, \quad \frac{AA_2 + A_2T}{A_2T} = \frac{LF + LT}{LT},$$

ou $TA_2.TF = TA.TL = \overline{TC}^2 = TM.TO$, O désignant le centre de la circonférence ABC. Le quadrilatère $MOA_2F$ est donc inscriptible ; par suite, l'angle $OA_2T$ est droit et $A_2$, milieu de la corde symédiane AL, est un sommet du second triangle de Brocard.

A cause des angles droits AEO, $AA_2O$, le quadrilatère $EAA_2O$ est inscriptible ; soit U le point où la circonférence $AA_2O$ coupe AD ; OU est parallèle à BC. On a

$$DA_2.DE = DU.DA, \quad \text{ou} \quad (DE - EA_2)DE = OM.AD,$$

d'où

$$EA_2 = \frac{\overline{DE}^2 - OM.AD}{DE} = \frac{\overline{AM}^2 - OM.AD}{AM}.$$

Introduisons au numérateur les valeurs

$$\overline{AM}^2 = \frac{1}{2}(b^2 + c^2 - \frac{1}{2}a^2), \quad OM = R\cos A, \quad AD = \frac{bc}{2R};$$

il vient

$$\overline{EA}^2 = \frac{b^2 + c^2 - \frac{1}{2}a^2 - bc\cos A}{2AM} = \frac{b^2 + c^2}{4AM}.$$

M. Quint a donné une bonne solution par les coordonnées trilinéaires

---

## ×Question 773.

(Voir *Mathesis*, (2), II, p. 152.)

*Un tétraèdre* ABCD *donne lieu à trois quadrilatères gauches* : ABCD, ACBD, ADBC.

*Si l'on considère l'un d'eux*, ABCD *par exemple, les plans menés de deux sommets consécutifs* A *et* B, *perpendiculairement aux côtés opposés* BC *et* AD *se coupent suivant une droite; cette droite et trois autres analogues sont situées dans un même plan* $P_1$ *perpendiculaire à la droite qui joint les milieux des diagonales* AC *et* BD.

*Le plan* $P_1$ *et les deux plans analogues relatifs aux quadrilatères* ACDB, ADBC *se coupent en un point qui est le symétrique du centre de la sphère circonscrite au tétraèdre par rapport au centre de gravité*(*).

(Farjon.)

*Solution par* M. Sollertinsky. Soient $D_1$ l'intersection des plans menés des extrémités A, B du côté AB perpendiculairement à BC, AD; $D_2$, $D_5$, $D_4$ les droites analogues relatives aux côtés BC, CD, DA du quadrilatère ABCD.

On voit d'abord que les droites $D_1$, $D_5$ sont parallèles comme étant les intersections des plans respectivement parallèles.

De plus, les plans menés par les milieux des côtés AD, BC perpendiculairement aux côtés opposés BC, AD rencontrent le plan $D_1D_5$ suivant la droite équidistante de $D_1$ et $D_5$. Ces deux plans étant symétriques, par rapport au centre de gravité du tétraèdre, de ceux qui passent par le centre O de la sphère circonscrite, le plan $D_1D_5$ passe par le symétrique O′ de ce centre. Il en est de même du plan $D_2D_4$.

Il nous reste à démontrer que les deux plans $D_1D_5$, $D_2D_4$ n'en font qu'un seul. Pour cela il suffit de prouver que les droites $D_1$, $D_2$ se rencontrent.

---

(*) Cette question est tirée des *Nouvelles Annales de Mathématiques*, janv. 1892.

Or, les plans menés de A, C perpendiculairement à BC, AB se rencontrent suivant la perpendiculaire $h'_d$ au plan ABC passant par son orthocentre; les plans menés de B perpendiculairement à AD, DC se coupent suivant la hauteur $h_b$ du tétraèdre issue de B; et ces deux droites d'intersection $h'_d$, $h_b$ étant dans un même plan (mené de B perpendiculairement à AC), se coupent en un point $\beta$. Par suite, les droites $D_1$, $D_2$ concourent en $\beta$.

Ainsi, *les droites* $D_1$, $D_2$, $D_3$, $D_4$ *forment un parallélogramme* $\alpha\beta\gamma\delta$ *dont les sommets sont sur les hauteurs du tétraèdre et qui a pour centre le point* O'.

Enfin, la droite $D_1$ étant perpendiculaire au plan passant par les milieux des arêtes AB, CD, AC, BD, est perpendiculaire à la droite joignant les milieux de AC, BD. Il en est de même de la droite $D_2$.

Remarques : 1° $\alpha'\gamma'\delta'\beta'$, $\alpha''\delta''\beta''\gamma''$ étant les parallélogrammes correspondant aux quadrilatères ACDB, ADBC, on voit que les points $\gamma$, $\delta'$, $\beta''$ sont sur une même droite $d_a$ symétrique, par rapport à O', de la hauteur issue de A. La droite $d_a$ est donc une génératrice de l'hyperboloïde H déterminé par les hauteurs du tétraèdre. Le plan O'$d_a$ est l'un des plans asymptotiques, et par suite *le point* O' *est le centre de l'hyperboloïde* H.

2° $S_a$, $S_b$, $S_c$, $S_d$, désignant les aires BCD, CDA, ABD, ABC, et V le volume de ABCD, on a

$$A\alpha = \frac{2}{3}\frac{S_a S_c}{V}\cot DAB\,;\quad A\alpha' = \frac{2}{3}\frac{S_a S_d}{V}\cot BAC\,;\quad A\alpha'' = \frac{2}{3}\frac{S_a S_b}{V}\cot CAD.$$

*Solution par* M. A. Droz. Comme il est très facile de le démontrer, dans tout tétraèdre, les plans abaissés perpendiculairement du milieu d'une arête sur l'arête opposée, se coupent en un même point O, qui est le symétrique du centre de la sphère circonscrite au tétraèdre par rapport au centre de gravité (Monge).

Projetons le quadrilatère gauche ABCD sur un plan parallèle aux deux arêtes opposées AD et BC et par conséquent à la droite qui joint les milieux L, N des diagonales AC et BD. Soient, en outre, E et F, les milieux des côtés opposés BC et AD. Les plans perpendiculaires sur les arêtes AD, BC ou sur la droite LN seront pour le plan de projection des plans projetants.

Soit *abcd* le quadrilatère plan, projection de ABCD. Abaissons de $a$ et $d$ les perpendiculaires $aa'$, $dd'$ sur $bc$, et de $b$ et $c$ les perpendiculaires $bb'$,

$cc'$ sur $ad$; désignons aussi par $e$, $f$, $l$, $n$ les milieux de $bc$, $ad$, $ac$, $bd$.

Les droites $aa'$ et $bb'$ se coupent en $h$, projection de la ligne d'intersection des plans abaissés de A et B sur les droites BC et AD. De même, $cc'$ et $dd'$ se coupent en $i$, projection de l'intersection des plans abaissés perpendiculairement de C et D sur les mêmes droites.

$hi$ est donc la trace du plan contenant ces droites et ce plan est perpendiculaire sur le plan de projection. Comme on le voit, les deux droites abaissées perpendiculairement de $e$ et $f$ sur $ad$ et $bc$ se coupent en $m$ sur $hi$. Or $m$ est la projection du point de Monge.

D'après des théorèmes bien connus, $hi$ est la directrice de la parabole tangente aux quatre côtés du quadrilatère $abcd$ et par conséquent est perpendiculaire sur $ln$, lieu des centres des coniques tangentes à ces mêmes côtés(*). Il en résulte ce qui suit :

Les deux lignes d'intersection correspondant aux groupes de points A, B et C, D sont dans un plan passant par le point de Monge et qui est perpendiculaire sur LN; de même, les lignes d'intersection correspondant aux groupes de points A, D et B, C sont dans un plan passant par le point de Monge, tout en étant perpendiculaires sur la droite LN. Par conséquent, ces deux plans coïncident et l'existence du plan $P_1$ est ainsi démontrée.

Il résulte en outre de la démonstration que les quatre droites d'un même plan forment un parallélogramme ayant le point de Monge comme centre.

*Solution par* M. Emmerich. L'équation du premier plan est

$$\overline{XB}^2 - \overline{XC}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{AC}^2, \tag{1}$$

et l'équation du second,

$$\overline{XA}^2 - \overline{XD}^2 = \overline{BA}^2 - \overline{BD}^2, \tag{2}$$

X désignant un point variable.

La droite commune à ces plans appartient au plan représenté par

$$\overline{XA}^2 + \overline{XC}^2 - (\overline{XB}^2 + \overline{XD}^2) = \overline{AC}^2 - \overline{BD}^2. \tag{3}$$

---

(*) On peut démontrer cette propriété indépendamment de la théorie des coniques. En effet, $l$ et $n$ sont les centres de deux circonférences circonscrites aux quadrilatères $aa'cc'$, $bb'dd'$ et ayant $hi$ pour axe radical; car la circonférence décrite sur $ab$ comme diamètre passe par $a'$ et $b'$; d'où $ha.ha' = hb.hb'$; de même, $ic.ic' = id.id'$. (J. N.)

Si M, N sont les milieux de AC, BD, on a

$$\overline{XA}^2 + \overline{XC}^2 = 2\overline{XM}^2 + \tfrac{1}{2}\overline{AC}^2,$$
$$\overline{XB}^2 + \overline{XD}^2 = 2\overline{XN}^2 + \tfrac{1}{2}\overline{BD}^2.$$

L'équation (3) peut donc prendre la forme

$$\overline{XM}^2 - \overline{XN}^2 = \tfrac{1}{4}\overline{AC}^2 - \tfrac{1}{4}\overline{BD}^2. \tag{3'}$$

Elle représente un plan perpendiculaire à MN.

En faisant trois fois la permutation cyclique, on voit que l'équation (3) ne change pas; ce qui démontre la première partie de la question.

Soient O le centre de la sphère circonscrite, G le centre de gravité et Z le symétrique de O par rapport à G. On a

$$\overline{ZA}^2 = 2\overline{GA}^2 + 2\overline{GO}^2 - \overline{OA}^2,$$
$$\overline{ZA}^2 + \overline{ZC}^2 - (\overline{ZB}^2 + \overline{ZD}^2) = 2(\overline{GA}^2 + \overline{GC}^2) - 2(\overline{GB}^2 + \overline{GD}^2).$$

Or

$$\overline{GA}^2 + \overline{GC}^2 = 2\overline{MG}^2 + \tfrac{1}{2}\overline{AC}^2,$$
$$\overline{GB}^2 + \overline{GD}^2 = 2\overline{NG}^2 + \tfrac{1}{2}\overline{BD}^2.$$

Comme G est le milieu de MN, on obtient

$$\overline{ZA}^2 + \overline{ZC}^2 - (\overline{ZB}^2 + \overline{ZD}^2) = -\overline{BD}^2 + \overline{AC}^2$$

Le point Z appartient donc au plan $P_4$, et aussi aux plans $P_2$, $P_3$.

---

## *QUESTIONS D'EXAMEN.

**534.** Soient MN, M'N' deux diamètres quelconques d'un cercle. Un diamètre AB rencontre les cordes MM', NN' en P, P', et la tangente en A rencontre les cordes MN', M'N en D, D'. Démontrer que les droites DP' et D'P sont perpendiculaires entre elles.

Le 2e livre de Legendre suffit pour la démonstration.

**535.** La relation

$$\cos\tfrac{1}{4}(a+b+c-\pi) + \cos\tfrac{1}{4}(3a-b-c+\pi)$$
$$+ \cos\tfrac{1}{4}(3b-a-c-\pi) + \cos\tfrac{1}{4}(3c-a-b-\pi) = 0$$

se peut exister que si

$$a = 2n\pi + b + c$$

ou

$$a = (2n + 1)\pi \pm (b - c).$$ (P. Decamps.)

Ramener l'expression à un produit en appliquant la formule

$$\cos p + \cos q = 2\cos \tfrac{1}{2}(p+q)\cos \tfrac{1}{2}(p-q).$$

**326.** Si la tangente en un point M d'une ellipse rencontre le grand axe en T, on a

$$\cos FMT : \cos FTM = c : a.$$

Si MN est la normale, la proportion précédente se ramène à

$$NF : MF = c : a, \text{ etc.}$$

**327.** Par le centre O du cercle circonscrit au triangle ABC, on mène une parallèle à AB rencontrant AC en E; la perpendiculaire abaissée de O sur AB coupe en F la perpendiculaire élevée en A sur AC. Démontrer que la droite EF est parallèle à BC. (A. C.)

A cause de

$$EAF = EOF = 90°, \text{ on a } AEF = AOF = ACB.$$

**328.** Trouver deux nombres entiers positifs, sachant que leur somme est un multiple de leur produit. *Réponse* : 1 et 1 ou 2 et 2.

(J. M. E., 1892).

**329.** Trouver trois nombres entiers positifs dont la somme soit égale à leur produit. R. 1, 2, 3. (*Ib.*)

**330.** Trouver trois nombres entiers positifs sachant que leur produit est égal à la somme de leurs produits deux à deux. R. 2, 3, 6, ou 2, 4, 4. (*Ib.*).

---

## QUESTIONS PROPOSÉES.

*703. Étant donné un triangle ABC, soient AI, BI, CI les bissectrices intérieures et $B_a$, $C_a$ les projections de B, C sur AI; $C_b$, $A_b$ celles de C, A sur BI; $A_c$, $B_c$ celles de A, B sur CI. Démontrer : 1° que les droites $A_aA_c$, $B_aB_c$, $C_aC_b$ forment un triangle ayant pour sommets les milieux des côtés de ABC; 2° que les droites $B_aC_b$, $C_aA_c$, $A_bB_c$ forment un triangle ayant pour sommets les points de contact de BC, CA, AB avec le cercle inscrit à ABC. (Mandart).

×**794.** Si $A+B+C+D=2n\pi$, démontrer la relation

$$\Sigma\cos^4 A - 2\Sigma\cos^2 A\cos^2 B + 4\Sigma\cos^2 A\cos^2 B\cos^2 C = 4\cos A\cos B\cos C\cos D(\Sigma\cos^2 A - 2). \quad \text{(Greenstreet).}$$

**795.** Si $a$ est supérieur à $(-1)$, on a

$$\int_0^1 \frac{x^a(1+x-2x^{a+1})}{1-x^2}\,dx = \text{log. nép. } 2. \quad \text{(E. Catalan.)}$$

×**796.** Résoudre le système

$$\begin{aligned} xy(x+y) &= ab(a+b),\\ yz(y+z) &= bc(b+c),\\ zx(z+x) &= ca(c+a). \end{aligned} \quad \text{(Laisant.)}$$

**797.** Si dans un polygone inscrit d'un nombre pair de côtés, le produit des côtés de rang pair est égal au produit des côtés de rang impair, on peut inscrire une couronne de cercles tangents, consécutifs et tangents au cercle circonscrit aux sommets du polygone, quel que soit le premier cercle (*). (Éd. Lucas.)

---

## Rectifications.

P. 63 : ligne 6, au lieu de : O, lire $o$; ligne 8, 13, 18, au lieu de $O_a$, lire $o_a$; ligne 7, au lieu de : *homologue*, lire : *transformé continu en* A.

P. 82 : formule 22, au lieu de : 4R, lire 2R.

P. 85 : 2me formule 59, au lieu de : $\frac{aa_1r_a}{a}$, lire : $\frac{ar_1r_a}{a}$.

P. 89 : 1re formule 99, au lieu de : $\frac{R}{r}$, lire : $\frac{r}{R}$.

P. 90 : formule 109, au lieu de : R= lire : cos A=.

P. 91 : formule 110, la formule se reproduit, transformée soit en A, soit en B, soit en C; formules 112bis, parce que $4R-r_1-r_a=r_a-r$ et $r_1+r_a=s-r_a$, au lieu de : $S^2$ il faut mettre : $-S^2$ dans la seconde formule; formule 120, $-ab\cos C$ et 2S doivent être séparés par le signe = et non par −.

---

(*) Ce théorème nous a été transmis par M. Émile Lemoine, à qui le regretté Éd. Lucas l'avait communiqué en ces termes : « J'ai trouvé ces jours ci un théorème qui peut être considéré comme fort difficile si l'on ne prend droit le sentier qui y conduit; c'est du Poncelet circulaire. »

## SOMMATION DE QUELQUES SÉRIES CONVERGENTES;

par M. VERNIORY, élève-ingénieur des mines (Liége)(*).

1. Nous désignons par

$$u_1, \quad u_2, \quad u_3, \quad \cdots$$

les termes d'une série convergente, par $S_n$ la somme des $n$ premiers termes, par S la somme de la série.

Supposons d'abord, avec $k > 1$,

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)\cdots(n+k-1)};$$

comme on a identiquement

$$u_n = \frac{1}{k-1}\left[\frac{1}{n(n+1)\cdots(n+k-2)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)\cdots(n+k-1)}\right],$$

on trouve, en faisant successivement $n = 1, 2, \cdots$ et en ajoutant les résultats

$$S_n = \frac{1}{k-1}\left[\frac{1}{1.2\ldots(k-1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)\cdots(n+k-1)}\right]; \quad (A)$$

puis, en passant à la limite pour $n = \infty$ (et $k > 1$)

$$S = \frac{1}{1.2\ldots(k-2)(k-1)^2}, \quad (B)$$

résultat connu.

2. Soit

$$u_n = \frac{n+p}{n(n+1)\cdots(n+k-1)}.$$

Ecrivons

$$u_n = \frac{n+k-1}{n(n+1)\cdots(n+k-1)} - \frac{k-p-1}{n(n+1)\cdots(n+k-1)};$$

---

(*) Aujourd'hui ingénieur des mines à Mons.

alors, d'après les formules (A) et (B) et en supposant $k > 2$

$$S_n = \frac{1}{k-2}\left(\frac{1}{1.2\dots(k-2)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)\dots(n+k-2)}\right)$$
$$-\frac{(k-p-1)}{k-1}\left(\frac{1}{1.2\dots(k-1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)\dots(n+k-1)}\right)$$
$$= \frac{1}{(k-1)(k-2)}\left[\frac{p(k-2)+k-1}{1.2\dots(k-1)} - \frac{(n+1)(k-1)+p(k-2)}{(n+1)(n+2)\dots(n+k-1)}\right].$$

$$S = \frac{p(k-2)+(k-1)}{1.2.3\dots(k-3)(k-2)^2(k-1)^2}.$$

3. Soit

$$u_n = \frac{n(n+1)\cdots(n+k)}{(n+k+1)\cdots(n+2k+3)}.$$

Observant que

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} = \frac{(n+k)^2}{(n-1)(n+2k+3)} = \frac{(n+k)^2}{(n+k+1)^2-(k+2)^2},$$

on peut écrire

$$(k+2)^2 u_n = (n+k+1)^2 u_n - (n+k)^2 u_{n-1}.$$

Si l'on remplace $n$ successivement par $1, 2 \dots n$ ($u_0 = 0$) et qu'on ajoute les égalités correspondantes, on obtient

$$S_n = \frac{(n+k+1)^2}{(k+2)^2} u_n,$$

et, en passant à la limite pour $n = \infty$,

$$S = \frac{1}{(k+2)^2}.$$

Par exemple,

$$S_1^n \frac{n(n+1)}{(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)} = \frac{n(n+1)(n+2)}{9(n+3)(n+4)(n+5)},$$

$$\frac{1.2}{3.4.5.6} + \frac{2.3}{4.5.6.7} + \dots = \frac{1}{9}. \quad (\textit{Mathesis}, 1881, \text{t. I, p. 76}).$$

4. Supposons

$$u_n = \frac{n(n+1)\cdots(n+k)}{(n+k+1)\cdots(n+p)}, \quad p \geqslant 2k+3.$$

En opérant comme dans le paragraphe précédent, on trouve

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} = \frac{(n+k)^2}{(n-1)(n+p)} = \frac{(n+k)^2}{(n+k+1)^2 + An - B},$$

après avoir posé $A = p - 2k - 3$, $B = p + (k+1)^2$. De là

$$Bu_n - Anu_n = (n+k+1)^2 u_n - (n+k)^2 u_{n-1}.$$

Faisons la somme de toutes les égalités analogues pour $n = 1, 2, \cdots, n$; il vient

$$BS_n - A\mathfrak{S}_1^n nu_n = (n+k+1)^2 u_n,$$

$$S_n = \frac{p-2k-3}{p+(k+1)^2}\mathfrak{S}_1^n nu_n + \frac{(n+k+1)^2}{p+(k+1)^2}u_n \qquad (C).$$

Si l'on fait

$$U_p = \mathfrak{S}_1^n \frac{n(n+1)\cdots(n+k)}{(n+k+1)\cdots(n+p)},$$

et si l'on observe que

$$\mathfrak{S}_1^n nu_n = \mathfrak{S}_1^n \left[(n+p-p)\frac{n(n+1)\cdots(n+k)}{n+k+1)\cdots(n+p)}\right]$$

$$= U_{p-1} - pU_p,$$

l'égalité (C) prend la forme

$$U_p = \frac{p-2k-3}{p+(k+1)^2}[U_{p-1} - pU_p] + \frac{(n+k+1)^2}{p+(k+1)^2} \cdot \frac{n(n+1)\cdots(n+k)}{n+k+1)\cdots(n+p)},$$

d'où

$$U_p = \frac{p-2k-3}{(p-k-1)^2}U_{p-1} + \frac{(n+k+1)^2}{(p-k-1)^2} \cdot \frac{n(n+1)\cdots(n+k)}{(n+k+1)\cdots(n+p)}.$$

Pour $n = \infty$, on trouve

$$lim.\ U_p = \frac{p-2k-3}{(p-k-1)^2} lim\ U_{p-1},$$

$$= \frac{(p-2k-3)(p-2k-4)\cdots 2.1}{(p-k-1)^2(p-k-2)^2\cdots(k+3)^2} lim.\ U_{2k+3}.$$

Mais $lim\ U_{2k+3}$ est la somme de la série considérée au paragraphe précédent; par conséquent

$$\lim U_p = \frac{1.2.3\cdots(p-2k-3)}{(k+2)^2(k+3)^2\cdots(p-k-2)^2(p-k-1)^2}.$$

5. Considérons la série dont le terme général est

$$u_n = \frac{n(n+1)\dots(n+q)}{(n+k+1)(n+k+2)\dots(n+p)}, \quad k>q, \quad p>k+q-1,$$

de sorte que le dénominateur renferme au moins deux facteurs de plus que le numérateur.

Nous avons

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} = \frac{(n+q)(n+k)}{(n-1)(n+p)},$$

d'où

$$(n-1)(n+p)u_n - (n+q)(n+k)u_{n-1} = 0,$$
$$(n+q+1)(n+k+1)u_n - (n+q)(n+k)u_{n-1} =$$
$$(k+q-p+3)nu_n + [(q+1)(k+1)+p]u_n.$$

Faisons la somme des égalités analogues qui correspondent à $n=1, 2, \dots n$; il vient

$$S_n = \frac{p-k-q-3}{(q+1)(k+1)+p}\mathfrak{S}_1^n nu_n + \frac{(n+q+1)(n+k+1)}{(q+1)(k+1)+p}u_n. \quad (D)$$

Désignons maintenant $S_n$ par $V_q$, de sorte que

$$V_q = \mathfrak{S}_1^n \frac{n(n+1)\dots(n+q)}{(n+k+1)\dots(n+p)};$$

nous pourrons écrire

$$\mathfrak{S}_1^n nu_n = \mathfrak{S}_1^n \left[(n+q+1-(q+1))\frac{n(n+1)\dots(n+q)}{(n+k+1)\dots(n+p)}\right]$$
$$= V_{q+1} - (q+1)V_q;$$

et l'égalité (D) pourra prendre la forme

$$V_q = \frac{p-k-q-3}{(q+1)(k+1)+p}[V_{q+1} - (q+1)V_q] + \frac{(n+q+1)(n+k+1)u_n}{(q+1)(k+1)+p}.$$

Résolvons par rapport à $V_q$ et passons à la limite pour $n=\infty$; nous aurons

$$\lim V_q = \frac{p-k-q-3}{(q+2)(p-q-k)}\lim V_{q+1}.$$

Remplaçons $q$ par $q+1, q+2, \dots, k-1$, faisons le produit des égalités ainsi obtenues et observons que $V_k$ est la somme de la série considérée au paragraphe précédent; nous trouvons ainsi

$$\lim V_q =$$
$$\frac{1.2.3\dots(p-k-q-3)}{(k+2)^1(k+3)^2\dots(p-k-1)^t \times (q+2)(q+3)\dots(k+1)\times(p-k)(p-k-1)\dots(p-}$$

6. Prenons pour terme général d'une série

$$u_n = \frac{n^\alpha}{(n+1)(n+2)\dots(n+k)}, \quad \alpha \leq k-2,$$

et désignons la somme des $n$ premiers termes par $W_{k,\alpha}$. Ecrivons

$$u_n = \frac{n^{\alpha-1}(n+k-k)}{(n+1)(n+2)\dots(n+k)}$$
$$= \frac{n^{\alpha-1}}{(n+1)(n+2)\cdots(n+k-1)} - k\frac{n^{\alpha-1}}{(n+1)\cdots(n+k)};$$

nous en déduisons

$$W_{k,\alpha} = W_{k-1,\alpha-1} - k\,W_{k,\alpha-1},$$

formule donnant $W_{k,\alpha}$ de proche en proche. Par exemple

$$W_{k,2} = W_{k-1,1} - k\,W_{k,1};$$

si, dans la série du n° 2, on fait $p = -1$, et qu'on change $n$ en $n+1$, on obtient $W_{k,1}$; en passant ensuite à la limite pour $n = \infty$, on trouve

$$\Sigma_1^\infty \frac{n^2}{(n+1)(n+2)\cdots(n+k)} = \frac{k+1}{(k-1)(k-2)(k-3)\times 1.2.3\dots(k-1)},$$

7. Si le terme général

$$u_n = \frac{(n+p)(n+q)}{n(n+1)\cdots(n+k-1)}, \quad (k>3)$$

on écrit

$$u_n = \frac{n+p}{n(n+1)\cdots(n+k-2)} - (k-1-q)\frac{n+p}{n(n+1)\cdots(n+k-1)},$$
$$= \frac{1}{n(n+1)\cdots(n+k-3)}$$
$$- \frac{2k-p-q-3}{n(n+1)\cdots(n+k-2)} + \frac{(k-1-q)(k-1-p)}{n(n+1)\cdots(n+k-1)},$$

ce qui nous ramène au n° 1.

On trouve ainsi

$$\Sigma_1^\infty \frac{(n+p)(n+q)}{n(n+1)\cdots(n+k-1)}$$
$$= \frac{(k-1)^2 + (k-1)(k-3)(p+q) + (k-2)(k-3)pq}{1.2\dots(k-1)\times(k-1)(k-2)(k-3)},$$

$$\mathfrak{S}_1^{\infty}\frac{n^2}{(n+1)\dots(n+k)}=\frac{k+1}{1.2\dots(k-1)\times(k-1)(k-2)(k-3)},$$

$$\mathfrak{S}_1^{\infty}\frac{(n+k)^2}{n(n+1)\dots(n+k-1)}=\frac{(k+1)(k^3-4k^2+3k+1)}{1.2\dots(k-1)\times(k-1)(k-2)(k-3)}.$$

8. On peut généraliser ce qui précède, en substituant à la suite naturelle des nombres entiers une progression arithmétique

$$a, a+h, a+2h, \dots$$

On trouve ainsi :

$$\mathfrak{S}_a^{a+(n-1)h}\frac{1}{i(i+h)\cdots(i+\overline{k-1}h)}=$$

$$\frac{1}{(k-1)h}\left[\frac{1}{a(a+h)\cdots(a+\overline{k-2}h)}-\frac{1}{(a+nh)(a+\overline{n+1}h)\cdots(a+\overline{n+k-2}h)}\right]$$

et en passant à la limite pour $n=\infty$

$$\frac{1}{(k-1)h\times a(a+h)\cdots(a+\overline{k-2}h)};$$

$$\mathfrak{S}_a^{a+(n-1)h}\frac{i(i+h)\cdots(i+kh)}{(i+\overline{k+1}h)\cdots(i+\overline{2k+3}h}=$$

$$\frac{1}{(k+2)^2h^2}\cdot\frac{b(b+h)\cdots(b+k+1)\delta}{(b+\overline{k+2}h)\cdots(b+\overline{2k+3}\delta)},$$

$b$ désignant $a+(n-1)h$.

Voici des cas particuliers présentant un certain intérêt :

$$u_n=\frac{1}{n(n+1)(n+2)},\quad S_n=\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)},\quad S=\frac{1}{4};$$

$$u_n=\frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)},\quad S_n=\frac{n(n^2+6n+11)}{18(n+1)(n+2)(n+3)},\quad S=\frac{1}{18};$$

$$u_n=\frac{1}{n(n+1)(n+3)},\quad S_n=\frac{n(7n^2+4^2n+5q)}{36(n+1)(n+2)(n+3)},\quad S=\frac{7}{36};$$

$$u_n=\frac{n+3}{n(n+1)(n+2)},\quad S_n=\frac{n(5n+11)}{4(n+1)(n+2)},\quad S=\frac{5}{4};$$

$$u_n=\frac{n^2}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)},\quad S_n=\frac{n(n+1)(5n+4)}{36(n+2)(n+3)(n+4)},\quad S=\frac{5}{36},$$

$$u_n=\frac{n(n+6)}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)},\quad S_n=\frac{n(n+1)(5n+22)}{18(n+2)(n+3)(n+4)},\quad S=\frac{5}{18}.$$

Seraing, septembre 1888

## BIBLIOGRAPHIE.

*Recueil de problèmes de mathématiques.* Géométrie analytique à deux dimensions (et géométrie supérieure) à l'usage des classes de mathématiques spéciales par C.-A. LAISANT, Docteur ès Sciences, ancien élève de l'École Polytechnique. Paris, Gauthier-Villars et fils, 1893. Un volume in-8° de X-311 pages. Prix :

M. Laisant s'est proposé de publier un recueil de problèmes classés par divisions scientifiques, contenant les énoncés, avec renvoi aux solutions, de tous les problèmes posés depuis l'origine dans divers journaux (*) : *Nouvelles Annales de mathématiques* (depuis 1842), *Journal de mathématiques élémentaires et de mathématiques spéciales* (depuis 1877), *Nouvelle correspondance mathématique* (de 1874 à 1880), *Mathesis* (depuis 1881).

L'ouvrage doit comprendre les sept parties suivantes : I. Arithmétique. — Algèbre élémentaire. Trigonométrie. — II. Géométrie à deux dimensions. — Géométrie à trois dimensions. — Géométrie descriptive. — III. Algèbre supérieure. — Théorie des nombres. — Probabilités. — Géométrie de situation. — IV. Géométrie analytique à deux dimensions (et géométrie supérieure). — V. Géométrie analytique à trois dimensions (et géométrie supérieure). — VI. Géométrie du triangle (**). — VII. Calcul infinitésimal et calcul des fonctions. — Mécanique. — Astronomie.

« Les problèmes de ce Recueil représentent en quelque sorte le résumé des travaux mathématiques d'un demi-siècle. Presque tous intéressants, quelques-uns sont dus à des géomètres illustres, et méritent d'attirer l'attention, non seulement en ce qui concerne l'enseignement, mais aussi en ce qui concerne la science pure. Et cependant, épars dans des collections dont quelques-unes sont rares aujourd'hui, ils étaient devenus presque introuvables, surtout pour les élèves » (Avertissement).

Le volume relatif à la géométrie analytique plane vient de paraître. Il renferme les énoncés de 1183 questions classés dans un ordre propre à faciliter les recherches.

A en juger par cette première partie, le « dictionnaire des questions proposées » dont M. Laisant vient de commencer la publication, est appelé à rendre un service réel aux professeurs et aux élèves. (J. N.)

---

*Décomposition en facteurs des quantités algébriques*, à l'usage de l'enseignement moyen, par Alfred URBAIN, professeur au collège Notre-Dame à Tournai. Un vol. in-8° de 74 pages. Paris, Retaux-Bray; Lille, L. Quarré; Tournai, Decallone-Liagre, 1892. Prix : 1 fr.

Cet ouvrage, très élémentaire, se rapproche beaucoup des ouvrages analogues de M. Brasseur et de MM. De Meyst et Knops. Voici les subdivisons du livre : Définitions. 1. Résultats généraux de la multiplication ; 2. Résultats généraux de la divi-

---

(*) Le *Journal de Vuibert* renferme un grand nombre de questions intéressantes dont quelques-unes sont *originales* et pourraient trouver place dans le Recueil.

(**) Pourquoi ne pas y joindre la Géométrie du tétraèdre ?

sion ; 3. Décomposition en facteurs rationnels a) des monômes ; b) des polynômes : 4. Exercices d'application.

Nous avons à présenter quelques observations critiques. La démonstration du n° 30 est mal présentée : La substitution de $a$ à $x$ doit se faire également dans le quotient Q et il importe de remarquer que ce quotient a une valeur finie et déterminée. La recherche du quotient de $x^m \mp a^m$ par $x \mp a$ et l'énoncé de la loi de ce quotient laissent à désirer. La démonstration du théorème du n° 48 est défectueuse. Pourquoi écrire $F_{(x)}$ au lieu de $F(x)$ ? (J. N.).

---

## NOTES MATHÉMATIQUES.

**30.** *Somme des carrés des coefficients binômiaux* (Extrait d'une lettre de M. DE LONGCHAMPS). Vous avez publié, p. 251, deux démonstrations de la formule qui permet de calculer la somme des carrés des coefficients binômiaux, l'une due à Laplace, peu connue, très ingénieuse ; l'autre tout à fait classique, et qu'on indique dans la plupart des traités d'Algèbre.

Il en existe une troisième, dont j'ignore l'auteur et que je me permets de vous signaler ici, si elle ne vous est pas connue.

En considérant $m + n$ lettres, parmi lesquelles on distingue $m$ lettres grecques, $n$ lettres romaines, on écrit immédiatement la formule :

$$C_{m+n}^{p} = C_{m}^{p} + C_{m}^{p-1}C_{n}^{1} + C_{m}^{p-2}C_{n}^{2} + \cdots,$$

$C_i^k$ désignant le nombre des combinaisons de $i$ objets, $k$ à $k$. On suppose, bien entendu,

$$m \geqq p, \quad n \geqq p.$$

En faisant, dans cette formule, $m = n = p$, on a

$$C_{2m}^{m} = C_{m}^{m} + C_{m}^{m-1}C_{m}^{1} + C_{m}^{m-2}C_{m}^{2} + \cdots$$

et, en observant que

$$C_{m}^{m} = 1, \quad C_{m}^{m-1} = C_{m}^{1}, \quad C_{m}^{m-2} = C_{m}^{2}, \cdots$$

on a le résultat connu.

**31.** *Sur une équation dont toutes les racines sont réelles.* La formule

$$D^n uy = uD^n y + nDuD^{n-1}y + \frac{n(n-1)}{1.2}D^2 uD^{n-2}y + \cdots$$

donne, si l'on prend $u = (x-a)^n$, $y = (x-b)^n$

$$D^n[(x-a)^n(x-b)^n] = 1.2.3...n \times$$

$$\left\{(x-a)^n + n^2(x-a)^{n-1}(x-b) + \left[\frac{n(n-1)}{1.2}\right]^2 (x-a)^{n-2}(x-b)^2 + \cdots\right\}$$

Il résulte du théorème de Rolle que l'équation

$$D^n[(x-a)^n(x-b)^n] = 0$$

a ses $n$ racines réelles, comprises entre $a$ et $b$. On en conclut, en posant $x - b = z(x-a)$, que l'équation :

$$1 + n^2 z + \left[\frac{n(n-1)}{1.2}\right]^2 z^2 + \cdots + n^2 z^{n-1} + z^n = 0,$$

qui a pour coefficients les carrés des coefficients de $(1+x)^n$, n'a que des racines réelles.

Ce théorème (Comparer N. A. M, 1870, p. 420) peut être généralisé : on considère une dérivée de $(x-a)^m(x-b)^n$. (J. N.)

**22.** *Sur la définition de la racine carrée d'un nombre non carré* (Extrait d'une lettre de M. C. Le Paige). Je vous ai parlé naguère d'une définition de la racine carrée d'un nombre non carré qui se rapproche assez de celle que notre éminent confrère, M. Catalan, a proposée il y a près de cinquante ans et qui a fini, à juste titre, par s'introduire dans la plupart des manuels d'arithmétique.

Cette définition figure dans le *Commentaire sur l'analyse des Infiniment petits* (du marquis de l'Hospital) par M. Crouzas, Professeur à Lausanne, Paris, Montalant, 1721, p 168. On ne s'aviserait guère de chercher une définition rigoureuse dans cet auteur qui, habituellement, ne se piquait guère d'exactitude et de précision. Quoi qu'il en soit, voici le passage que j'emprunte à Crouzas :

« La $\sqrt[2]{2}$ est moyenne proportionnelle entre 1 et 2 ; c'est-à-dire, après avoir tracé une Fraction, qui, multipliée par elle-même, fasse 2 moins quelque chose ; à cette Fraction j'en ajouterai une autre, et le quarré de cette somme approchera un peu plus de la quantité 2 que le premier. Je continuerai ces Additions, dont chacune sera plus petite que la précédente. S'il était possible de parvenir, à force de telles Additions, à une quantité qui, multipliée par elle-même, formât un produit égal au nombre 2, j'aurais dans la somme de ces Fractions, un véritable

nombre, qui seroit la véritable racine de 2. On prouve que cela implique contradiction; mais en poussant la suite de ces Fractions, on parviendra à une somme qui, multipliée par elle-même, donnera un produit qui ne sera surpassé par le nombre 2 que d'une quantité plus petite que toute Fraction assignable. Alors cette somme passera pour la véritable racine de 2, et on dira que la suite par laquelle on y sera parvenu, a été poussée à l'infini; c'est-à-dire, si loin qu'on se permet de négliger ce qui s'en manque. »

Ne vous semble-t-il point que, débarrassée de ses longueurs et de la terminologie de l'époque, cette définition revient à dire : *On appelle* $\sqrt{2}$ *la limite des nombres dont le carré a 2 pour limite ?*

**23.** *Bibliographie relative aux centres isogones d'un triangle* (Voir *Mathesis*, (2) II, p. 162. Extrait d'une lettre de M. Vigarié). « Au sujet de la Bibliographie relative à un certain problème de Fermat (Centres isogones) publiée dans *Mathesis*, je me permets de vous adresser quelques renseignements complétant ceux déjà donnés. Les voici :

V. Viviani. De maximis et minimis, p. 143 (Florentiae, 1659).

B. Cavalerius. Exercitationes Geometricæ, p. 504 (Bononiae, 1647).

H. Fabry. Synopsis Geometr. p. 469 (Lyon 1669).

Th. Simpson. The Doctrine and Applications of Fluxions (London, 1750).

N. Fuss. Nova acta Academ. Petropol. (1798).

Grüson. Abhandlungen der Akad. der Wissensch. zu Berlin (1816-1817).

Crelle. Ueber einige Eigenschaften des ebenen geradlinigen Dreiecks (Berlin, 1816).

Lehmus. *Crelle*, t. 50 (1854).

Lindemann. Archives de Grunert, t. 27 (1856).

Grunert. Archives de Grunert, t. 48 (1867).

Klügel's Wörterbuch, t. V, p. 791.

Crelle. Sammlung Math. Aufsätze und Bemerkungen (Berlin, 1822).

Steiner. *Crelle*, t. 13. — G. Werke, t. 2, pp. 17, 97, 729-730.

Wetzig. Ueber das Minimum oder Maximum der Potenzsumme der Abstände eines Punktes von gegebenen Punkten, Geraden oder Ebenen (*Crelle*, t. 62, p. 346-396).

Dippe. *Crelle*, t. 16, p. 74.

Hain. Archives de Grunert, t. 59.

Heinen. Ueber Systeme von Kräften (Cleve, 1834).

Lindelöf. Sur les maxima et minima d'une fonction des rayons vecteurs menés d'un point mobile à plusieurs centres fixes (Acta Societ. Scientif. Fennicæ, 1866, p. 191).

Voilà pour les ouvrages publiés avant la *naissance* de la Géométrie du triangle. Depuis lors, les centres isogones ont été souvent mis en cause. »

---

## SUR LA CONSTRUCTION DE LA MOYENNE PROPORTIONNELLE;

par M. Émile Lemoine, ingénieur civil à Paris.

Dans le numéro d'août (*Mathesis*, 1892, p. 192), se trouve une jolie construction de la moyenne proportionnelle entre deux droites données; M. Catalan (*Mathesis*, 1892, p. 250) fait remarquer qu'il y a une construction plus simple encore qu'il attribue à M. Bordage (*Journal de mathématiques élémentaires* de M. de Longchamps, 1885, p. 75); je crois utile de dire qu'elle est beaucoup plus ancienne. On la trouve donnée par M. Edm. Gouzy (de Lausanne) dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* de 1857, p. 125. Elle n'avait point été remarquée, parce que les géomètres n'avaient jamais eu l'attention attirée sur la simplicité *effective* de leurs solutions spéculatives.

En se servant de la méthode que j'ai donnée (*Mathesis*, 1888, pp. 217-222, 241-244), on voit que le symbole précis de la construction s'obtiendra ainsi (voir la figure de la page 250 de la note de M. Catalan):

Je suppose CA et CB placés, ainsi que le fait M. Catalan. Je prends la longueur BC et laissant une des pointes du compas en B je décris le cercle B(BC)(*) ... *op* : $(3C_1 + C_3)$, je décris A (BC) qui coupe la droite BAC en D ... *op* : $(C_1 + C_3)$; les points B, A, C, D se succèdent dans cet ordre. Je décris D (BC) qui coupe B(BC) en E ... *op*: $(C_1 + C_3)$. La distance EC, *qu'il n'y a pas besoin de tracer*, est la moyenne proportionnelle cherchée obtenue par le symbole :

$$op : (5C_1 + 3C_3)$$

trois arcs de cercle seulement.

Puisque l'occasion s'en présente, je signale que, depuis l'article cité

---

(*) M (R) désigne le cercle de rayon R et de centre M.

de *Mathesis*, j'ai beaucoup perfectionné et étendu la méthode dont j'avais eu l'idée, et que j'ai constitué un art propre des constructions géométriques : La *Géométrographie* (voir *Assoc. Française, Congrès de Pau*, 1892).

---

## SUR LA QUESTION 519.

(Voir *Mathesis*, (2), II, pp. 47 et 160.)

Nous avons reçu à propos de la question 519 une lettre de M. Lemoine, dans laquelle il donne sur cette question les développements suivants, qu'il tient de M. Moutard, et qui sont d'ailleurs analogues à ceux que l'on trouve dans la note de M. E. Cesàro (p. 160).

Les racines de l'équation

$$f(x) - x = 0, \tag{1}$$

sont évidemment racines de l'équation

$$f[f(x)] - x = 0; \tag{2}$$

il est facile de voir que, si elles sont multiples dans (1), elles sont *au même degré* de multiplicité dans (2), mais il peut arriver que des racines simples de (1) soient multiples dans (2) et la proposition consiste en ce que les racines simples de (1) qui seraient multiples dans (2) y seraient d'un ordre de multiplicité impair.

En effet, les racines de (1) sont les abscisses des points d'intersection de la courbe (C) représentée par $y = f(x)$ avec la droite (D) dont l'équation est $y = x$; les racines de (2) sont, d'autre part, les abscisses des points communs à la courbe (C) avec la courbe (C′) définie par $x = f(y)$, courbe symétrique de (C) par rapport à D. Or à toute racine simple $\alpha$ de (1) correspond un point où (C) traverse (D) sans lui être tangente ; si (D) n'est pas normale à (C) en ce point, c'est-à-dire si $f'(\alpha) \gtrless -1$, (C′) traverse nécessairement (C) sans lui être tangente et $\alpha$ sera racine simple de (2) ; mais si (D) est normale à (C), c'est-à-dire si $f'(\alpha) = -1$, les 2 courbes (C) et (C′) *se traverseront* en ce point en étant tangentes l'une à l'autre, et l'ordre de leur contact sera *pair* puisqu'elles se traversent ; en d'autres termes, un *nombre impair* de points d'intersection pourront être considérés comme confondus, c'est-à-dire que $\alpha$ sera racine multiple d'ordre impair de l'équation (2). C. q. f. d.

On voit par la même considération que si $f(x)$ est un polynôme entier de degré $m$, l'équation $\frac{f(fx)-x}{f(x)-x}=0$, de degré $m(m-1)$, peut être abaissée à un degré sous-double ; car les racines s'y partagent par couples, tels que, $a$ et $b$ désignant les deux racines d'un couple, on ait $b=f(a)$, $a=f(b)$. — On peut profiter de cette remarque pour former des exercices intéressants.

La proposition qui constitue la question 519 peut s'énoncer de bien des façons différentes. Ainsi l'on pourrait dire, par exemple :

*Si une fonction* X *a un facteur commun avec*

$$X_1=X+X'+\frac{XX''}{12}+\frac{X^2X'''}{1.2.3}+\text{etc.},$$

*ce facteur* NÉCESSAIREMENT *simple dans* X *est* NÉCESSAIREMENT *multiple d'ordre* PAIR *dans* $X_1$.

Ou :

*Soit la série*

$$y=a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\text{etc.}$$

*qui, inversée, donne un résultat de la forme*

$$x=b_1y+b_2y^2+\cdots+b_ny^n+\text{etc.}$$

*Si* $b_1=a_1$ (ce qui exige d'ailleurs $a_1=-1$), *on aura nécessairement* $b_2=a_2$ ; si en outre $b_3=a_3$ (*ce qui exige* $a_3=-a_2^2$), *on aura nécessairement* $b_4=a_4$ *et ainsi de suite.*

Ou encore :

*Dans le développement* $y=a_1x+a_2x^2+\cdots$ *on peut toujours laisser arbitraires* $a_2, a_4 \ldots a_{2n}$ *et choisir ensuite* $a_1, a_3 \ldots a_{2n-1}$ *de telle façon que l'on ait* $b_1=a_1$, $b_2=a_2 \ldots b_{2n}=a_{2n}$ *et même* $b_{2n+1}=a_{2+1}$ *quel que soit* $a_{2n+1}$.

En remarquant que

$$a_n=\frac{1}{n!}\left(\frac{d^ny}{dx^n}\right)_{x=0}, \qquad b_n=\frac{1}{n!}\left(\frac{d^nx}{dy^n}\right)_{y=0},$$

on peut aussi donner aux derniers énoncés une forme intéressante. Rien de plus facile d'ailleurs que d'avoir des exemples réalisant les diverses circonstances dont nous parlons. Une manière simple consiste à prendre une courbe $f(x, y)=0$ dans laquelle la valeur de $x$ développée suivant les puissances de $y$ ne renferme que des puissances paires jusqu'au terme en $y^{2n+1}$ et à faire ensuite un changement de coordonnées.

Au même ordre d'idées se rattache encore la solution de cette question :

*Trouver une fonction identique à son inverse et dont les dérivées d'ordre pair jusqu'à un certain ordre prennent, pour une valeur donnée de x, des valeurs données arbitraires.*

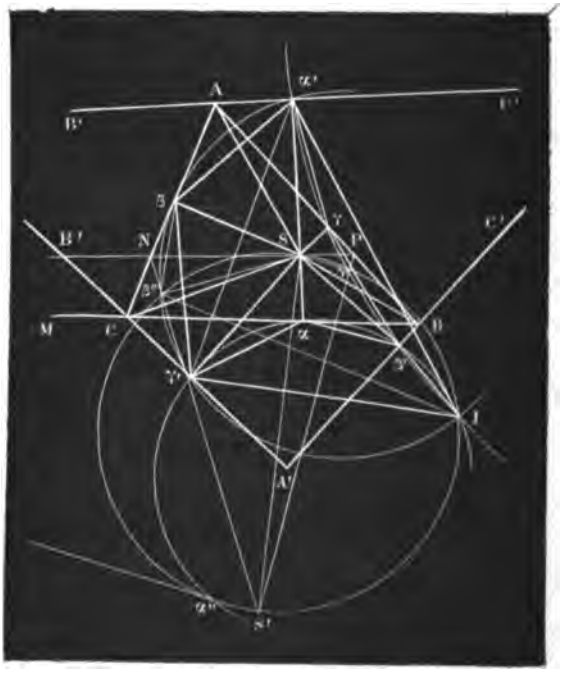
---

## SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES (*).

### ×Question 795.

(Voir *Mathesis*, (2), I, p. 152.)

*Au triangle* ABC, *on circonscrit un autre triangle* A'B'C'; *soient* $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$ *les projections d'un point* S *sur les côtés des triangles*




ABC, A'B'C'. 1° *Les trois circonférences* $\alpha\beta'\gamma'$, $\beta\gamma'\alpha'$, $\gamma\alpha'\beta'$ *concourent en un même point* I; 2° *Une circonférence* $\Delta$ *passant par* S *et* I *rencontre les*

---

(*) Nous avons à mentionner une bonne solution de la question 756 (voir p. 170) par M. Vladimirescu et de la question 757 (voir p. 533), par M. Listray.

***premières circonférences aux points*** $\alpha''$, $\beta''$, $\gamma''$. ***Soit*** S' ***le point de*** Δ ***diamétralement opposé à*** S; ***les droites*** S'$\alpha''$, S'$\beta''$, S'$\gamma''$, ***rencontrent les côtés correspondants de*** ABC ***en trois points situés sur une même droite passant par*** S. (SOLLERTINSKY.)

***Solution par*** M. LISTRAY. 1° Appelons I le point d'intersection des circonférences $\gamma\alpha'\beta'$, $\beta\alpha'\gamma'$. La circonférence $\alpha\beta'\gamma'$ passera par I si les angles $\gamma'\alpha\beta'$, $\beta'\mathrm{I}\gamma'$ sont supplémentaires. Or, à cause des angles droits en $\beta$ et $\alpha'$, $\gamma'$ et $\alpha$, $\alpha$ et $\beta'$, les quadrilatères S$\beta$A$\alpha'$, S$\alpha$C$\gamma'$, S$\alpha$B$\beta'$ sont inscriptibles; on en déduit :

$$\gamma'\alpha\beta' = \pi - \gamma'\alpha\mathrm{C} - \beta'\alpha\mathrm{B} = \pi - \gamma'\mathrm{SC} - \beta'\mathrm{SB}.$$

D'autre part :

$$\begin{aligned}\gamma'\mathrm{I}\beta' &= \gamma'\mathrm{I}\alpha' - \beta'\mathrm{I}\alpha' = (\pi - \gamma'\beta\alpha') - (\pi - \beta'\gamma\alpha') \\ &= (\mathrm{C}\beta\gamma' + \mathrm{A}\beta\alpha') - (\alpha'\gamma\mathrm{A} - \beta'\gamma\mathrm{B}) \\ &= \mathrm{CS}\gamma' + \mathrm{AS}\alpha' - (\alpha'\mathrm{SA} - \beta'\mathrm{SB}) = \mathrm{CS}\gamma' + \beta'\mathrm{SB};\end{aligned}$$

par conséquent,

$$\gamma'\alpha\beta' + \gamma'\mathrm{I}\beta' = \pi.$$

2° Désignons par M, N, P les intersections de S'$\alpha''$, S'$\beta''$, S'$\gamma''$ avec BC, CA, AB, et traçons les droites SM, SN, SP; il faut démontrer qu'elles coïncident.

Démontrons, par exemple, que

$$\mathrm{NS}\beta'' + \mathrm{PS}\gamma'' = \pi - \beta''\,\mathrm{S}\gamma'' = \beta''\mathrm{S}'\gamma''.$$

Les angles S$\beta''$S', S$\beta$N étant droits, le quadrilatère S$\beta$N$\beta''$ est inscriptible; donc l'angle

$$\mathrm{NS}\beta'' = \mathrm{N}\beta\beta'' = \pi - \beta''\beta\alpha' - \mathrm{A}\beta\alpha' = \beta''\mathrm{I}\alpha' - \mathrm{AS}\alpha'.$$

Semblablement, l'angle

$$\mathrm{PS}\gamma'' = \mathrm{P}\gamma\gamma'' = \gamma''\gamma\alpha' - \mathrm{B}\gamma\alpha' = \pi - \gamma''\mathrm{I}\alpha' - (\pi - \mathrm{A}\gamma\alpha') = \mathrm{AS}\alpha' - \gamma''\mathrm{I}\alpha'.$$

Par suite,

$$\mathrm{NS}\beta'' + \mathrm{PS}\gamma'' = \beta''\mathrm{I}\alpha' - \gamma''\mathrm{I}\alpha' = \beta''\mathrm{I}\gamma'' = \beta''\mathrm{S}'\gamma'',$$

ce qui démontre la seconde partie du théorème.

---

## Question 737.

(Voir *Mathesis*, (2), I, p. 216.)

***Soit*** B'C' ***la transversale du triangle*** ABC ***antiparallèle de*** BC ***dans l'angle*** BAC ***et passant par le pied*** K$_a$ ***de la symédiane*** AK. 1° ***La polaire de*** A ***par rapport au cercle décrit sur*** BC ***comme diamètre passe par les***

*orthocentres* H, H′ *des triangles* ABC, AB′C′ *et est perpendiculaire à la médiane* AG *de* ABC. 2° *La corde commune* NN′ *des cercles décrits sur* BC *et* B′C′ *comme diamètre passe par* $K_a$ *et les droites* AN, AN′ *sont symétriques par rapport à la bissectrice de l'angle* BAC. 3° *On a*

$$\frac{1}{\overline{AB}^2}+\frac{1}{\overline{AC}^2}=\frac{4}{\overline{AB'}^2+\overline{AC'}^2}. \qquad \text{(Sollertinsky.)}$$

*Solution par* M. Déprez. 1° Soient $H_a$, $H_b$, $H_c$ les pieds des hauteurs du triangle ABC, $M_a$ le milieu de BC et L le point de rencontre des droites BC, $H_bH_c$. La polaire de A par rapport à la circonférence $BH_cH_bC$ est LH ; car elle passe par les points de concours des droites joignant directement ou inversement les extrémités de deux cordes $BH_c$, $CH_b$ menées par A. Cette droite est perpendiculaire à la ligne joignant A au centre $M_a$ du cercle $BH_cH_bC$ (*).

Soit, dans le triangle AB′C′, $H'_a$ le pied de la hauteur AH′. Les triangles ABC, AC′B′ étant semblables, on a

$$AH : AH' = AH_a : AH'_a.$$

Donc, si l'on mène par H une parallèle à BC et par H′ une parallèle à B′C′, ces parallèles se couperont en un point P de $AK_a$. A cause des angles droits AHP, AH′P, AP est un diamètre de la circonférence AHH′ ; donc AP et la hauteur abaissée de A sur PP′ sont des lignes isogonales du triangle AHH′. Mais AH et AH′, AG et $AK_a$, sont aussi des lignes isogonales par rapport à l'angle BAC ; on en conclut que AG est la hauteur du triangle AHH′, ou que HH′ est perpendiculaire à AG et se confond avec LH.

2° BC et B′C′ étant des lignes antiparallèles par rapport à l'angle BAC, le quadrilatère BCB′C′ est inscriptible, et

$$K_aB.K_aC = K_aB'.K_aC'.$$

Donc la corde commune NN′ des cercles décrits sur BC et B′C′ comme diamètres passe par $K_a$.

---

(*) Comme on a

$$LB.LC = LH_c.LH_b = LH_a.LG,$$

la droite LH est aussi l'axe radical des circonférences décrites sur BC et sur $AM_a$ comme diamètre ; AH, LH étant deux hauteurs de triangle $ALM_a$, les droites $M_aH$ et AL sont perpendiculaires. (J. N.)

La ligne des centres de ces cercles est $M_aK_a$; car $K_a$ est le milieu de B'C', AK$_a$ étant la médiane du triangle AB'C'. On a

$$CK_a = \frac{ab^2}{b^2+c^2}, \quad BK_a = \frac{ac^2}{b^2+c^2}, \quad NK_a = N'K_a = \frac{abc}{b^2+c^2};$$

de ces valeurs, on conclut les équations des droites AN, AN' :

$$\frac{y}{z} = \frac{\sin B - \cos C}{\sin C - \cos B}, \quad \frac{y}{z} = \frac{\sin B + \cos C}{\sin C + \cos B}.$$

Le produit des deuxièmes membres étant égal à 1, les droites AN, AN' sont isogonales par rapport à l'angle BAC.

3° Les triangles ABC, AB'C' étant semblables, on a

$$\frac{AB'}{b} = \frac{AC'}{c} = \frac{A_aK_a}{AM_a} = \sqrt{\frac{K_aB \cdot K_aC}{M_aB \cdot M_aC}} = \frac{2bc}{b^2+c^2};$$

par conséquent,

$$\frac{\overline{AB'}^2 + \overline{AC'}^2}{b^2+c^2} = \frac{4b^2c^2}{(b^2+c^2)^2} \quad \text{ou} \quad \frac{4}{\overline{AB'}^2 + \overline{AC'}^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

On peut encore remarquer la relation

$$\frac{AB'}{AB} + \frac{AC'}{AC} = 2.$$

---

## QUESTIONS PROPOSÉES.

***708.** Démontrer l'identité

$$(a\cos C + z\sin A)(b\cos A + x\sin B)(c\cos B + y\sin C)$$
$$= (a\cos B + y\sin A)(b\cos C + z\sin B)(c\cos A + x\sin C),$$

$a$, $b$, $c$, A, B, C étant les côtés et les angles d'un triangle. (MANDART).

***709.** Soient P, Q deux points d'une sphère; les arcs AP, BP, CP rencontrent les côtés correspondants BC, CA, AB du triangle sphérique ABC aux points A', B', C'. On a la relation

$$\cos PQ = \cos AQ \frac{\sin PA'}{\sin AA'} + \cos BQ \frac{\sin PB'}{\sin BB'} + \cos CQ \frac{\sin PC'}{\sin C'C'}. \text{ (DÉPREZ).}$$

***710.** Étant donnés un cercle O et un point A sur sa circonférence, on décrit un cercle C par les points A, O et coupant le cercle O en D. Trouver : 1° le lieu des points de rencontre M des tangentes menées en D et en O au cercle C; 2° le lieu des points de rencontre des tangentes communes aux deux cercles; 3° l'enveloppe de la droite MC. (MANDART).

# TABLE DES MATIÈRES(*).

## ARITHMÉTIQUE; ANALYSE INDÉTERMINÉE.


Pages.

×Caractères de divisibilité; par M. E. Gelin . . . . . 65, 93
×Questions d'arithmologie . . . . . 134


## ALGÈBRE ET TRIGONOMÉTRIE.


Remarques sur un continuant; par M. E. Cesáro . . . . . 5
×Sur la somme des termes d'une progression arithmétique; par L. Collette, etc 161
×Sur quelques suites finies; par M. Verniory . . . . . 217
×Sur les coefficients binômiaux; par MM. Mandart, Cristesco, Laplace, de Longchamps . . . . . 228, 229, 251, 272
×La formule d'Ozanam ou de Snell appartient à N. de Cusa . . . . . 230
Sur une équation dont toutes les racines sont réelles (J. N.). . . . . 272
Question 519; solutions par MM. Soons, Cesáro. Note de M. Moutard 47, 160, 276
×Question 740; solution par M. Joachimescu. . . . . 55
×Question 744; solution par M. Soons . . . . . 119
×Question 753; solution par M. Emmerich . . . . . 121
×Question 755; solutions par MM. Gelin, Quint, etc. . . . . 122
Question 356; solution par M. Baudran . . . . . 141
×Question 748; solution par M. Neuberg . . . . . 207
×Question 769; solution par MM. Brocard, François, etc. . . . . 211
×Question 770; solutions par MM. Emmerich, Gelin . . . . . 212
Question 757; solution par M. Joachimescu. . . . . 233


## ×GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE.


Formules pour le jaugeage des tonneaux (P. M.) . . . . . 14
Étude sur une nouvelle transformation, dite transformation continue; par M. E. Lemoine. . . . . 50, 81, 115, 264


(*) Pour les rectifications, voir pp. 56, 74, 104, 115, 264, 286. Les articles marqués d'une croix n'exigent pour être compris que la connaissance des mathématiques élémentaires.

Pages.

Aire d'une figure microsphérique; par M. Ed. Wasteels . . . . . 105
Notes sur quelques propriétés du triangle; par M. E. Bertrand . . . . . 130
Problème de géométrie (J. M.) . . . . . 137
Sur quelques problèmes de géométrie . . . . . 157
Un piége mathématique . . . . . 161
Bibliographie relative à un théorème de Fermat. Note par M. Vigarié . 162, 274
Construction de la moyenne proportionnelle entre deux longueurs données; par MM. L. Collette, E. Catalan, E. Lemoine. . . . . 192, 250, 275
Sur les points de Brocard par Mme Prime . . . . . 194
Sur les triangles inscrits et égaux à un triangle donné; d'après Tucker . . 195
Sur les Brocardiennes d'une droite par rapport à une autre droite; par M. E. Lemoine . . . . . 252
Question 712; solution par M. Neuberg . . . . . 22
Question 745; solution par MM. Listray, François, etc. . . . . 31
Question 722; solution par MM. Listray, Déprez . . . . . 51
Question 738; solution par MM. Emmerich . . . . . 77
Question 732; solution par M. Déprez . . . . . 118
Question 759; solution par M. Sollertinsky. . . . . 123
Question 731; solution par M. Sollertinsky . . . . . 168
Question 772; solution par MM. Sollertinsky, Droz, etc. . . . . 238
Question 768; solutions par MM. Déprez, Droz, etc. . . . . 257
Question 773; solutions par MM. Sollertinsky, Droz, etc. . . . . 259
Question 725; solution par M. Listray . . . . . 278
Question 737; solution par M. Déprez . . . . . 279

COURBES ET SURFACES DU SECOND DEGRÉ; GÉOMÉTRIE PROJECTIVE.

Sur le produit des axes principaux des coniques touchant trois ou quatre droites données; par M. Molenbroeck . . . . . 33
Questions de géométrie projective . . . . . 113
Sur une propriété de la parabole; par M. d'Ocagne. . . . . 115
Théorie des plans hypercycliques des quadriques; par M. J. Gillet . 153, 180, 223
Relations métriques dans les coniques; par Cl. Servais . . . . . 177
Double et triple contact des coniques; par V. Retali . . . . . 178, 219
Cas particulier du paradoxe de Cramer; par MM. Socoloff et Neuberg . . . 193
Sur l'hyperbole de Kiepert (J. N.). . . . . 241
Sur une question de géométrie analytique; par un abonné. . . . . 246
Sur la construction des quadriques qui ont un contact du second ordre avec une surface; par M. S. Mangeot . . . . . 249
Sur trois coniques du plan du triangle; par M. E. Lemoine . . . . . 252
Question 724; solutions par MM. Déprez, Solertinsky. . . . . 26, 47, 56
Question 729; solution par M. Laisant . . . . . 27
Question 733; solutions par MM. Sollertinsky, Déprez . . . . . 28

Pages.

Question 734; solutions par MM. Déprez, Morel . . . . . 30
Question 643; solutions par MM. Lalisse, Bruyr . . . . . 49
Question 746; solution par M. Absolonne . . . . . 77
Question 762; solution par M. Sollertinsky . . . . . 127
Question 752; solutions par MM. Denys, Mandart, etc. . . . . 149
Question 742; solution par Mˡˡᵉˢ De Haas et Pompilianu, etc. . . . . 169
Question 751; solution par MM. Mandart, Quint, etc. . . . . 210
Question 763; solutions par MM. Mandart, Fraipont, etc. . . . . 235
Question 766; solutions par MM. Mandart, Quint, etc. . . . . 231
Question 743; solution par MM. Déprez et Bellens . . . . . 253
Question 747; solution par MM. Déprez, Cristesco, etc. . . . . 256

COURBES ET SURFACES D'ORDRE SUPÉRIEUR.

Sur les courbes algébriques; par M. d'Ocagne . . . . . 100
Question 739; solutions par MM. Absolonne, Morel, etc . . . . . 52
Question 346; solution par M. Brocard . . . . . 74 et supplément II
Question 750; solution par Mˡˡᵉ Pompilianu, etc. . . . . 103
Question 730; solution par M. Bellens . . . . . 144
Question 752; solutions par MM. Denys, Mandart, etc. . . . . 149
Question 756; solution par M. Quint . . . . . 170
Question 761; solution par M. Sollertinsky. . . . . 171
Question 764; solution par M. Jamet . . . . . 172
Question 735; solutions par MM. Cristesco, Absolonne, etc.. . . . . 201
Question 758; solutions par MM. Mandart, Déprez, etc. . . . . 210, 256
Question 749; solution par Mˡˡᵉ Pompilianu . . . . . 231

CALCUL DIFFÉRENTIEL; CALCUL INTÉGRAL; THÉORIE DES SÉRIES.

Sur la définition de la dérivée; par M. G. Peano. . . . . 12
Limite de la racine *même* d'une variable (P. M.) . . . . . 39
Sur l'aberration de courbure; par M. Cl. Servais . . . . . 129
Questions de licence; par M. H. Brocard. . . . . 163, 196
Sommation de quelques séries convergentes; par M. Verniory . . . . . 265
Sur la définition de la racine carrée d'un nombre non carré, d'après Crouzas . 273
Sur un théorème de Jacobi, par Mᵉ Prime . . . . . 227
Question 736; solution par M. E. Catalan . . . . . 47
Question 760; solution par M. E. Cesáro . . . . . 125
Question 741; solutions par MM. Absolonne, Wind . . . . . 146

BIBLIOGRAPHIE; BIOGRAPHIE; ETC.

Léopold Kronecker . . . . . 18, 136
G. Salmon. Géométrie analytique à 3 dimensions. . . . . 19, 168
M. Cantor. Geschichte der Mathematik. Zweiter Band . . . . . 19

Pages.

Annuaire du bureau des longitudes pour 1892 . . . . . 20
G. Monchamp. Galilée et la Belgique . . . . . 21
E. Rouché et de Comberousse. Traité de Géométrie (P. M.). 21 et supplément I
A. Poulain. Géométrie du triangle (J. N.) . . . . . 42
V. Lac de Bosredon. Méthode nouvelle pour réduire l'équation d'une conique (J. N.) . . . . . 43
Emmerich. Die Brocard'schen Gebilde (J. N.) . . . . . 44
E. Lucas. Récréations mathématiques. Tome I . . . . . 45
Louis-Philippe Gilbert . . . . . 49
Notre supplément . . . . . 74
W. J. Mc Clelland. A Treatise on the Geometry of the Circle (J. N.) . . 75
A. Cambier. Éléments de Géométrie trilinéaire (J.N.) . . . . . 115
H. Postula. Géométrie pour les écoles industrielles (J. N.) . . . . . 116
Ch. Bioche. Introduction à l'étude de la géométrie moderne (J. N.) . . . 117
E. Mosnat. Problèmes de géométrie analytique (J. N.) . . . . . 138
Massau. Cours de mécanique (1er fascicule). (J. T.) . . . . . 139
E. Lucas. Théorie des nombres. Tome I. . . . . 165
A. Mineur. Arithmétique. Trigonométrie. Géométrie analytique, etc. . . . 166
R. Levett et C. Davison. Plane Trigonometry (P. M.) . . . . . 167
J. Carnoy. Cours d'Algèbre supérieure (P. M.) . . . . . 198
G. Teixeira. Curso de Analyse infinitesimal (P. M.) . . . . . 200
C. A. Laisant et E. Perrin. Premiers principes d'algèbre (J. N.) . . . . 225
J. G. Hagen. Synopsis der höheren Mathematik (P. M.). . . . supplément III
C.-A. Laisant. Problèmes de géométrie analytique plane, etc.. . . . . 271
A. Urbain. Décomposition en facteurs des quantités algébriques . . . . 271

## QUESTIONS D'EXAMENS.

Questions 514-515, 516-517, 518-520, 521, 522-526, 527-532, 533, 534-540, p. 31, 56, 79, 93, 127, 174, 239, 262
École polytechnique de Paris. Concours de 1892 . . . . . 151
Solution de la question de géométrie analytiqne posée au concours général de Belgique, en 1892, par un abonné . . . . . 246

## SUPPLÉMENT.

I. Traité de géométrie, par E. Rouché et de Comberousse (Sixième édition). Bibliographie (P. M.). . . . . 1-12
II. Le trifolium; par H. Brocard . . . . . 1-58
III. Synopsis der höheren Mathematik, von J. G. Hagen. Bibliographie (P. M.). 1-8

QUESTIONS(*).

| | POSÉE (1) I ou (2) I | RÉSOL. (2) II |
|---|---|---|
| 17 | 30 (28) | |
| 95 | 206 (28) | |
| | (1) III ou (2) I | |
| 252 | 143 (28) | |
| 267 | 175 (28) | |
| | (1) IV ou (2) I | |
| ×333 | 119 (29) | |
| ×346 | 143 | 74 |
| 353 | 159 | R |
| ×356 | 159 | 141 |
| ×357 | 159 | R |
| 383 | 231 (29) | |
| 387, 2e p. | 231 (29) | |
| | (1) V ou (2) I | |
| 411 | 23 (29) | |
| 415 | 46 | |
| | (1) VI ou (2) I | |
| 505, 2e p. | 23 (30) | |
| ×513 | 71 (30) | |
| 519 | 119 (30) | |
| | 47, 160, 276 | |
| | (1) VII ou (2) I | |
| ×571 | 126 (30) | R |
| 594 | 264 (31) | |
| 597 | 280 | R |
| 598 | 280 (31) | |
| | (1) VIII ou (2) I | |
| ×634 | 279 | R |
| ×635 | 279 (31) | |
| | (1) IX ou (2) I | |
| 643 | 88 | 49 |
| | (1) X ou (2) I | |
| ×677 | 72 | R |
| 680 | 72 | 5 |
| ×681 | 95 | R |
| 699 | 279 | R |

| | POSÉE (2) | RÉSOL. (2) II |
|---|---|---|
| ×712 | 103 | 22, 56 |
| ×724 | 128 | 26, 47, 56 |
| ×725 | 152 | 278 |
| ×727 | 152 | 51 |
| 728 | 152 | 77 |
| 729 | 176 | 27, 47 |
| 730 | 176 | 144 |
| ×731 | 176 | 168 |
| ×732 | 176 | 118 |
| 733 | 215 | 28 |
| 734 | 216 | 30 |
| 735 | 216 | 201 |
| 736 | 216 | 47 |
| ×737 | 216 | 279 |
| 739 | 240 | 52 |
| ×740 | 240 | 55 |
| 741 | 240 | 146 |
| 742 | 240 | 169 |
| 743 | 263 | 253 |
| 744 | 264 | 119 |
| ×745 | 264 | 31, 47 |
| 746 | 264 | 78 |
| 747 | 281 | 256 |
| ×748 | 281 | 207 |
| 749 | 281 | 231 |
| 750 | 281 | 103 |
| | (2) II | |
| 751 | 32 | 210 |
| 752 | 32, 56 | 149 |
| ×753 | 32 | 121 |
| 754 | 32 | R |
| ×755 | 56, 104 | 122 |
| 756 | 56 | 170 |
| ×757 | 56 | 233 |
| 758 | 56 | 210, 256 |
| ×759 | 80 | 123 |
| 760 | 80 | 125 |
| 761 | 80 | 171 |
| 762 | 80 | 127 |

| | POSÉE (2) II | RÉSOL. (2) II |
|---|---|---|
| 763 | 104 | 235 |
| 764 | 104 | 172 |
| 765 | 104 | |
| 766 | 104 | 236 |
| 767 | 128 | R |
| ×768 | 128 | 257 |
| ×769 | 128 | 211 |
| ×770 | 128 | 212 |
| 771 | 152 | R |
| ×772 | 152 | 238 |
| ×773 | 152 | 259 |
| ×774 | 152 | R |
| ×775 | 176 | |
| 776 | 176 | R |
| 777 | 176 | R |
| 778 | 176 | |
| 779 | 215 | R |
| 780 | 215 | R |
| 781 | 215 | R |
| 782 | 215 | |
| ×783 | 216 | |
| 784 | 216 | R |
| 785 | 216 | |
| ×786 | 216 | R |
| ×787 | 216 | R |
| ×788 | 240 | R |
| ×789 | 240 | |
| 790 | 240 | R |
| 791 | 240 | R |
| 792 | 240 | R |
| ×793 | 263 | R |
| ×794 | 264 | |
| 795 | 264 | R |
| ×796 | 264 | R |
| 797 | 264 | R |
| ×798 | 281 | |
| ×799 | 281 | |
| 800 | 281 | |

**Rectifications** : p. 75, ligne 3 en remontant : lire podaire au lieu de polaire; p. 162, ligne 3 en remontant : lire Azarelli au lieu de Azaeltis; p. 251, ligne 6 de la Note 17. Lire $D^n\varpi^{2n}$ au lieu de $d^n\varpi^{1n}$. Page 240. L'auteur de la question 790 est M. Catalan.

T. IX, p. 7, exercice 8, lire les droites NY, XP au lieu de MP, NQP. 24, exercice 4, lire : sont inversement proportionnelles à $a^2$, $b^2$, $c^2$, au lieu de sont proportionnelles etc.

Ces erreurs nous ont été signalées par Me Prime.

(*) La rédaction de *Mathesis* a en portefeuille de bonnes solutions des questions marquées de la lettre R; elle engage ses collaborateurs à porter de préférence leurs efforts sur les autres questions.

# TABLE DES NOMS.


Absolonne, 78, 146, 174, 204, 211, 235, 255.
Alberti, 20.
Andrea, 162.
Argand, 198.
Aronhold, 200.
Aubert, 80, 124.
Ball, 161.
Bamberg, 20.
Barbarin, 154.
Baudran, 141.
Beaulieu, 33.
Beco, 122.
Bellens, 144, 169, 235, 239.
Bérard, 33.
Bergmans, 231.
Bertrand (E.), 130, 252.
Bertrand (J.), 162.
Bézout, 199.
Bioche, 117.
Bobillier, 75.
Bordage, 250, 275.
Bossert, 20.
Bouquet de la Grye, 20.
Bourget, 96.
Bŏzoky (de), 174, 235, 238.
Bradwardin, 20.
Brasseur, 271.
Brocard, 32, 44, 63, 74, 76, 78, 104, 163, 172, 194, 196, 206, 210, 211, 215, 245, 256, 257.
Cambier, 31, 115, 240, 246, 263.
Campanus, 20.
Cantor, 19, 231.
Cardan, 20.
Carnoy, 198.
Casey, 42, 75, 133.
Catalan, 27, 133, 137, 162, 170, 250, 264, 273, 275.
Cauchy, 199.
Cayley, 200.
Cesáro (E.), 1, 80, 125, 127, 128, 141, 152, 160, 176.
Chasles, 62, 190.
Chemin, 19, 168.
Choquet, 199.
Chuquet, 20.
Clebsch, 200.
Collette, 161, 192.
Collignon, 242.
Comberousse ( e), 17, 21, 42, 117.
Copernic, 20, 21.
Cornu, 20.
Cramer, 193.
Crelle, 18, 274.
Cremona, 117.
Cristesco, 31, 103, 146, 202, 229, 256.
Crouzas, 273.
Cusa (de), 20, 230.
Dauge, 166.
Davison, 167.
Decamps, 30, 31, 103, 123, 211, 256, 263.
De Gelder, 70.
Delahaye, 157, 231.
Denifle, 19.
De Meyst, 271.
Denys, 122, 123, 149, 172, 210, 211, 235, 236, 239.
Déprez, 28, 30, 78, 79, 103, 118, 123, 124, 171, 172, 176, 201, 231, 232, 235, 238, 239, 240, 254, 256, 257, 280, 281.
Desboves, 162.
Descartes, 199.
Dippe, 274.
Droz, 103, 149, 235, 237, 239, 258, 260.
Duhamel, 40, 200.
Dürer, 20.
Emmerich, 25, 44, 77, 121, 211, 212, 235, 239, 260.
Euler, 199.
Euclide, 20.
Fabry, 274.
Fagnano, 162.
Farjon, 152, 259.
Faure, 33.
Fermat, 162, 166, 169, 274.
Feuerbach, 75, 241.
Fraipont, 122, 231, 235.
Franchini, 162.
François, 31, 211, 215.
Fuhrmann, 115.
Fuss, 274.
Galilée, 21.
Gallegari, 162.
Gauss, 33.
Gelin (E.), 65, 93, 122, 211, 213.
Genese, 78.
Gergonne, 63, 163.
Ghuys, 174.
Gilbert, 57, 154, 186.
Gillet, 153, 180, 223, 236.
Gob, 246.
Gordan, 200.
Goulard, 175.
Gouzy, 275.
Gräfe, 199.
Greenstreet, 146, 169, 264.
Grunert, 274.
Grüson, 274.
Guldin, 22.
Haas (de), 169.
Hain, 274.
Hart, 75.
Heinen, 274.
Horner, 199.
Hilbert, 200.
Jacobi, 227.
Jamet, 80, 125, 172, 254.
Janssen, 20.
Joachimescu, 103, 146, 169, 231, 233, 256.
Jordan, 200.
Keelhoff, 144.
Kiepert, 127, 241.
Klügel, 274.
Knops, 271.
Kronecker, 18, 136.
Kummer, 136.
Lac de Bosredon, 43.
Lagrange, 199, 201, 251.
Laguerre, 61.
Laisant, 27, 76, 103, 225, 264, 271.
Lalbalettrier, 42.
Lampe, 137, 230.

Langley, 152.
Laplace, 272.
Laurens, 231.
Lebon, 162.
Lefébure, 198.
Lefèvre, 20.
Lehmus, 274.
Lemoine (E.), 45, 58, 63, 77, 81, 115, 216, 235, 241, 252, 264, 275, 276.
Léonard de Pise, 19.
Léonard de Vinci, 20.
Le Paige, 273.
Levett, 167.
Lhuilier, 163.
Lindelöff, 162, 275.
Lindemann, 274.
Liouville, 129.
Lipschitz, 200.
Listray, 31, 78, 122, 124, 169, 235, 278.
Loir, 69.
Loewy, 20.
Longchamps (de), 28, 122, 172, 272.
Lucas (Ed.), 45, 61, 141, 161, 165, 176, 216, 264.
Mc Cay, 45.
Mc Clelland, 75.
Mc Laurin, 172.
Main, 62.
Mandart, 31, 79, 80, 103, 122, 124, 149, 171, 174, 176, 210, 211, 228, 231, 235, 236, 237, 240, 241, 255, 256, 263, 281.
Mangeot, 249.
Mannheim, 75, 103, 104, 235.
Mansion, 17, 18, 22, 167, 200, 201.
Massau, 139, 249.
Mathiessen, 199.
Messent, 139.
Meurice, 26.
Miller, 152, 238.
Mineur, 166.
Mister, 138, 246, 251.
Molenbroeck, 33.
Mollweide, 33.
Monchamps, 20.
Moore, 32, 121.
Morel (Creusot), 31, 207, 215, 235.
Morel (A.), 96.
Mosnat, 138.
Mouchez, 20.
Moutard, 276.
Nagel, 132.
Nemorarius, 19.
Neuberg, 18, 22, 26, 28, 42, 44, 45, 62, 76, 104, 116, 117, 120, 128, 132, 145, 146, 172, 194, 196, 202, 209, 212, 215, 216, 223, 226, 240, 241, 254, 260, 271, 272, 274.
Newton, 199.
Niewenglowski, 168.
Novarese, 5.
Ocagne (d'), 100, 115, 172.
Oresme, 20.
Oughtred, 17.
Ozanam, 167, 230.
Paciulo, 20.
Paris, 20.
Pascal, 125.
Peano, 12, 162, 200.
Perrin, 225.
Pfaff, 33.
Plücker, 33, 155, 192.
Polack, 236.
Pompilianu, 103, 169, 232, 256.
Poncelet, 178.
Postula, 116.
Poulain, 42, 62.
Prime, 194, 227.
Purbach, 20.
Quint, 122, 170, 174, 210, 235, 236, 237.
Regiomontanus, 20.
Retali, 178, 219.
Riccati, 162.
Richardson, 207.
Riese, 20.
Roberval, 140.
Rocquigny (de), 134, 136.
Rolle, 199.
Rouché, 17, 21, 42, 117, 199.
Rudolff, 20.
Rupp, 153.
Sacrobosco, 20.
Salmon, 19, 129, 168, 200.
Sarrau, 20.
Savary, 140.
Saxo, 19.
Schaertlin, 162.
Schoute, 119, 172.
Schröter, 187.
Serret (A.), 162, 199, 200.
Serret (P.), 33.
Servais, 129, 177, 215, 216.
Simpson, 17, 274.
Simson, 118.
Snel, 167, 230.
Socoloff, 193, 252.
Sollertinsky, 28, 32, 104, 114, 118, 124, 127, 128, 149, 168, 171, 236, 239, 257, 259, 278, 279
Soons, 119.
Steiner, 24, 33, 162, 178, 191, 274.
Stévart, 21.
Stifel, 20.
Stirling, 199.
Sturm (Ch.), 163, 199, 200,
Sturm (R.), 162.
Sylvester, 199.
Tannery (J.), 140.
Tartaglia, 20.
Tate, 216.
Taylor (Brook), 139, 201.
Taylor, 133.
Tchirnhausen, 199.
Tédenat, 163.
Teixeira, 200.
Tisserand, 20.
Tomassino, 162.
Transon, 153.
Trevise, 20
Tucker, 45, 76, 195, 216.
Urbain, 271.
Vandermonde, 141.
Van Dorsten, 70.
Van Moerbecke, 20.
Van Velden, 21.
Verhelst, 31, 112, 211.
Verniory, 217, 265.
Vigarié, 42, 274.
Viviani, 211, 274.
Vladimirescu, 146, 236, 256.
Vuibert, 31, 32, 93, 128, 274, 281.
Wallis, 199.
Wasteels, 105.
Weierstrass, 201.
Weill, 76.
Wetzig, 274.
Widmann, 20.
Wilson, 166, 199.
Wind, 148.

# BIBLIOGRAPHIE

TRAITÉ DE GÉOMÉTRIE, par E. ROUCHÉ, professeur au Conservatoire des Arts et Métiers, examinateur de sortie à l'École Polytechnique, et CH. DE COMBEROUSSE, professeur au Conservatoire des Arts et Métiers et à l'École Centrale. Conforme aux Programmes officiels, renfermant un très grand nombre d'Exercices et plusieurs Appendices consacrés à l'exposition des principales Méthodes de la Géométrie moderne. Sixième édition, revue et augmentée. Première partie : *Géométrie plane.* Deuxième partie : *Géométrie dans l'espace.* — Paris, Gauthier-Villars et fils, imprimeurs-libraires de l'École Polytechnique, du Bureau des Longitudes, Quai des Grands-Augustins, 55. 1891 (XXXV-499 pages et XIX-616 pages in-8°; en tout 1169 pages.)

La première édition du livre de MM. Rouché et de Comberousse a été publiée en 1866 sous le titre : *Traité de géométrie élémentaire* (XXIII-776 pages). La sixième édition, plus étendue de moitié (elle contient 370 pages de plus), a paru vingt-cinq ans après, en 1891, sous le titre : *Traité de géométrie*, sans le mot *élémentaire* qui ne convient plus à un ouvrage où la géométrie supérieure, dans le sens de Chasles, tient une place considérable. Ce succès rapide d'un livre qui n'est destiné qu'aux professeurs et aux élèves d'élite de l'enseignement moyen ou secondaire suffit à lui seul pour en attester le mérite. Quand on en compare les éditions successives, on s'explique aisément le succès de ce Traité : les auteurs l'ont sans cesse amélioré et complété de manière à le tenir au courant des progrès de la Science et de l'Enseignement.

Nous allons faire une analyse critique de la sixième édition en signalant spécialement les additions introduites depuis la première.

OBJET DU TRAITÉ. MM. Rouché et de Comberouse ont caractérisé l'esprit de leur Traité de la manière suivante : " Il y a deux

manières d'écrire un livre destiné aux études : on peut se restreindre aux *Programmes officiels* et n'en pas franchir le cadre; on peut aussi, en suivant strictement ces Programmes dans ce qu'ils ont d'obligatoire, aller au delà et essayer de les compléter. Pour appliquer une science, il ne suffit pas d'en connaître quelques parties : il faut être familiarisé avec toutes ses méthodes, en saisir l'ensemble. Les magnifiques découvertes de la Géométrie moderne n'ont pas pénétré dans l'enseignement; délaissées par les Programmes, elles n'occupent pas dans la série des études mathématiques la place qui leur est due; on en parle à peine et accessoirement en Géométrie analytique, où elles semblent bien à tort une nouvelle conquête de l'admirable instrument créé par Descartes. Nous sommes loin de reprocher aux Programmes leur silence à cet égard; ils sont tellement chargés, qu'on serait mal venu à réclamer une addition. Mais ne peut-on *apprendre* un programme d'examen et essayer en même temps de *comprendre* la portée de la science que l'on étudie, en prenant une connaissance rapide, une vue générale de ses principales méthodes? » Telle est la pensée qui a guidé MM. Rouché et de Comberousse dans la composition de leur Traité. Les parties imprimées en grand texte contiennent les *Éléments* proprement dits; les compléments, en petit texte, sont consacrés à d'utiles développements destinés aux candidats aux écoles spéciales; les appendices et les notes renferment des études approfondies sur des points spéciaux, et l'exposé des méthodes de la Géométrie moderne.

Histoire de la géométrie. La Préface renferme une histoire succincte, mais très intéressante, des principaux progrès de la géométrie depuis Thalès jusqu'à Chasles. Cette esquisse, qui tenait en huit pages en 1866, en contient plus du double aujourd'hui et sera lue avec plaisir par les maîtres et les élèves. Peut-être les auteurs ont-ils accordé trop de confiance à l'*Aperçu historique* de Chasles, qui lui-même, dans ce Mémoire célèbre, avait suivi trop servilement Montucla. L'histoire des Mathématiques a fait depuis un demi-siècle des progrès dont MM. Rouché et de Comberousse doivent tenir compte davantage dans une future édition. Ainsi, parmi les géomètres anciens, il faudrait citer Hippocrate de Chios et surtout Eudoxe; l'histoire des coniques devrait être corrigée d'après les travaux de Zeuthen. Archimède n'a pas une seule méthode de quadrature, celle d'exhaustion ou des séries; il en a une seconde, par sommation d'infiniment petits : il évite, bien entendu, ce terme dangereux.

Ce sont les Indous et non les Arabes qui ont introduit, en Trigonométrie, les sinus au lieu des cordes; la méthode cinématique pour construire les tangentes remonte jusque Archimède. Dans l'histoire de la géométrie moderne, il nous semble qu'il faudrait dire nettement que Fermat est au même titre que Descartes l'inventeur de la géométrie analytique, et que le vrai créateur de la géométrie supérieure, c'est Poncelet, comme Salmon le fait remarquer dans ses *Coniques*.

**Géométrie plane** (1). Livre premier. *La ligne droite.* Angles; triangles; perpendiculaires et obliques; parallèles; somme des angles d'un polygone; parallélogramme.

Dans la première édition, l'exposé de ces principes élémentaires était faite à peu près comme dans l'édition que Blanchet a donnée des éléments de Legendre. Depuis plusieurs éditions déjà, MM. Rouché et de Comberousse en sont revenus, sur un point essentiel, à la tradition d'Euclide. Ils ramènent à des propositions antérieures la démonstration de celle-ci : *La ligne droite est plus courte que toute ligne brisée ayant les mêmes extrémités.* Nous sommes persuadé qu'ils n'en resteront pas là et qu'ils seront amenés, comme le grand géomètre grec, à ne plus indiquer de constructions qui ne puissent être effectuées d'après des postulats fondamentaux ou des théorèmes antérieurs.

Livre II. *La circonférence de cercle.* Arcs et cordes; tangentes au cercle; cercles tangents et sécants; mesure des angles; construction des angles et des triangles; tracé des parallèles et des perpendiculaires; problèmes sur les tangentes.

La principale amélioration introduite ici est d'ordre pédagogique: la théorie générale de la mesure des grandeurs est rejetée dans la note 1, à la fin de la géométrie plane. On peut aller plus loin dans cette voie. Dans les *éléments,* on n'a pas besoin du théorème: *deux angles au centre sont entre eux comme les arcs qu'ils interceptent.* Il suffit de savoir qu'à des angles égaux correspondent des arcs égaux et réciproquement; qu'à un angle égal à la somme des deux autres correspond un arc égal à la somme des arcs correspondant à ses parties. Autrement dit, le théorème du n° 125 rend inutile celui du n° 126 et ses corollaires.

(1) Dans une introduction qui précède la géométrie plane, on trouve les premières définitions générales indispensables, espace, surface, ligne, point droite, plan, et quelques notions de logique générale (théorème, réciproque etc.), sans aucun appareil philosophique.

APPENDICE I. *Méthodes de résolution des problèmes* (16 pages en petit texte). Méthodes des substitutions successives : synthèse et analyse (dans le sens de Duhamel) ; méthode par intersection de lieux géométriques ; constructions auxiliaires : translation, renversement ; centre instantané de rotation.

L'étendue de cet appendice est plus que doublée depuis la première édition. Toute la partie utilisable du livre excellent, mais trop long, de Petersen : *Méthodes et théories pour la résolution des problèmes,* a passé dans ce précieux appendice. Le nombre des lieux géométriques simples qui peuvent servir dès maintenant à résoudre des problèmes est plus grand que chez Petersen.

Dans la première édition, MM. Rouché et de Comberousse parlaient ici de la *méthode de réduction à l'absurde,* qui est d'ailleurs employée souvent dans les deux premiers livres. Selon nous, il faudrait rétablir ce passage supprimé, en le rapprochant de ce qui est dit de l'analyse et de la synthèse, et faire connaître à ce propos la vraie *analyse des anciens,* qui, beaucoup plus que celle des modernes, est une méthode d'invention, et que les traités modernes ignorent complètement.

Les anciens et les modernes appellent *synthèse* la méthode où l'on passe d'une proposition A à une proposition E, par *déduction :* De A on déduit B, de B on déduit C, de C on déduit D, de D on déduit E. Les modernes, depuis Duhamel, au moins, appellent *analyse* la méthode inverse par *réduction :* On prouve que la proposition E est vraie si la proposition D est établie ; on ramène de même D à C, C à B, B à A. L'analyse, dans ce sens, est une *synthèse à rebours.*

Tout autre est l'*analyse pratiquée par les anciens.* Pour établir une proposition E dont on soupçonne la vérité, on procède uniquement par *déduction.* On la suppose vraie, et l'on en déduit légitimement une série de conséquences M, N, P, Q, R. Deux cas peuvent se présenter : ou bien R est faux ; dans ce cas, il en est de même de E ; c'est la *méthode de réduction à l'absurde.* Ou bien R est vrai ; dans ce cas, on essaye, par une *synthèse* qui suit l'analyse, de déduire E de R, soit par l'intermédiaire des propositions Q, P, N, M, soit par ces propositions et un certain nombre de propositions voisines. Cette analyse des anciens a un caractère plus expérimental que la synthèse à rebours ou analyse des modernes ; elle a plus d'élasticité, elle laisse plus de liberté à celui qui cherche la démonstration d'un théorème. La synthèse qui complète chaque analyse entendue à la manière des anciens

est évidemment indispensable, contrairement à une assertion de Pappus, puisque la série de propositions EMNPQR n'est pas toujours réversible.

Livre III. *Les figures semblables.* Lignes proportionnelles sur deux droites et dans le cercle; similitude des polygones; relations métriques dans le triangle; problèmes sur les lignes proportionnelles; polygones réguliers; mesure de la circonférence.

Dans ce livre, il n'y a guère que des additions et des modifications de détail, assez nombreuses, il est vrai. Citons l'introduction du théorème de Stewart, la construction des expressions algébriques quand elle peut se faire au moyen de la règle et du compas, une analyse complète des problèmes relatifs au contact des cercles, et une étude, due à M. Rouché, du degré d'approximation auquel conduit la méthode des isopérimètres dans le calcul du rapport de la circonférence au diamètre.

Appendice II. *Introduction à la géométrie supérieure.* (106 pages en petit texte.) Principe des signes; transversales; rapport anharmonique; triangles homologiques; rapport harmonique; pôle et polaire dans le cercle et méthode des polaires réciproques; figures homothétiques; axes radicaux; involution; inversion et inverseurs; transformation par semi-droites réciproques, cycles.

L'étendue de cet appendice est plus que doublée depuis la première édition. Il est impossible et il serait fastidieux d'indiquer toutes les additions qui y ont été introduites depuis 1866. Les diverses méthodes déjà exposées alors dans le Traité, le sont ici avec plus d'ampleur et avec des applications plus nombreuses, par exemple, la théorie des figures homothétiques et de l'inversion; d'autres sont introduites ici à leur vraie place naturelle, comme celle de l'involution et des faisceaux de cercles. La transformation par semi-droites réciproques, due à un géomètre profond trop tôt enlevé à la science, Laguerre, a été rédigée par l'inventeur lui-même; elle se trouvait déjà dans l'édition précédente. Parmi les applications nouvelles ou traitées plus complètement qu'autrefois, nous citerons la théorie des inverseurs de Peaucellier, Hart, etc.; le théorème de Casey sur le cercle tangent à quatre autres; le problème d'Apollonius (cercle tangent à trois cercles donnés), et sa généralisation (cercle coupant trois cercles sous des angles donnés); les propriétés du cercle des neuf points; le problème de Castillon (inscrire dans un cercle donné un polygone dont chaque côté passe par un

point donné), d'après Petersen ; le problème de Malfatti (décrire trois cercles tangents l'un à l'autre et inscrits respectivement dans chacun des angles d'un triangle).

Livre IV. *Les aires.* Mesure des aires des polygones ; comparaison des aires ; aire du polygone régulier et du cercle ; problèmes sur les aires.

Ce livre n'a pas changé depuis la première édition.

Appendice III. *Valeur approchée des aires ; différence entre un arc et sa corde ; maximums et minimums des figures planes.* Les deux premières questions n'étaient pas traitées dans la première édition. MM. Rouché et de Comberousse font connaître deux formules approchées pour les aires : celle de Simpson avec la démonstration que nous en avons donnée en 1881, laquelle permet d'évaluer l'erreur commise ; puis celle de Poncelet. Dans une prochaine édition, ils devraient introduire la formule de Parmentier, meilleure que celle de Poncelet, d'après ce grand géomètre lui-même et d'un usage tout aussi facile ; puis la formule des trapèzes à propos de laquelle nous avons établi le curieux théorème suivant : Une aire limitée par une courbe à concavité toujours tournée dans le même sens, par une base rectiligne et par deux ordonnées extrêmes perpendiculaires, est comprise entre l'aire d'un polygone inscrit dont les sommets ont des ordonnées équidistantes et celle de ce polygone où l'on remplace le premier et le dernier côté par des parallèles à la base passant par le second et l'avant-dernier sommet.

La question des isopérimètres est traitée, depuis la première édition, d'après le texte français d'un Mémoire célèbre de Steiner. Ne faudrait-il pas tenir compte des corrections introduites, d'après les manuscrits du grand géomètre, dans le texte allemand de ses *Œuvres complètes?* Les travaux récents sur la question dus à M. H. A. Schwarz et à d'autres géomètres, et où ils emploient toutes les ressources du calcul des variations, semblent prouver qu'elle est plus difficile qu'elle ne paraît au premier abord.

*Questions proposées sur la géométrie plane.* Liste de 530 questions classées par livres et paragraphes. La première édition en contenait un peu davantage (593) : plusieurs des questions omises ont passé dans le texte.

Note I. *Mesure des grandeurs* (9 pages). Cette note est le développement de quelques pages qui, dans la première édition, étaient disséminées dans les livres précédents. Nous pensons que, dans les futures éditions de leur livre, les auteurs seront peu à peu amenés à exposer une théorie des incommensurables

plus arithmétique encore que celle qui est donnée dans l'édition actuelle.

Note II. *Sur l'impossibilité de la quadrature du cercle* (8 pages). Cette note, qui a paru déjà dans la précédente édition, est le résumé simplifié de la démonstration que Lindemann a déduite, en 1882, des profondes recherches de Hermite sur la fonction exponentielle (1874). Il a prouvé que *le nombre π n'est racine d'aucune équation algébrique.*

Note III. *Sur la géométrie récente du triangle* (61 pages). Cette note, avec le travail analogue sur le tétraèdre, est l'addition la plus considérable introduite dans la sixième édition. L'une et l'autre ont été rédigées par M. Neuberg, le géomètre qui, avec MM. Lemoine et Brocard, a le plus contribué aux progrès de la géométrie récente. Voici le sommaire des matières abordées dans la note relative au triangle :

Coordonnées normales et coordonnées barycentriques ; points complémentaires et anticomplémentaires ; droite et points harmoniquement associés à un point ; points et transversales réciproques, points inverses, droites isogonales ; triangles orthologiques ; métapôles de deux triangles; triangles métaharmoniques; symédianes et points de Lemoine ; cercle, points, triangles de Brocard ; point de Gergonne ; point de Nagel ; figures semblablement variables ; cercles remarquables ; questions proposées (56).

La géométrie récente, dont on trouve les premiers linéaments chez Euler et chez Steiner, touche à la fois à la géométrie élémentaire et à la théorie des coniques. Dans une prochaine édition, nous ne doutons pas que la géométrie récente des coniques ne trouve aussi une place dans le *Traité de Géométrie.*

**Géométrie dans l'espace.** Livre V. *Le plan.* Premières notions sur le plan ; droites et plans parallèles ; droites et plans perpendiculaires; angle d'une droite et d'un plan et plus courte distance de deux droites ; angles dièdres ; plans perpendiculaires ; angles polyèdres.

Comme on le voit, la théorie du parallélisme précède celle de la perpendicularité. Dans la première édition de leur géométrie, MM. Rouché et de Comberousse avaient conservé à peu près l'ordre traditionnel des *Éléments* de Legendre. On peut regretter qu'ils l'aient abandonné ; car, comme le remarque M. De Tilly dans son *Essai sur les principes fondamentaux de la Géométrie et de la Mécanique,* il est plus scientifique d'établir d'abord, en géométrie solide aussi bien qu'en géométrie plane, les propositions qui ne dépendent pas du postulat de la parallèle unique.

Au n° 577, 3°, on pourrait introduire avec avantage une démonstration directe (due à M. Catalan) de l'égalité des dièdres d'un trièdre ayant des faces égales.

Appendice IV. *Quadrilatère gauche ; perspective* (9 pages). Les premiers principes de perspective et la notion de droite de l'infini introduites ici manquaient dans la première édition.

Livre VI. *Les polyèdres.* Propriétés, aire et volume du prisme et de la pyramide; figures symétriques; polyèdres semblables.

Peu de changements. Dans la sixième édition, les auteurs sont revenus à la démonstration ancienne pour le prisme triangulaire tronqué obliquement. Nous leur signalons une démonstration de Halsted *(Mathesis*, 1885, V, pp. 9-10), plus simple que la leur pour le volume du solide à faces opposées parallèles et à faces latérales triangulaires.

Appendice V. *Propriétés générales des polyèdres ; centre de gravité ; propriétés projectives ; figures homologiques* (32 pages). La partie de cet appendice relative aux propriétés projectives des figures et à l'homologie ne se trouvait pas dans la première édition. Le célèbre théorème $F + S = A + 2$ est toujours attribué à Euler. M. de Jonquières a prouvé péremptoirement qu'il appartient à Descartes, comme Baltzer l'avait déjà fait remarquer en 1862.

Livre VII. *Les corps ronds.* Cylindre; cône; premières notions sur la sphère; propriétés des triangles sphériques : aire de la sphère; volume de la sphère; généralités sur les surfaces.

Il n'y a guère ici en fait d'addition que la propriété fondamentale du plan tangent aux surfaces gauches. La théorie des triangles sphériques, autrefois placée après le volume de la sphère, a été déplacée; la démonstration de la propriété du grand cercle d'être le plus court chemin sur la sphère a été changée.

Selon nous, ce livre est celui où il y aurait le plus de modifications à introduire. A propos de la solution du problème : *trouver le rayon d'une sphère solide,* il y aurait lieu d'introduire les principes *généraux* relatifs aux constructions de ce genre, dus à Pappus et à M. De Tilly *(Annales de la Société scientifique de Bruxelles,* t. IX, 1885-1886, ou *Mathesis,* 1885, t. V, supplément III, pp. 21-30). Ils s'appliquent à d'autres surfaces que la sphère.

La démonstration du théorème relatif à l'arc de grand cercle comme plus court chemin est insuffisante aussi bien dans la première édition que dans la sixième. Nous avons signalé les

difficultés que présente cette question et la question plus générale de la longueur des lignes courbes non planes dans *Mathesis* (1888, t. VIII, pp. 262-264; 1889, t. IX, pp. 112-116, 212-214) et nous y renvoyons le lecteur. Nous ajouterons qu'au point de vue géométrique pur, ces difficultés disparaissent ou sont considérablement réduites, quand on prend la définition suivante proposée par M. Peano (1): *La longueur d'une courbe est la limite supérieure, dans le sens de Weierstrass, des polygones inscrits dans la courbe.* Une autre théorie à modifier complètement, non seulement dans le *Traité de géométrie* de MM. Rouché et de Comberousse, mais aussi dans presque tous les manuels de géométrie descriptive, est celle du plan tangent aux surfaces. On sait qu'il existe des courbes continues qui n'ont de tangentes en aucun de leurs points; il est facile d'imaginer des surfaces qui n'aient pas non plus de plan tangent, en aucun de leurs points, par exemple, les cylindres et les cônes ayant pour directrices les lignes dont il vient d'être question. *Il est donc impossible d'établir d'une manière générale l'existence du plan tangent dans les surfaces continues.* Aussi, toutes les démonstrations proposées pour ce théorème contiennent-elles quelque paralogisme ou quelque postulat caché: celle de MM. Rouché et de Comberousse suppose implicitement que, sur toute surface, on puisse trouver, en chaque point, une courbe continue, lieu des points de contact de tangentes parallèles, à des courbes de la surface situées dans des plans parallèles. La vraie méthode pour établir l'existence du plan tangent, c'est de procéder en géométrie comme en analyse: il suffit de démontrer la chose successivement pour chaque espèce de surface considérée: surfaces réglées, surfaces de révolution, etc., en prenant pour point de départ explicite l'existence de la tangente aux courbes directrices. C'est ainsi qu'a procédé M. Goedseels, dans une *Théorie des surfaces réglées* (Louvain, Fonteyn, 1885), dont la partie essentielle pourrait être introduite utilement dans les nos 884, 889 du *Traité de géométrie* (voir aussi *Mathesis,* 1883, t. III, pp. 49-54).

(1) C'est ce géomètre aussi qui a résolu le premier les difficultés plus grandes encore que présente la question de l'aire des surfaces. (Voir une note publiée par lui, le 19 janvier 1890, à l'Académie royale des *Nuovi Lincei.)* Soit dit en passant, nous croyons, conformément à l'avis de M. Catalan, et contrairement à celui des auteurs du Traité (n° 739, p. 140 du tome II de la sixième édition, ou n° 740, p. 470 de la première édition), que le volume, tout comme la surface d'un cylindre, *doit être défini.* Nous pourrions faire des observations analogues sur les aires des courbes planes.

Appendice VI. *Théorème de Guldin ; la sphère est maxima parmi les corps de même aire ; théorie des polyèdres réguliers ; figures homothétiques ; pôle et plan polaire ; plan radical de deux sphères ; inversion ; géométrie sphérique* (61 pages).

La plupart des questions abordées ici, sauf la théorie des figures homologiques, se trouvent déjà dans la première édition; mais diverses additions ont été introduites dans plusieurs paragraphes.

Ne pourrait-on pas ajouter ici un paragraphe consacré aux polyèdres semi-réguliers d'Archimède et de Képler, si bien étudiés par M. Catalan ?

Livre VIII. *Les courbes usuelles.* Ellipse; hyperbole; parabole; ellipse comme projection orthogonale du cercle; parabole comme limite de l'ellipse ou de l'hyperbole; sections coniques; hélice.

Peu d'additions et de modifications dans ce livre.

Appendice VII. *(Géométrie supérieure.)* (140 pages.) Homographie et involution; théorie des courbes du second ordre; théorie des surfaces du second ordre; étude de quelques surfaces d'ordre supérieur.

C'est la section du livre qui a reçu les accroissements les plus considérables. Citons, outre une théorie des quadriques, du tore et de la surface des ondes, qui manquaient complètement dans la première édition, un article sur les constructions relatives à l'homographie et à l'involution, un autre sur l'ordre des courbes algébriques, la généralisation du problème de Castillon, des développements sur la théorie des diamètres, des foyers, des coniques tangentes, bitangentes, osculatrices, et sur le tracé des coniques assujetties à diverses conditions. Grâce à ces diverses additions, le livre de MM. Rouché et de Comberousse contient une théorie synthétique des coniques très complète et qui a sur des ouvrages célèbres (la *Géométrie supérieure* et les *Coniques* de Chasles; la *Geometrie der Lage* de V. Staudt ou de Reye) cet avantage, que MM. Rouché et de Comberousse font usage de toutes les méthodes d'investigation des propriétés de ces courbes célèbres, la géométrie analytique exceptée.

Dans la théorie des surfaces du second ordre, on pourrait introduire la solution élémentaire du problème : *Trouver l'intersection d'une droite avec une quadrique (Mathesis,* 1883, III, 177-181), dont M. Rouché lui-même a donné une solution très élégante pour l'hyperboloïde de révolution *(Nouv. Annales de Mathématiques,* 1882, pp. 97-98).

QUESTIONS PROPOSÉES SUR LA GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE (568 questions classées — la première édition en contenait à peu près le même nombre).

NOTE I. *Sur l'application des déterminants à la géométrie* (7 pages). Comme dans la première édition : Aire du triangle ; volume du tétraèdre ; relations entre les distances mutuelles de trois points sur une droite, de quatre points dans un plan ou sur un cercle, de cinq points dans l'espace ou sur une sphère, etc. Ces relations sont extrêmement importantes au point de vue de la *caractérisation* de la géométrie euclidienne et des géométries non-euclidiennes.

NOTE II. *Sur la géométrie non-euclidienne* (17 pages). Cette note, qui a déjà paru dans la cinquième édition, contient un exposé de la seule géométrie lobatschewskienne : il n'y est pas parlé de la géométrie riemannienne. La partie élémentaire de la géométrie lobatschewskienne est exposée synthétiquement d'après Lobatschewsky lui-même. Mais la partie métrique est donnée analytiquement d'après un mémoire ingénieux de M. Battaglini. Malheureusement le point de départ du géomètre italien contient un postulat qui enlève toute rigueur à son exposition. Dans un triangle rectangle *opm*, dont le côté *op* est fixe, l'autre $om = z$ variable, ainsi que l'angle opposé $opm = t$, il doit exister, dit M. Battaglini, *d'après la théorie des fonctions*, une relation du premier degré entre *tang t* et *Thu*, si $z = ku$, $k$ étant une constante indéterminée, parce que, à chaque position de $m$ correspond une seule valeur de *tang t* et *Thu* et réciproquement (pp. 585-586). Le principe invoqué n'est applicable qu'à des fonctions définies non seulement, comme ici *tang t* et *Thu*, pour des valeurs *réelles* des variables correspondantes, mais aussi pour toutes les valeurs *imaginaires* de celles-ci. En appliquant ce principe à $t$ et $u$, au lieu de l'appliquer à *tang t* et *Thu*, on prouverait que $u$ et $t$ doivent être liés par une relation linéaire, ce qu'aucun géomètre ne voudra certainement admettre.

L'exposition rigoureuse de la partie métrique des géométries non-euclidiennes est bien difficile à faire autrement que dans un ouvrage étendu analogue à ceux de M. De Tilly ou de M. Flye de Sainte-Marie. Peut-être, dans une future édition de leur traité, MM. Rouché et de Comberousse feraient-ils mieux de remplacer la note actuelle par un exposé historique, sans démonstration, des recherches sur la métagéométrie.

NOTE III. *Sur la géométrie récente du tétraèdre* (22 pages).

Points et plans harmoniquement associés. Sections anti-parallèles d'un tétraèdre. Points inverses. Tétraèdres et pentagones orthologiques. Quadruples hyperboloïdiques. Sphères tangentes aux quatre faces d'un tétraèdre. Tétraèdre orthocentrique; quadrarète et quadrangle orthiques. Les hauteurs d'un tétraèdre quelconque sont des génératrices d'un hyperboloïde équilatère. La plupart des théorèmes nouveaux contenus dans cette note sont dus à M. Neuberg.

D'après cette longue analyse critique, le lecteur a quelque idée des richesses géométriques réunies par MM. Rouché et de Comberousse dans leur *Traité*. Nous avons dû indiquer un certain nombre de questions où nous différons d'avis avec les savants auteurs de ce beau livre; nous croyons que divers points dont nous n'avons pas parlé pourraient être améliorés d'après les ouvrages de MM. De Tilly, Catalan, Baltzer, Faifofer. Mais, en général, leur exposition est simple, claire, rigoureuse, suggestive et, pour le jeune professeur qui veut se mettre au courant, vite et bien, à la fois des méthodes anciennes et des méthodes nouvelles de la science, on ne peut conseiller une meilleure encyclopédie géométrique que le *Traité* de MM. Rouché et de Comberousse (1).

P. Mansion.

(1) Il est à peine nécessaire de parler de l'exécution typographique de l'ouvrage. Il suffit de dire qu'il est édité par MM. Gauthier-Villars et fils.

---

Extrait de la *Revue des questions scientifiques*, janvier 1892, 2e série, t. I, pp. 250-261.

Bruxelles. — Imp. Polleunis & Ceuterick, rue des Ursulines, 37.

# TRIFOLIUM

H. BECCARI

PARIS
LIBRAIRIE CH. DELAGRAVE
15, RUE SOUFFLOT, 15

1891

LE

# TRIFOLIUM

## Objet de cette notice.

Le trifolium oblique a été étudié, pour la première fois à notre connaissance, par M. G. de Longchamps (*J. S.*, 1887, 203-205 et 220-223).

Cette étude mériterait une nouvelle attention, parce qu'elle nous a donné l'occasion de reconnaître, dans le trifolium, un grand nombre d'intéressantes propriétés dont plusieurs sont probablemement inédites.

M. G. de Longchamps *(loc. cit.)* a désigné sous le nom de trifolium oblique la podaire (*g*) de l'hypocycloïde à trois rebroussements par rapport à un point P de la circonférence tritangente (K).

Grâce à la construction, bien connue et très simple, de la normale à la podaire d'une courbe donnée, on peut arriver à étudier les propriétés de la tangente au trifolium ; cependant il est possible de compléter ces notions par un autre mode de génération du trifolium, rencontré à l'occasion de recherches déjà anciennes, et tout à fait indépendant de la notion de podaire.

## Construction du trifolium oblique.

*Par un point* P *d'une circonférence* (v), *on mène une corde quelconque* PR. *Du point* R *comme centre, avec* RP *comme rayon, on décrit un arc de cercle. Trouver le lieu de ses intersections* M, M' *avec une parallèle* MRM' *à une direction fixe* (f) (fig. 1).

*Le lieu* (M) *est un trifolium oblique.*

En effet, si l'on prend P pour pôle, PD pour axe polaire, et qu'on désigne PD, PM, MPD, $\angle$PD respectivement par $2a$, $\rho$, $\omega$, $\theta$, on a l'équation

(1) $$\rho = 4a \cos(2\omega - \theta) \cos(\omega - \theta).$$

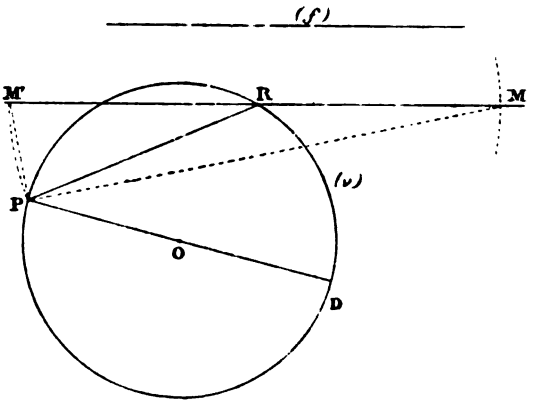



*Fig. 1.*

Si l'on prend P pour pôle et une parallèle PP' à (*f*) pour axe polaire, on a l'équation

(2) $$\rho = 4a \cos\omega \cos(2\omega + \theta),$$

c'est-à-dire le résultat de la substitution de $\omega$ à $(\omega - \theta)$, dans l'équation précédente.

Les équations (1) et (2) sont d'ailleurs faciles à identifier avec l'équation

$$\rho = h \cos(\alpha + \omega) \cos 2\omega$$

donnée par M. G. de Longchamps *(loc. cit.)*, et qui représente un trifolium oblique.

On trouve cette construction, appliquée au cas particulier où la direction (*f*) est parallèle au rayon OP, dans la *Géométrie analytique* de M. G. de Longchamps (1884, t. II, 511-515); mais ce n'est que plus tard (*J. S.*, 1886, *Géométrie de la règle*, § 126, p. 254) que l'auteur a proposé pour cette courbe la désignation de *trifolium droit*.

Nous y reviendrons dans la suite de cette notice.

En coordonnées rectangulaires, les équations (1) et (2) deviennent, respectivement,

$$(3)\quad (x^2+y^2)^2 = 2ax(x^2+y^2) + 2ax(x^2-3y^2)\cos 2\theta + 2ay(3x^2-y^2)\sin 2\theta;$$

$$(4)\quad (x^2+y^2)^2 = 4ax(x^2-y^2)\cos\theta - 8ax^2y\sin\theta.$$

La substitution $y = tx$ donne immédiatement pour $x$ une fraction rationnelle; la courbe représentée par les équations précédentes fait donc partie de la famille des courbes unicursales d'ordre $n$, à point multiple d'ordre $(n-1)$.

C'est une quartique unicursale à point triple à l'origine.

Le dénominateur des expressions de $x$ et de $y$, en fonction de $t$, ne peut s'annuler; la courbe est donc fermée.

## Points remarquables du trifolium oblique.

La courbe (M) considérée comme lieu géométrique, mais non rattachée à l'étude de l'hypocycloïde, a été déjà signalée dans un Mémoire publié à Alger en 1874 et relatif aux *Problèmes dont la solution dépend de la trisection de l'angle*. Nous avons montré, par exemple, que le lieu (M), abstraction faite du point multiple, rencontre la circonférence (*v*) en trois points A, B, C, sommets d'un triangle équilatéral (*loc. cit.* § 20).

En effet, le cercle (*v*) a pour équation

$$(5)\qquad \rho = 2a\cos\omega.$$

D'autre part, l'équation (1) peut s'écrire

$$(6)\qquad \rho = 2a\cos\omega + 2a\cos(3\omega - 2\theta).$$

Les points A, B, C sont donnés par l'équation

$$\cos(3\omega - 2\theta) = 0,$$

qui admet pour racines $APD = 30° + \frac{2}{3}\theta$, etc., ou, en prenant les inclinaisons sur PP', $APP' = 30° - \frac{1}{3}\theta$, etc. Ainsi,

*Le triangle* ABC *est équilatéral.*

Il résulte de la définition même du lieu (M), que le trifolium (*g*) est doublement tangent aux deux tangentes HIH', H"I'H" menées au cercle (*v*) parallèlement à (*f*) *(fig .2)*.

De plus, on a IH = IH', I'H" = I'H"'.

On voit également que les angles HPH', H'PH"' sont droits *(loc. cit.)*.

La circonférence (K), de centre D, et de rayon PD, rencontre le trifolium en quatre points, P, P', G, G' situés sur deux parallèles à (*f*). En outre, GG' est un diamètre du cercle (K).

## Le trifolium oblique et le trifolium régulier.

L'équation (6) montre que le rayon vecteur du trifolium (*g*) est le résultat de l'addition algébrique des rayons vecteurs des courbes représentées par les équations (5) et

(7) $$\rho = 2a \cos (3\omega - 2\theta),$$

courbes qui sont rapportées au même pôle P et au même axe polaire PD.

La première représente la circonférence donnée (*v*); la seconde, que l'on peut écrire, indifféremment :

(8) $$\rho = 2a \cos 3\omega,$$

(9) $$\rho = 2a \sin 3\omega,$$

représente un trifolium régulier ou équilatéral, podaire de l'hypocycloïde à trois rebroussements (ou *hypocycloïde triangulaire*) par rapport au centre D du cercle tritangent (K).

L'angle $\theta$ joue le rôle de paramètre d'orientation pour la situation de ce trifolium ($\lambda$). Celui-ci est donc tangent, à l'origine D, à trois rayons, parallèles aux cordes PA, PB, PC.

Enfin, les sommets de ce trifolium ($\lambda$) se trouvent sur la circonférence (K) et aux extrémités des rayons DA, DB, DC, en des points $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$.

Ces propriétés suffisent pour établir que le trifolium (*g*) est bien la podaire de l'hypocycloïde triangulaire.

On peut remarquer, en effet, que la podaire inverse du trifolium (*g*) est l'enveloppe des droites *mp* perpendiculaires aux rayons vecteurs P*m*. Mais le lieu des projections du point D sur ces droites *mp*, est précisément le trifolium (λ), podaire de l'hypocycloïde par rapport au centre D du cercle tritangente (K).

La proposition est donc établie.

Parmi les points remarquables du trifolium régulier, on peut signaler les extrémités I, I′ du diamètre du cercle (*v*) perpendiculaire à (*f*), le point J, milieu de PP′, et le quatrième sommet P″ du rectangle JP′DP″. Ces propriétés résultent, très simplement, de ce que les angles droits IPI′, PP′P″ ont leurs sommets sur la circonférence (K) et leurs côtés tangents à l'hypocycloïde triangulaire.

## Tangente et normale au trifolium oblique.

Le trifolium oblique est inscrit au trapèze isoscèle HH′H″H‴, et tangent aux deux bases parallèles à (*f*).

Les trois tangentes, au point multiple P, sont les droites rectangulaires PI, PI′ et la perpendiculaire $PP_1$ à (*f*) (*loc. cit.*). Elles ont pour inclinaisons, sur PP′, respectivement, $45° - \frac{\theta}{2}$, 90° et $45° + \frac{\theta}{2}$.

De l'équation (2) on tire

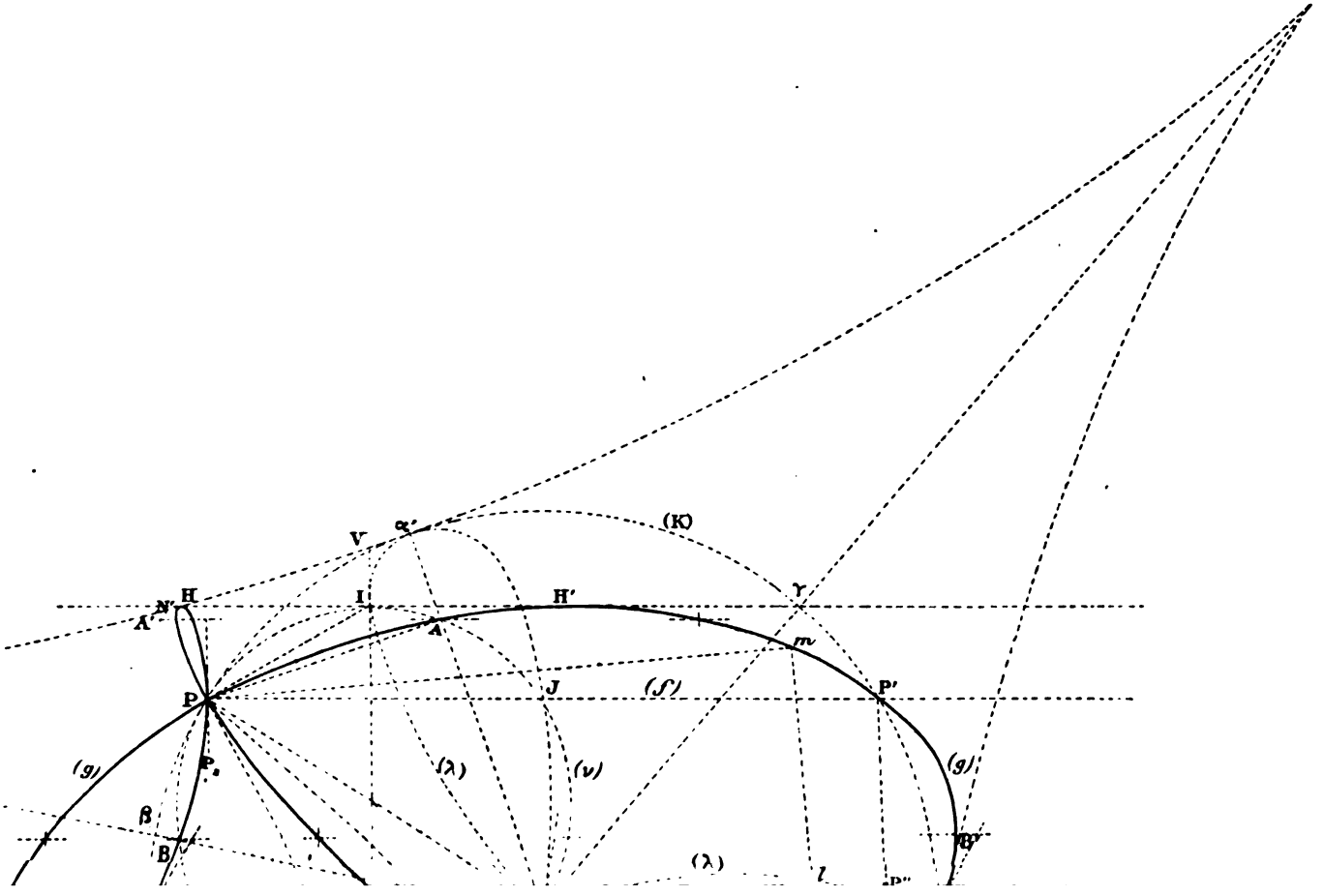
(10) $\quad \operatorname{cotg} V + \operatorname{tang} \omega + 2 \operatorname{tang} (2\omega + \theta) = 0.$

Au point P′, $\omega = 0$; donc $\operatorname{cotg} V = -2 \operatorname{tang} \theta$.

Au point G′, $\omega = -\frac{\theta}{2}$; donc $\operatorname{cotg} V = -\operatorname{tang} \frac{\theta}{2}$; par conséquent la tangente en ce point est perpendiculaire à PD.

Même conclusion pour le point G (*fig. 3*).

Les parallèles à (*f*), menées par les points A, B, C, rencontrent le trifolium en d'autres points, parmi lesquels on peut signaler trois points A′, B′, C où la tangente au trifolium est perpendiculaire à (*f*).


V
α'
(K)
H
N'
A'
I
H'
γ
A
m'
P
J
(f')
P'
(g)
(λ)
(ν)
(g)
β
B
(λ)
l

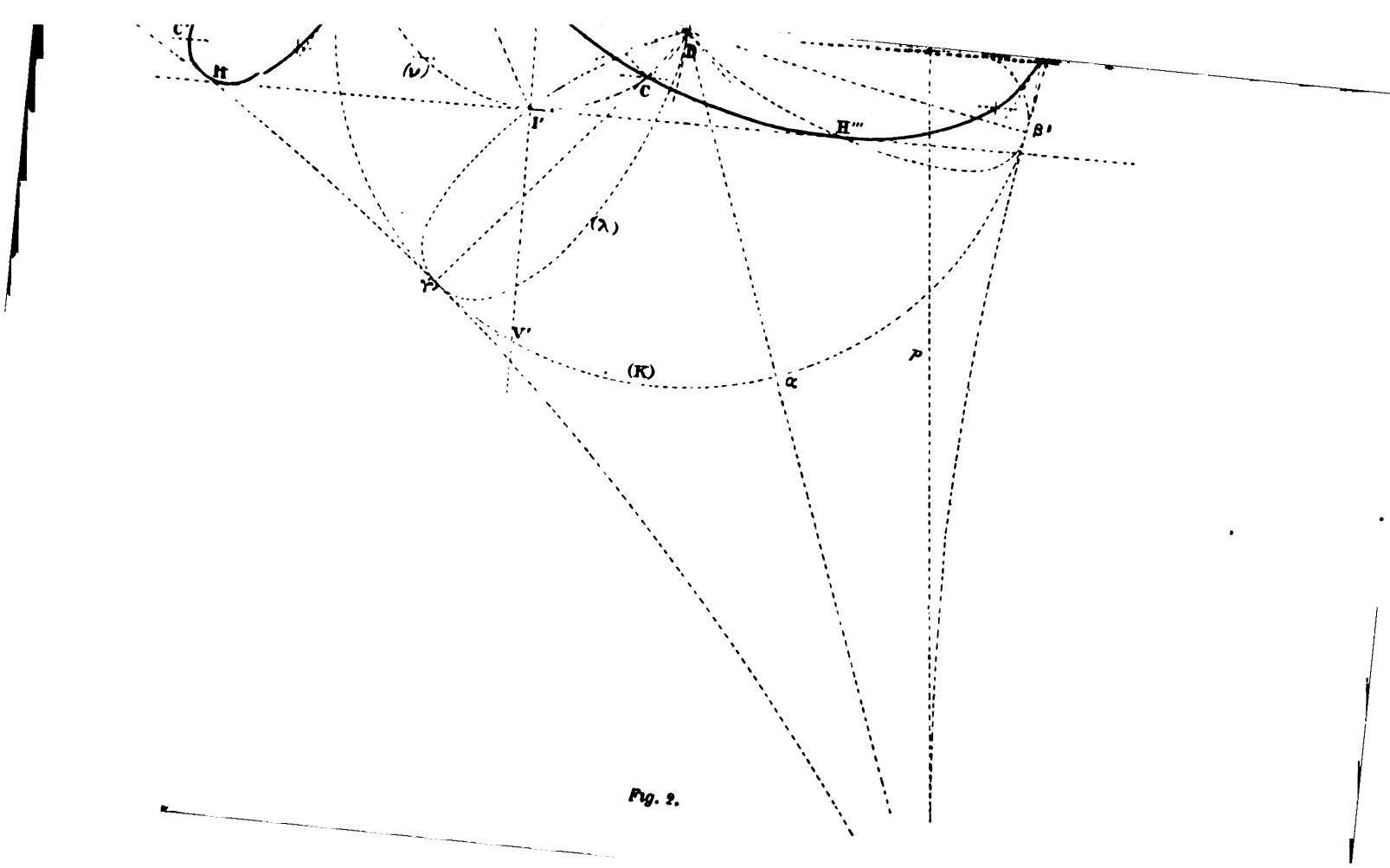



Fig. 2.

Les rayons vecteurs correspondants PA′, PB′, PC′ sont parallèles aux rayons Dα ou Dα′, Dβ ou Dβ′, Dγ ou Dγ′ du cercle (K). En d'autres termes, les quadrilatères APα′A′, PBβ′B′, PCγ′,C′ sont des rectangles.

Les points A′, B′, C′ résultent facilement de l'équation (10)

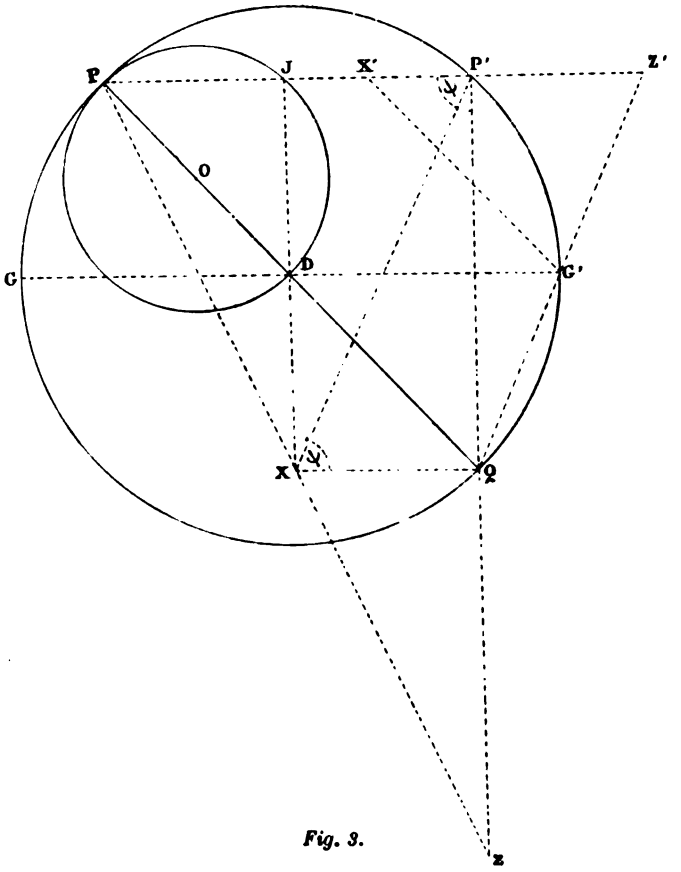



*Fig. 3.*

car, en observant que $V = 90° - \omega$, on la réduit à

$$\text{tang } \omega + \text{tang } (2\omega + \theta) = 0.$$

Celle-ci a pour racines :

$$\omega = -\frac{\theta}{3}, \qquad \omega = 120^\circ - \frac{\theta}{3}, \qquad \omega = 240^\circ - \frac{\theta}{3},$$

correspondant, respectivement, aux points A', B', C'.

Enfin, il existe une droite NN', perpendiculaire à PD et tangente en deux points N, N' du trifolium, dont les rayons vecteurs PN, PN' passent par les points V, V' de rencontre de II' avec la circonférence (K).

En raison des constructions précédentes, la droite II' rencontre le trifolium en deux points seulement; et les tangentes au trifolium en ces deux points concourent au point d'intersection de NN' avec PP'.

Puisque le trifolium (*g*) est la podaire d'une hypocycloïde triangulaire circonscrite au cercle (K), on peut vérifier les propriétés déjà établies ou énoncées pour les tangentes à cette hypocycloïde.

Au point P', par exemple, la perpendiculaire P'Q à PP' passe par le point Q, extrémité du diamètre PQ, dans le cercle (K). Prolongeant P'Q d'une longueur égale, QZ = QP', la normale en P' à (*g*) doit passer par le milieu X de PZ.

Désignant l'angle PP'X par $\psi$, on a

$$\operatorname{cotg}\psi = \frac{QX}{P'Q} = \frac{PP'}{2P'Q} = \frac{4a\cos\theta}{2.4a\sin\theta} = \frac{1}{2}\operatorname{cotg}\theta.$$

De même, au point G', on a la construction suivante :

Prolonger QG' d'une longueur égale G'Z'; puis joindre G' au milieu X' de PZ'.

On voit immédiatement que G'X' est parallèle à PD, ce qui établit très simplement la propriété, vérifiée déjà, pour la tangente aux points G, G'.

La propriété de la normale en N, d'être parallèle à PD, se déduira aussi de la construction de cette ligne :

Projeter V', en N, sur PN. La projetante V'N rencontre la circonférence (K) en un autre point T. Prendre V'Q = V'T et joindre N au milieu de F de PQ.

Il reste alors à démontrer que NF (normale en N) est parallèle à PD *(fig. 4)*.

On conclura aussi, de cette propriété, que le lieu des points I' est une hypocycloïde à trois rebroussements, tritangente au cercle (*v*) décrit sur PD comme diamètre.

Pour établir le parallélisme des droites NF, PD, il convient d'observer que les lignes PQ, VV′ se rencontrent sur la perpendiculaire DE à V′TN.

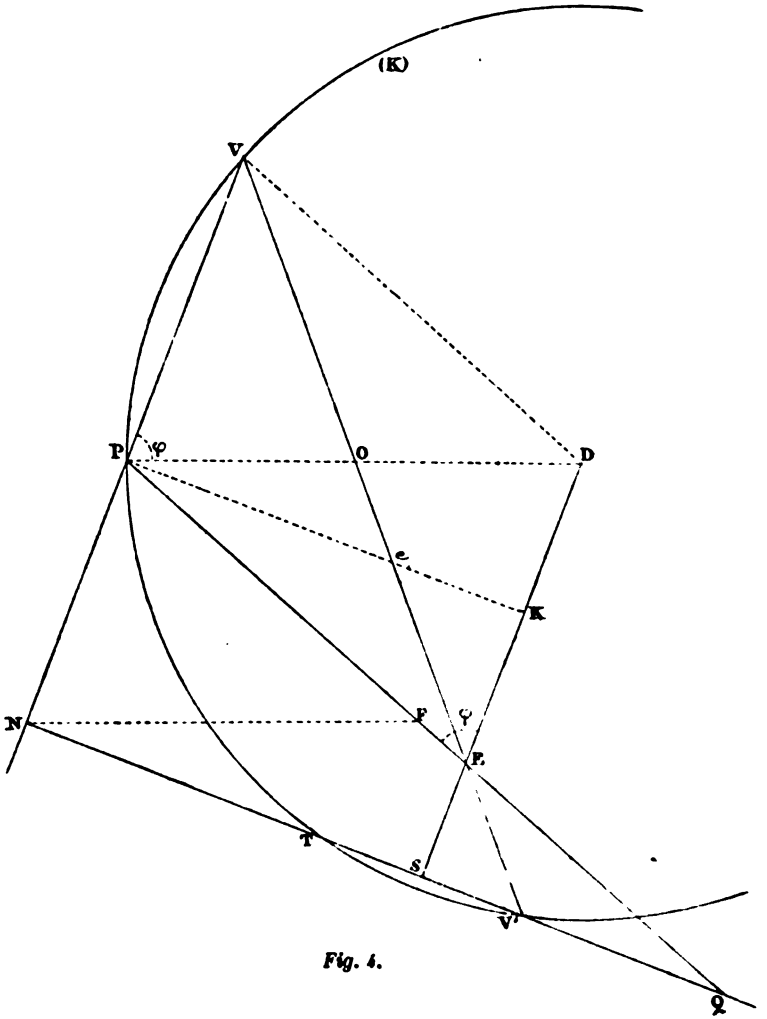



*Fig. 4.*

En effet, prenons, sur OV′, OE = OV, et achevons le parallélogramme PVDE.

Ce parallélogramme est de nature particulière; il est formé par l'ensemble des triangles *isoscèles* DPE, PDV. Ainsi, angle PED = angle VPD = $\varphi$.

V'N étant parallèle à la bissectrice de l'angle EPD, forme avec PQ un angle égal à $90^\circ - \varphi$. Mais c'est précisément aussi l'angle de V'N avec PO. On en conclut que la ligne NF doit passer au milieu F de PQ.

Toutefois, il reste à prouver que, dans ces conditions, le segment QV' est égal à V'T.

C'est ce qui résulte, en effet, de la similitude des triangles PKE, QSE et du fait que les lignes EO, PK étant les médianes du triangle DPE, se coupent en un point *e* qui les divise dans le rapport

$$\frac{eK}{Pe} = \frac{1}{2}.$$

On en conclut, immédiatement :

$$\frac{SV'}{V'Q} = \frac{1}{2},$$

ce qui établit la propriété énoncée.

Ainsi la normale en N est parallèle à PD.

Ces propriétés, ainsi que d'autres faciles à reconnaître, peuvent fournir le sujet d'un certain nombre de théorèmes de géométrie élémentaire.

## Le trifolium oblique et l'hypocycloïde triangulaire.

Nous avons rappelé que par le point P passent deux tangentes rectangulaires de l'hypocycloïde. Il est bon d'observer que la droite PP' est une troisième tangente à l'hypocycloïde.

Quant aux points de contact de PI, PI', PP' avec l'hypocycloïde, on les obtiendra en prolongeant ces cordes d'une longueur égale.

Puisque nous reprenons ici les propriétés géométriques de

la tangente à l'hypocycloïde, nous pouvons nous proposer de compléter les notions déjà établies pour le trifolium (*g*) ou pour le lieu (M).

Soient (K) le cercle donné, *dd'* une tangente fixe au point *d*, M un point du cercle projeté en *m* sur la tangente, *mt* un segment égal à *md*. Traçons M*t* qui rencontre la circonférence en un point S *(fig. 5)*.

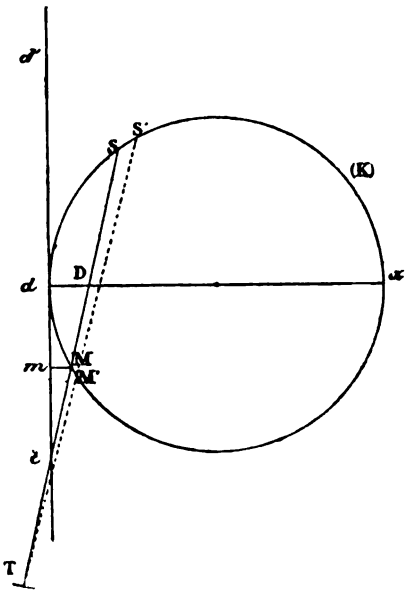



*Fig. 5.*

*L'hypocycloïde à trois rebroussements peut être définie :*

*Ou bien, comme enveloppe du côté* Mt *des triangles isoscèles* dMt,

*Ou bien, comme enveloppe des cordes* MS *d'un cercle, telles que les arcs* Md, Sd *comptés d'un point fixe* d, *soient dans le rapport de* 1 *à* 2.

*Ces deux définitions qui, en réalité, n'en font qu'une, renferment toute la géométrie de l'hypocycloïde à trois rebroussements.*

La courbe enveloppe ainsi obtenue admet le point *d* pour un de ses sommets, et la ligne *d*D*x* pour un de ses axes.

Elle est triplement tangente au cercle (K), au point *d* et aux deux autres sommets du triangle équilatéral inscrit.

Quant au point de contact T de la tangente SM avec son enveloppe, il résulte très simplement de la relation entre les arcs M*d*, S*d*. En effet, les accroissements élémentaires MM', SS' sont dans le rapport de 1 à 2; donc la tangente M'S' rencontre la tangente MS en un point T symétrique de S par

rapport à M (*Bulletin de la Société mathématique de France*, I, 1873, 224; et V, 1877, 18).

Aux points H, H′, H″, H‴, où la tangente au trifolium est parallèle à (*f*), les tangentes à l'hypocycloïde passent par les points L, L′, extrémités du diamètre du cercle (K) parallèle à II′. En d'autres termes, les quadrilatères PHLH′, PH″L′H‴ sont des rectangles.

Aux points A′, B′, C′, où la tangente au trifolium est perpendiculaire à (*f*), les tangentes à l'hypocycloïde sont encore tangentes au cercle (K); et, comme celui-ci est inscrit à l'hypo-

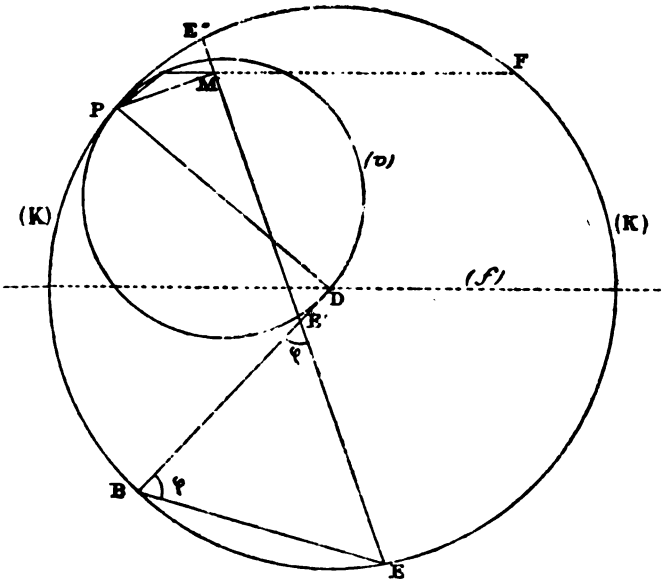



*Fig. 6.*

cycloïde, on en conclut que les points de contact des tangentes en question sont les sommets α′, β′, γ′ du trifolium droit (λ). Ainsi, les quadrilatères PA′α′A, PB′β′B, PC′γ′C sont des rectangles.

Proposons-nous d'établir l'identité des deux constructions données pour le trifolium oblique, en le considérant, suc-

cessivement, comme podaire d'hypocycloïde à trois rebroussements et comme lieu géométrique déduit du cercle ($v$).

Soient ($v$), (K) les circonférences déjà considérées, tangentes au point P, DP$f$ l'angle $\theta$, BDP l'angle $60^\circ + \frac{2}{3}\theta$, DBE un angle quelconque $\varphi$; BE″ l'arc double de BE; M la projection de P sur EE″; O′ l'intersection de PD avec EM *(fig. 6)*.

Posons $PD = 2a$, $PM = \rho$, $MPO' = \omega$.

Nous aurons $DE' = 2a(1 - 4\cos^2\varphi)$,

$$\frac{O'D}{DE'} = \frac{\sin\varphi}{\cos\omega},$$

$$\rho = (2a - O'D)\cos\omega.$$

Par conséquent,

$$\rho = 2a\cos\omega + 2a\sin\varphi(3 - 4\sin^2\varphi).$$

ou $$\rho = 2a\cos\omega + 2a\sin^3\varphi.$$

Mais, dans le triangle O′DE′, on a

$$\varphi + 60^\circ + \frac{2}{3}\theta + 90^\circ - \omega = 180^\circ,$$

donc $$3\varphi = 3\omega - 2\theta + 90^\circ;$$

et, en définitive,

(6) $$\rho = 2a\cos\omega + 2a\cos(3\omega - 2\theta).$$

Cette équation est identique avec celle du lieu géométrique des points M définis par les triangles isoscèles PRM. L'enveloppe des droites EE′M est une hypocycloïde circonscrite au cercle (K); la courbe (M) est donc un trifolium oblique.

L'équation (6) montre la relation entre les deux trifoliums; la construction donnée précédemment permet de tracer également le trifolium droit.

## Une quartique trinodale.

La normale au trifolium ($g$) en un point M, peut se déduire de la construction du point correspondant sur l'hypocycloïde podaire inverse du trifolium.

Cette construction revient, comme on sait, à mener en M,

à MP, une perpendiculaire MK qui doit *nécessairement* rencontrer la circonférence (K) en deux points K, L. On prolonge la corde de KL d'une longueur égale; on obtient ainsi deux points S, S'. Un seul de ces points, S, est sur l'hypocycloïde; et il est toujours facile de savoir à quelle branche de courbe il appartient. On tracera la droite SP, puis on joindra le point M au milieu *m* de SP. *(Fig. 7.)*

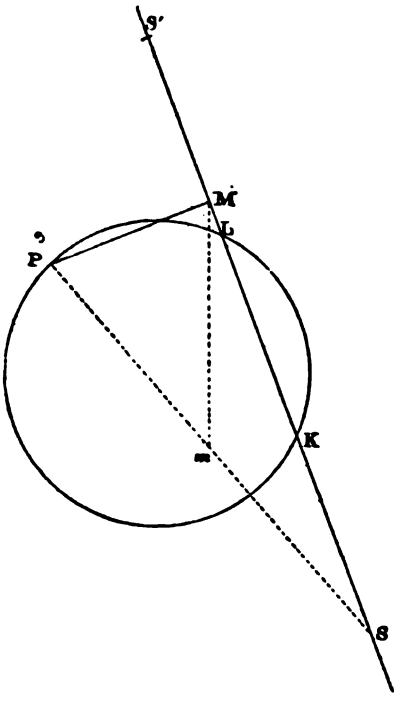


*Fig. 7.*

En vertu d'une propriété bien connue, M*m* sera la normale en M au trifolium.

Nous venons de remarquer le second point S' qui paraît étranger à la question proposée. On peut donc se demander quel est le lieu des points S' autrement dit, *le lieu des extrémités* S' *des tangentes à l'hypocycloïde prolongées hors du cercle* (K) *d'une longueur égale à celle du segment ainsi intercepté. (Fig. 8.)*

Ce lieu est une courbe déjà rencontrée dans d'autres recherches. M. G. de Longchamps en a fait une étude très détaillée (*J. M. S.* 1885, 269-277), à laquelle M. d'Ocagne a ajouté de curieuses remarques (*J. M. S.* 1886, 79-84, 97-99, 121-122).

Cette courbe, qui est une *quartique trinodale*, a été étudiée comme solution de la question n° 22 de la *Nouvelle Corresp. math.*, t. I, 1874, concours d'admission à l'École Polytechnique en 1871, résolue (*N. C. M.* 124-132 et 196-198) par MM. Philippin, Saltel et Dewulf.

M. de Longchamps (*J. M. S.* 1885, 272) a donné, de cette courbe, le mode de génération rapporté ici, et M. d'Ocagne a

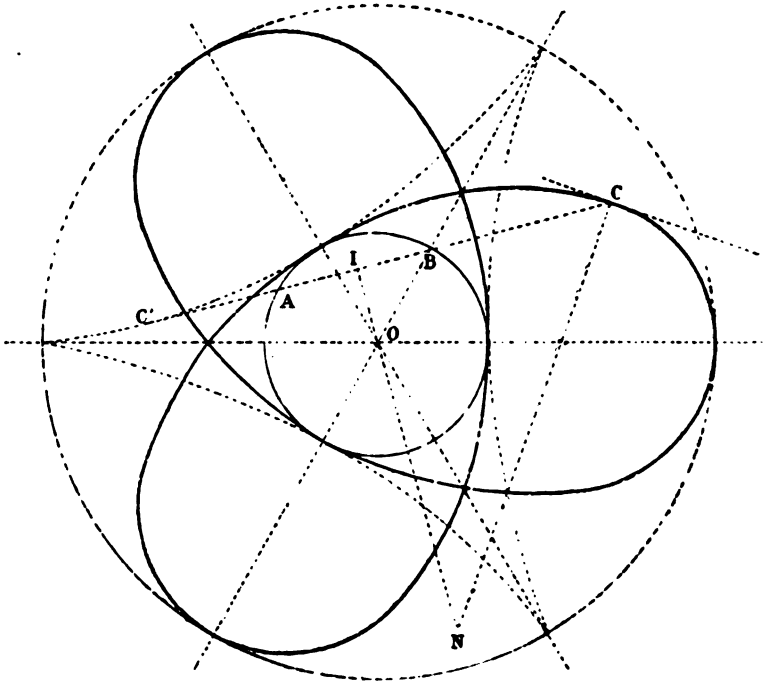



*Fig. 8.*

indiqué (*J. M. S.* 1886, 84) l'élégante construction de la normale en un point C :

*Mener la perpendiculaire* OI *sur la droite* AB, *et prolonger* IO *de quatre fois sa longueur en* ON ; CN *est la normale au point* C.

## Triangles associés au trifolium oblique.

Une propriété remarquable est également à signaler pour *les normales au trifolium* (g) *aux points* A, B, C ; *ces trois normales sont concourantes.*

Pour l'établir, il est nécessaire de se reporter à la construc-

tion de la normale à une podaire, connaissant la tangente à la podaire inverse et la situation du point de contact.

Ici, les tangentes à l'hypocycloïde, correspondant aux points A, B, C du trifolium sont les droites DA, DB, DC, et, comme ces droites sont les axes mêmes de l'hypocycloïde, les points de contact A″, B″, C″, points de rebroussement de cette courbe, sont, par définition, à une distance des points α, β, γ, égale au diamètre du cercle (K).

On a donc à établir la propriété suivante, probablement nouvelle, du triangle équilatéral. *(Fig. 9.)*

*On donne un triangle équilatéral* A″B″C″, *la circonférence circonscrite* D, *et un point* P *de la circonférence concentrique* (K) *de rayon trois fois moindre; on trace les droites* DA″, DB″, DC″ *qui déterminent sur la circonférence* (v) *décrite sur* PD *comme diamètre les sommets* A, B, C *d'un triangle équilatéral. Les droites qui joignent les points* A, B, C *aux milieux* A′, B′, C′ *des segments* PA″, PB″, PC″ *concourent en un même point* Z.

Cette propriété est une conséquence immédiate et très simple de la similitude et de l'homologie des triangles ABC, A′B′C′, A″B″C″ et de l'homothétie des deux derniers triangles.

Le centre de similitude est le point D pour les triangles ABC, A″B″C″; le centre d'homothétie est le point P pour les triangles A′B′C′, A″B″C″; les trois triangles sont donc homologiques, et le centre d'homologie des triangles ABC, A′B′C′ est un troisième point Z, ce qui établit la proposition.

Soit $P_1$ l'extrémité du diamètre $PDP_1$ dans le cercle (K). Si l'on trace $P_1A''$, par exemple, on obtient un triangle $PP_1A''$, dont $P_1A'$, DA″ sont les médianes. Elles se rencontrent donc en un point α situé au tiers de DA″, c'est-à-dire sur la circonférence (K).

Ainsi les triangles αβγ, A′B′C′ sont homothétiques; leur centre d'homothétie est le point $P_1$ extrémité du diamètre $PDP_1$.

Après l'indication des propriétés des centres d'homologie, l'exposé de celles des axes d'homologie paraît devoir fixer l'attention.

Les triangles ABC, $\alpha\beta\gamma$ sont homologiques : leur centre d'homologie est le point D, et leur axe d'homologie une droite (*l*)

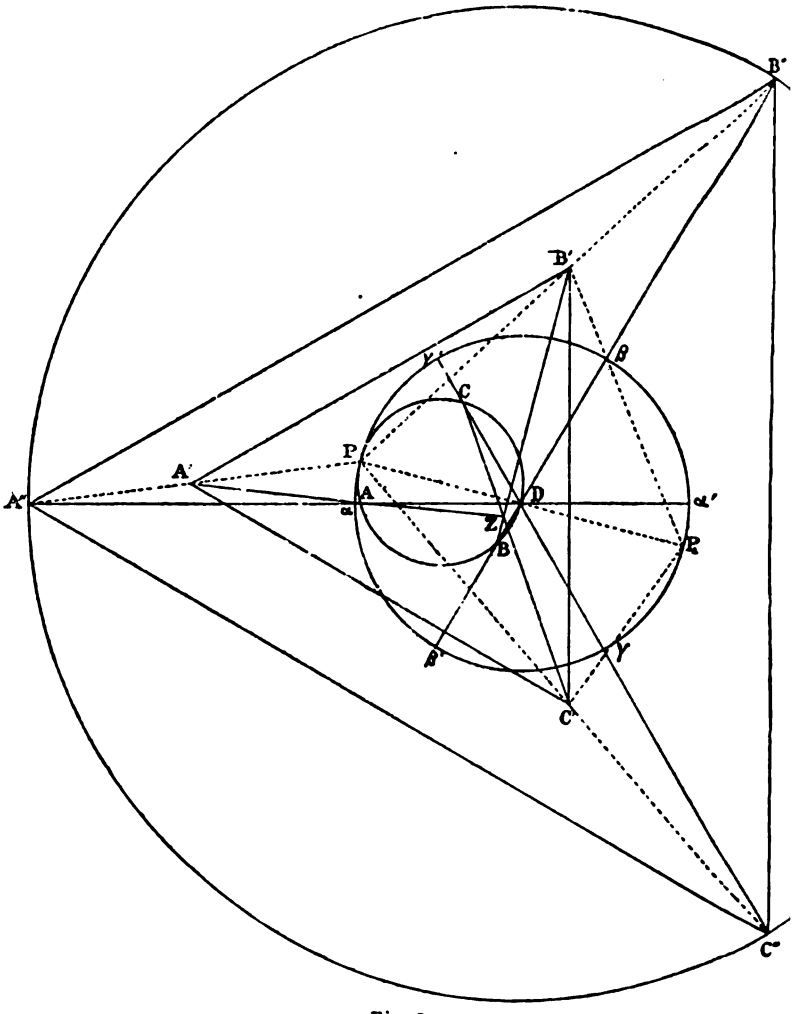



*Fig. 9.*

tangente à la circonférence (*v*) décrite sur PD comme diamètre.

Mais rien ne distingue les points $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$, diamé-

tralement opposés sur le cercle (K). On a donc un second triangle $\alpha'\beta'\gamma'$, correspondant au triangle donné ABC, et ayant même centre D d'homologie.

L'axe d'homologie est une droite ($l'$), tangente au cercle ($v$) et parallèle au premier axe ($l$).

L'interversion des points A, B, C entre eux ne change rien à la situation de ces deux axes d'homologie.

L'inclinaison de ces droites ($l$) ($l'$) sur le diamètre PD est donc une fonction de l'orientation $\theta$ des sommets du triangle équilatéral ABC, relativement à ce diamètre.

En effet, le point de contact d'un de ces axes avec la circonférence ($v$) est la projection du point P sur le diamètre GDG' de la circonférence (K) ou $\alpha\beta\gamma$.

L'inclinaison de cette tangente sur PD est donc égale à $90^\circ - 2\theta$.

L'autre point de contact est à l'extrémité de la corde PP' parallèle à ($f$), dans le cercle ($v$), et menée par le point P.

Les points $A_1$, $B_1$, $C_1$ diamétralement opposés aux points A, B, C sur le cercle ($v$) représentent les sommets d'un nouveau triangle équilatéral inscrit. Les droites qui le joignent au point D déterminent, sur la circonférence (K), deux nouveaux groupes de trois points $\alpha_1$, $\beta_1$, $\gamma_1$, $\alpha'_1$, $\beta'_1$, $\gamma'_1$ qui sont les milieux des arcs formés par les sommets $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$.

Les triangles $A_1B_1C_1$, $\alpha_1\beta_1\gamma_1$, $\alpha'_1\beta'_1\gamma'_1$ admettent pareillement deux nouveaux axes d'homologie, tangents à la circonférence ($v$); mais ces axes présentent une propriété digne de remarque, c'est d'être perpendiculaires aux précédents.

Ainsi l'on peut énoncer la proposition suivante :

*Étant données deux circonférences* (v), (K) *de rayons* 1 *et* 2, *tangentes entre elles intérieurement au point* P, *on inscrit à la première les triangles équilatéraux* ABC, $A_1B_1C_1$ *diamétralement opposés; les droites joignant le centre* D *de la seconde circonférence aux six points désignés rencontrent cette courbe en douze points* $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$, $\alpha_1$, $\beta_1$, $\gamma_1$, $\alpha'_1$, $\beta'_1$, $\gamma'_1$. *Les axes d'homologie des triangles* ABC *et* $\alpha\beta\gamma$, $\alpha'\beta'\gamma'$, *d'une part,* $A_1B_1C_1$ *et* $\alpha_1\beta_1\gamma_1$, $\alpha'_1\beta'_1\gamma'_1$ *d'autre part, forment un carré circonscrit au cercle* (v).

## Courbure du trifolium oblique.

La construction du rayon de courbure, en un point M du trifolium ($g$), peut se déduire, assez rapidement, de celle du rayon de courbure au point correspondant de la podaire inverse, c'est-à-dire de l'hypocycloïde triangulaire.

Le centre de courbure du trifolium au point A, par exemple, est à l'intersection de la normale en A, AZ, avec la ligne $P_1\alpha$.

En d'autres termes, *les centres de courbure du trifolium, aux points* A, B, C, *sont les sommets du triangle équilatéral* A'B'C'.

Pour en donner la démonstration la plus simple, il suffit d'observer qu'aux points A″, B″, C″ correspondant sur la podaire inverse, et qui sont les points de rebroussement d'une hypocycloïde tritangente au cercle $P\alpha\beta\gamma$, le rayon de courbure est nul. Par conséquent, la construction du centre de courbure au point A de la podaire, se réduit à terminer le triangle $APA''A_1$, et à tracer les diagonales A″P, $AA_1$, qui se rencontrent au point A′, milieu de A″P.

A′AZ est la normale et A′ le centre de courbure, au point A du trifolium.

L'étude de la courbure du trifolium donne lieu à quelques autres remarques intéressantes.

Au pôle P, le rayon vecteur passe trois fois par zéro. Par conséquent, l'expression du rayon de courbure en ce point se réduit à

$$R = \frac{\rho'}{2}.$$

Or, les valeurs de $\omega$ correspondantes sont, en prenant PP′ pour axe polaire,

$$\omega = 90^\circ, \quad \omega = IPP' = 45^\circ - \frac{\theta}{2}, \quad \omega = I'PP' = -\left(45^\circ + \frac{\theta}{2}\right).$$

D'ailleurs,

(2) $$\rho = 4a \cos\omega \cos(2\omega + \theta),$$

$$\rho' = -4a \sin\omega \cos(2\omega + \theta) - 8a \cos\omega \sin 2\omega + \theta).$$

On a, respectivement :

$$\text{branche PA :} \quad R_1 = 4a \cos\left(45^\circ - \frac{\theta}{2}\right);$$

$$\text{branche PB :} \quad R_2 = 2a \cos\theta;$$

$$\text{branche PC :} \quad R_3 = 4a \cos\left(45^\circ + \frac{\theta}{2}\right).$$

D'ailleurs, les rayons de courbure pour les branches PA, PC se trouvent dans le prolongement des cordes rectangulaires PI′, PI. On en conclut que les points L′, L sont les centres de courbure des arcs précités.

Quant au troisième centre de courbure, situé sur l'axe polaire, il est en un point J′ symétrique du point J par rapport au point P.

## Hyperbole équilatère associée au trifolium oblique.

En vertu d'une propriété connue *(Mém. d'Alger)* les quatre points A, B, C, D déterminent une hyperbole équilatère dont le centre est le milieu F de OD, et dont les asymptotes sont parallèles, perpendiculaires à la direction (*f*). *(Fig. 10.)*

Cette hyperbole, et certaines lignes associées, offrent d'autres particularités assez remarquables.

1° L'hyperbole passe par le point Z de concours des normales au trifolium, aux points A, B, C.

2° Si l'on construit les circonférences ayant pour centres les points A, B, C et pour rayon le côté AB du triangle équilatéral ABC, on obtient, sur l'hyperbole trois couples de points qui déterminent trois cordes perpendiculaires à PA, PB, PC; par suite, elles forment entre elles des angles de 60°.

3° Ces trois cordes se rencontrent en un point O′ symétrique du centre O du cercle (*v*) par rapport au point D. O′ se trouve sur le prolongement de PD.

La circonférence étant représentée par l'équation

$$x^2 + y^2 = a^2,$$

l'hyperbole équilatère a pour équation

$$2xy + ax \sin\theta - ay \cos\theta = 0. \qquad (11)$$

L'équation aux ordonnées des points A, B, C, D est

$$4y^4 + 4ay^3 \sin\theta - 3a^2y^2 - 4a^3y \sin\theta - a^4 \sin^2\theta = 0.$$

Elle doit admettre pour racine

$$y = -a \sin\theta;$$

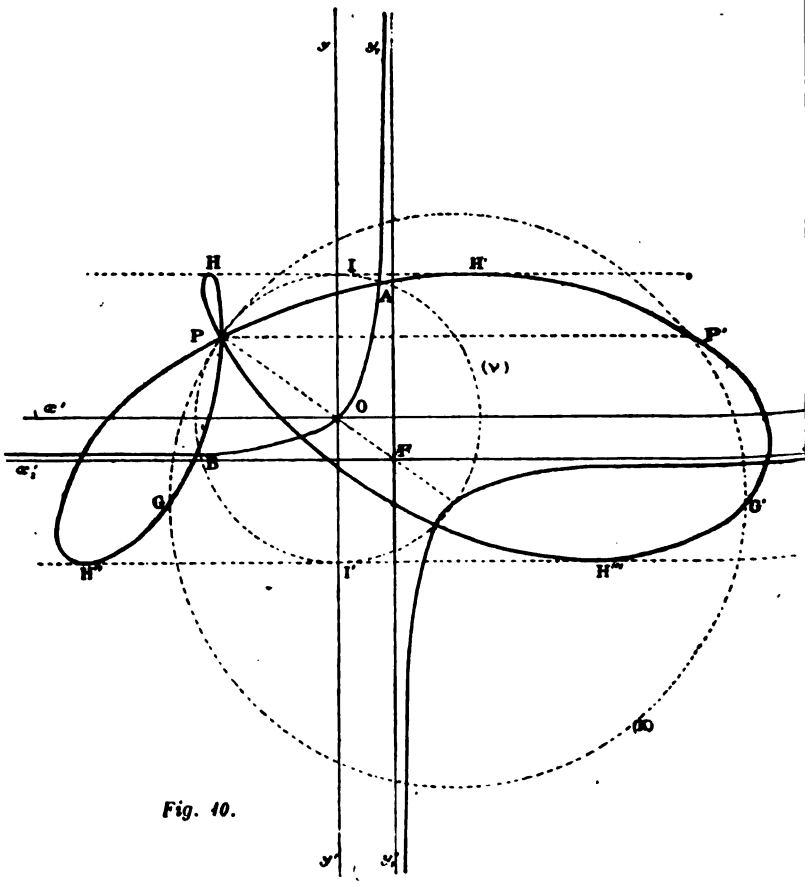



*Fig. 10.*

mais la somme des racines étant $-a \sin\theta$, on en conclut que les trois points A, B, C sont les sommets d'un triangle équilatéral (*loc. cit.* §§ 3 à 8).

En d'autres termes, l'hyperbole équilatère est une trisec-

trice (propriété connue), et le trifolium oblique est également une trisectrice.

D'ailleurs, d'autres courbes que nous rencontrerons incidemment, telles que la cardioïde, se trouvant associées aux précédentes, seront pareillement des trisectrices.

La division par le binôme $y + a \sin \theta$ donne

$$4y^3 - 3a^2y - a^3 \sin \theta = 0;$$

ou en posant $\frac{y}{a} = \mu$,

$$4\mu^3 - 3\mu = \sin \theta;$$

ce qui est l'équation donnant la trisection de l'angle $\theta$, $\mu$ représentant le cosinus de $30^\circ - \frac{\theta}{3}$.

L'angle d'un des rayons OA, OB, OC, avec les lignes (*f*), est égal à $\frac{\theta}{3}$.

Rapportée aux asymptotes $Fx_1$, $Fy_1$, l'hyperbole a pour équation :

(12) $$xy = -\frac{a^2}{4} \sin \theta \cos \theta.$$

## Podaires particulières de l'hypocycloïde triangulaire.

Les équations (1), (2) représentent, pour les diverses valeurs de l'angle $\theta$, toutes les variétés du trifolium oblique, depuis le trifolium droit, correspondant à $\theta = 0$ et dont l'équation est

(13) $$\rho = 4a \cos \omega \cos 2\omega,$$

jusqu'au folium double, ainsi désigné par M. G. de Longchamps (*Géométrie de la règle*, § 123, *J. M. S.* 1886, p. 251) et qui a pour équation

(14) $$\rho = 4a \sin \omega \sin 2\omega$$

lorsqu'il est rapporté à PX pour axe polaire, ou

(15) $$\rho = 4a \cos \omega \sin 2\omega,$$

lorsqu'il est rapporté à PY pour axe polaire, qui est alors perpendiculaire au précédent.

Mais le type d'équation (1) ou (2) ne donne pas, comme cas particulier, le trifolium équilatéral; tandis qu'il est possible de trouver une autre équation renfermant les trois courbes en question.

L'équation générale de ces courbes se présente comme solution du problème suivant, que nous avons proposé en 1884 dans *Mathesis* (n° 346, p. 143) :

*Étudier les podaires d'une hypocycloïde à trois rebroussements, le point fixe étant pris sur l'un des axes de cette courbe.*

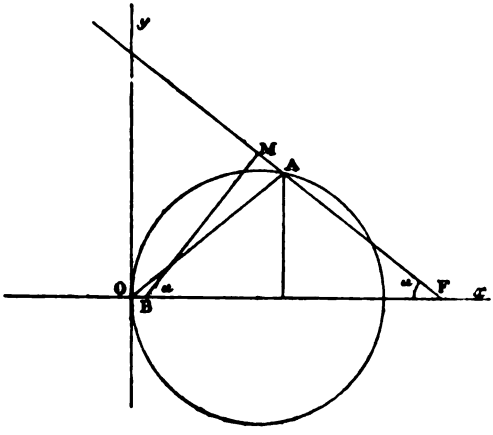



*Fig. 11.*

Les développements qui précèdent facilitent singulièrement la solution de ce problème.

Prenons, pour axes de coordonnées rectangulaires, la tangente et la normale en un point du cercle tritangent, de rayon $a$. Un point quelconque A de la circonférence *(fig. 11)* a pour coordonnées

$$x = 2a\cos^2 u, \qquad y = a \sin 2u;$$

la droite AF, tangente à l'hypocycloïde, aura pour équation

$$y = -x \operatorname{tang} u + 2a \sin 2u;$$

la projetante BM, d'un point B pris sur l'axe des $x$, aura pour équation

$$y = (x - b) \operatorname{cotg} u,$$

$b$ désignant la distance du point B à l'origine.

L'élimination de $u$ donne

$$y = \frac{(b - x)x}{y} - \frac{4a(b - x)y}{y^2 + (b - x)^2};$$

et en transportant l'origine au point B, et transformant en coordonnées polaires,

(16) $\rho = \pm b \cos\omega - 4a \cos\omega \sin^2\omega.$

Comme cas particuliers, on a

$b = 0$, $\rho = -4a \cos\omega \sin^2\omega$, *folium double*,
$b = a$, $\rho = a\cos\omega(1 - 4\sin^2\omega) = a\cos 3\omega$, *trifolium régulier*,
$b = 2a$, $\rho = 2a \cos\omega \cos 2\omega$, *trifolium droit*,
$b = 4a$, $\rho = 4a \cos^2\omega$, *courbe ovoïde*.

## Le trifolium droit.

Le trifolium droit se compose de trois boucles, dont deux égales et une troisième plus grande que les deux premières.

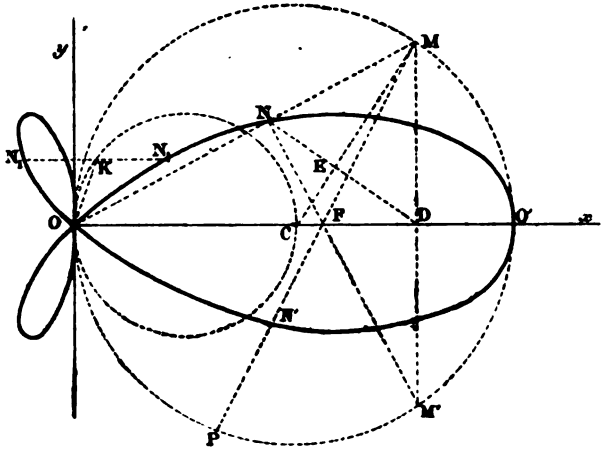



*Fig. 12.*

Les rayons vecteurs des sommets correspondent à $\cos\omega = 0$, $\omega = 90°$, $\rho = 4a$; et $\text{tang}\,\omega = \pm\sqrt{3}$, $\omega = \pm 60°$, $\rho = a$. C'est du reste ce que l'on pourrait reconnaître directement en suivant la détermination graphique des différents points de la courbe.

M. de Longchamps l'a déduite du cercle OO′ tangent en O à une droite Oy (*loc. cit.* § 126, *J. M. S.*, 1886, p. 254) en projetant sur une corde OM le point M′ symétrique de l'extrémité M de cette corde par rapport au diamètre OO′ (*fig. 12*).

Cette construction peut se modifier de différentes façons :

1° Projeter M en D sur le diamètre, puis D en E sur le

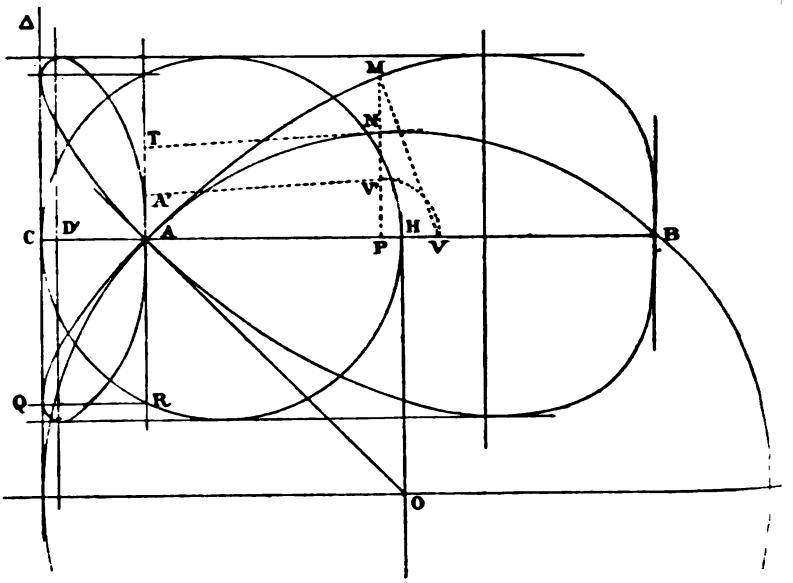



*Fig. 13.*

rayon CM et prolonger DE jusqu'à sa rencontre, en N, avec OM (*J. M. S.*, 1887, p. 68).

2° Rabattre le point M par une rotation autour du point D. L'arc de cercle ainsi tracé rencontre OM en N (*loc cit.*).

3° Prendre, sur OO′ FD = DO′ ou l'arc PM′ = O′M′ et projeter O en N′ sur FM ou sur PM (tracé dérivé de l'hypocycloïde triangulaire).

4° Décrire le cercle ayant OC pour diamètre et construire les triangles isoscèles $OKN_1$ ayant leurs côtés $KN_1$ parallèles à OO′. (Ce tracé, comme nous l'avons remarqué au début de

cette notice, est la construction que M. G. de Longchamps a exposée dans sa *Géométrie analytique (loc. cit.*, p. 511.)

Il est intéressant de comparer le trifolium droit à une courbe dont la définition, comme lieu géométrique, est donnée depuis le siècle dernier *(fig. 13)*.

Cette courbe dérive du cercle par la construction suivante : AB étant le côté d'un carré inscrit au cercle OAB, on projette le point N de la circonférence sur AB et l'on prend, sur l'ordonnée du point N, une longueur PM telle que

$$PM = \sqrt{AP.PN}.$$

Le lieu des points M ainsi obtenus, rapporté au pôle A et à l'axe polaire AB, a pour équation

$$\rho = \frac{2m \cos\omega \cos 2\omega}{\cos^4\omega + \sin^4\omega}, \tag{17}$$

$2m$ désignant la longueur AB.

Le numérateur est de même forme que celui de l'équation (13) du trifolium droit, et comme le dénominateur ne s'annule pas et reste toujours compris entre 1 et $\frac{1}{2}$, on reconnaît facilement que les courbes représentées par les équations

$$\rho = 2m \cos\omega \cos 2\omega, \tag{13}$$

$$\rho = \frac{2m \cos\omega \cos 2\omega}{\cos^4\omega + \sin^4\omega} \tag{17}$$

ont même diamètre AB et mêmes tangentes aux points A, B. Elles diffèrent donc très peu l'une de l'autre, et la seconde courbe est extérieure à la première.

En coordonnées cartésiennes, ces deux courbes ont respectivement pour équations

$$(x^2 + y^2)^2 = 2mx(x^2 - y^2). \tag{18}$$

$$x^4 + y^4 = 2mx(x^2 - y^2). \tag{19}$$

## Le folium double.

Des comparaisons toutes semblables peuvent être faites également pour le folium double.

Le folium double se compose de deux boucles égales, tan-

gentes à Oy, à l'origine, et possédant en ce point, sur Ox, un rebroussement. *(Fig. 14.)*

L'origine est en même temps un sommet de la courbe.

Les deux autres sommets se trouvent à l'extrémité de rayons

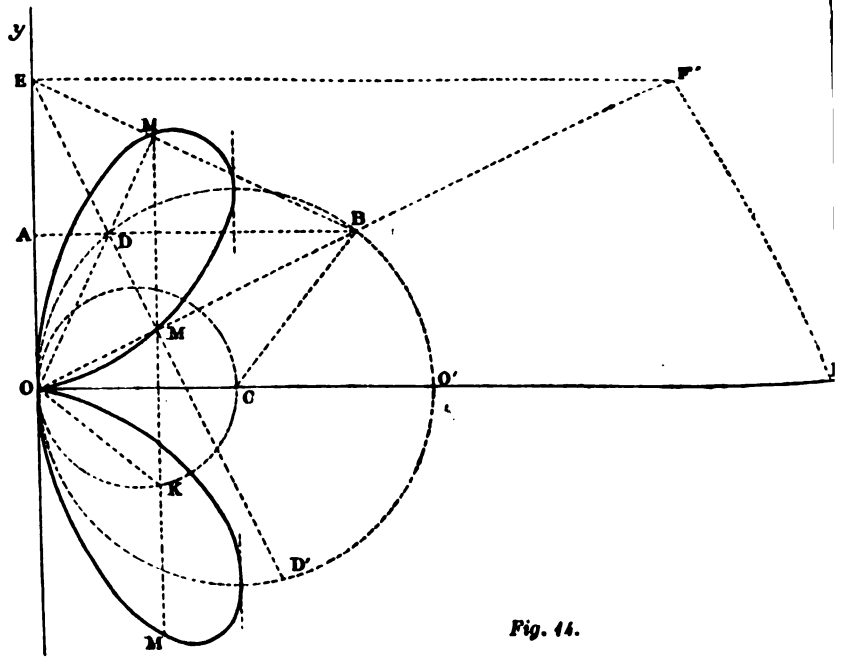



*Fig. 14.*

vecteurs correspondant à l'inclinaison tang $\omega = \pm\sqrt{2}$, valeur un peu supérieure à 45°, comme on pourrait le reconnaître en se reportant à la détermination graphique du folium.

M. de Longchamps a donné, de cette courbe, la construction suivante *(loc. cit.)* :

Projeter le point O en F' sur une droite FF' issue d'un point fixe F de Ox à une distance double du diamètre OO'; puis le point F' sur Oy, en E, et le point E en M sur OF'. On trouve alors immédiatement

$$\rho = 4a \cos\omega \sin^2\omega. \tag{20}$$

Cette construction peut se modifier de diverses manières :

1° La circonférence OO' rencontre les lignes EM, F'M en

deux points situés sur une parallèle à OO′. En d'autres termes, on trace une corde OB, on mène une parallèle BD à OO′ et on projette D en M sur OB. Comme l'angle BCO′ = $2\omega$, on trouve OM = $\rho = 2a\cos\omega - 2a\cos\omega\cos 2\omega$, ce qui est bien la même équation que tout à l'heure.

2° Prendre sur O$y$, OA = EA ou l'arc OD′ double de l'arc OD et projeter O en M sur ED ou sur DD′. (Tracé dérivé de l'hypocycloïde triangulaire.)

3° Décrire le cercle ayant OC pour diamètre et construire les triangles isoscèles OKM ayant leurs côtés KM parallèles à O$y$. (C'est la construction donnée (*Géom. analyt.*, *loc. cit.* p. 511) par M. G. de Longchamps, pour le trifolium droit, modifiée pour obtenir le folium double.)

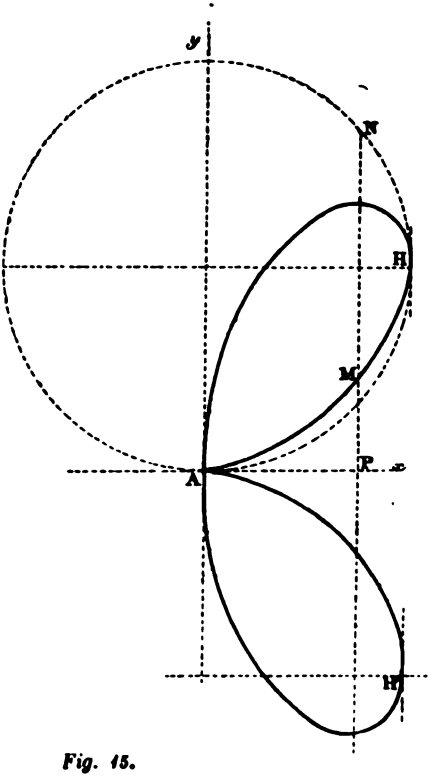



*Fig. 15.*

On peut déduire du cercle un autre folium double qui offre une grande ressemblance avec le folium qui vient d'être considéré.

Cette courbe dérive du cercle par la construction suivante, donnée depuis le siècle dernier, comme celle du paragraphe précédent :

AN étant une circonférence tangente en A à A$x$, on projette un point N de cette courbe, sur A$x$, au point P, et on prend, sur NP, un point M tel que

$$PM = \sqrt{AP.PN}.$$

Le lieu des points M dans lequel, rapporté au pôle A et à l'axe polaire Ax, a pour équation

$$\rho = \frac{2a\cos\omega + 4a\sin^2\omega}{\cos^2\omega - \sin^2\omega}$$

a désigné la longueur du rayon. *Fig. 13.*

La courbe qui est de même forme que celle de l'équation (20) du folium double, et comme le dénominateur ne s'annule pas et reste toujours entre 1 et $\frac{1}{2}$, on reconnaît facilement que les courbes représentées par les équations

$$\rho = 2a\cos\omega + 4a\sin^2\omega, \quad \rho = \frac{2a\cos\omega + 4a\sin^2\omega}{\cos^2\omega - \sin^2\omega} \qquad (21)$$

ont même sommet et même point de rebroussement en A et sont asymptotes entre elles aux mêmes points H, H'. Elles diffèrent donc très peu l'une de l'autre, et la seconde courbe est intérieure à la première.

En coordonnées rectangulaires, les deux courbes ont respectivement pour équations

$$(x^2 + y^2)^2 = 2ax(y^2 + 2x^2), \qquad (22)$$

$$x^4 - y^4 = 2axy^2. \qquad (23)$$

Les deux courbes que nous venons de signaler et dont le tracé présente de si grandes analogies avec le trifolium droit et avec le folium double, sont, en définitive, des transformées de la circonférence, l'abscisse restant la même et l'ordonnée se changeant en $\frac{y^2}{x}$.

On peut donc se proposer de chercher une construction de la normale MV au point M X, Y, d'une transformée U', correspondant au point N x, y, d'une courbe donnée U.

Voici, d'après une note de M. G. de Longchamps, la solution de cette question.

Les formules de transformation étant

$$X = x, \quad Y^2 = xy,$$

on en tire $\qquad dX = dx, \quad 2Y\frac{dY}{dX} = x\frac{dy}{dx} + y.$

Soit *(fig. 13)* MV la normale inconnue. On a

$$PV = Y\frac{dY}{dX}.$$

D'autre part, AK étant la parallèle à la tangente NT au point N, on a

$$x\frac{dy}{dx} + y = \text{PK} + \text{PN}.$$

Donc

$$\text{PV} = \frac{\text{PK} + \text{PN}}{2} = \text{PK} + \frac{\text{AT}}{2} = \text{PK} + \text{AA}' = \text{PV}'.$$

La construction revient donc à mener, par le milieu de l'ordonnée à l'origine de la tangente TN, une parallèle à cette tangente et à rabattre sur AP$x$ le segment PV', ainsi déterminé, sur l'ordonnée des points M, N. Alors, VM est la normale au point M. (La nature de la question fait voir de quel côté il faut rabattre le segment PV'.)

## Autres constructions du trifolium oblique.

La construction donnée au début de cette notice, s'applique à la circonférence ($v$) dont le diamètre $2a$ est la hauteur du trapèze formé par les tangentes parallèles à ($f$) comprenant le trifolium; cependant on peut aussi prendre pour ligne fondamentale la circonférence (K) et alors on a la construction suivante *(fig. 16)* :

*Mener par le point* P *une corde quelconque* PA, *puis la corde* AB *perpendiculaire à* (f) *et projeter le point* B, *en* M, *sur* PA.

*Le lieu des points* M *est le trifolium.*

En effet, en le rapportant au pôle P et à l'axe polaire PP' ($f$), et désignant respectivement PD, PM, APP', P'PD, BDA par $2a$, $\rho$, $\omega$, $\theta$, $2u$, on a

$$\text{AB} = 4a \sin u, \qquad u + \theta = 2\theta + \omega,$$

et $$\rho = 4a \cos(\omega + \theta) - 4a \sin\omega \sin(2\omega + \theta),$$

équation qui se réduit simplement à

$$\rho = 4a \cos\omega \cos(2\omega + \theta), \tag{1}$$

et représente, par conséquent, le trifolium oblique ($g$) déjà obtenu par transformation du cercle ($v$). *(fig. 1 et 2).*

On déduirait de cette nouvelle construction *(fig. 16)* un certain

nombre de propositions de géométrie, par exemple, la nature de l'enveloppe des droites BMB', qui, d'après cela, doivent détacher, sur la circonférence (K) des arcs dans le rapport de 1 à 2, comptés à partir d'un point convenablement choisi.

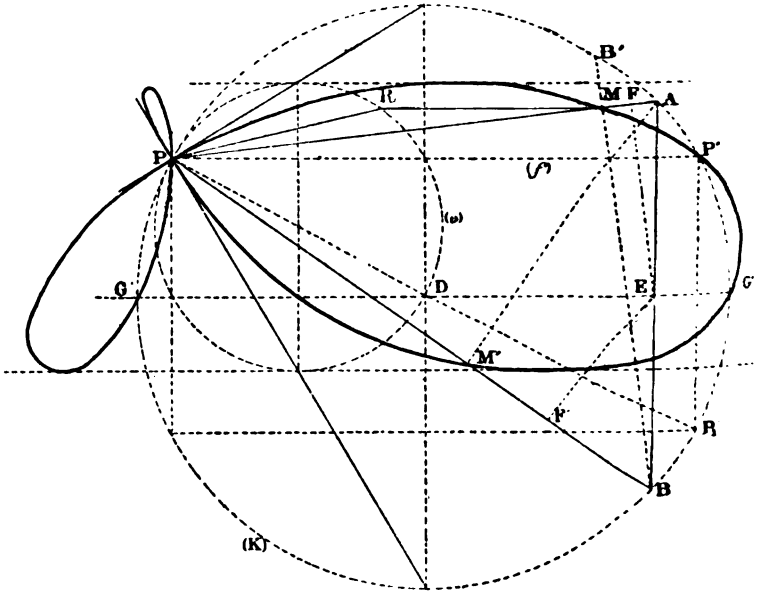



*Fig. 16.*

On formulerait aisément d'autres remarques analogues, dont nous laisserons au lecteur le soin de développer les conséquences.

Nous mentionnerons seulement les propositions suivantes :

*Les pieds* M *des hauteurs des triangles* PAB *se trouvent toujours entre les tangentes au cercle* (v) *parallèles à la direction* (f).

*La médiatrice du rayon vecteur* PM *rencontre la circonférence* (v) *en un point* R, *sommet d'un triangle isoscèle* PRM *dont le côté* RM *est parallèle à* (f).

Les développements exposés précédemment rendent ces diverses propositions intuitives.

Il n'a été question ici de la direction (*f*) que pour montrer comment elle intervenait dans la nouvelle construction du trifolium (*g*); il est toutefois possible de s'en affranchir, et de prendre, pour la direction (*f*), la direction perpendiculaire.

Aux définitions connues de l'hypocycloïde triangulaire on peut donc ajouter la suivante :

*Si un angle inscrit dans la circonférence* (K) *a un de ses côtés parallèle à une direction donnée* (f), *tandis que l'autre passe par un point donné sur la circonférence, la perpendiculaire à ce côté, menée par l'extrémité de l'autre, enveloppe une hypocycloïde triangulaire, tritangente au cercle donné.*

En résumé :

*Le lieu des pieds* M, M' *des hauteurs des triangles* PAB *inscrits dans un cercle* (K) *et dont une des hauteurs* PP' *est fixe, est un trifolium, podaire, relative au point* P, *d'une hypocycloïde triangulaire, tritangente à ce cercle.*

On en conclut encore la propriété suivante :

*Le rayon vecteur d'un trifolium est égal à celui de la circonférence tritangente à l'hypocycloïde correspondante, diminué du rayon vecteur d'un autre trifolium de même paramètre, mais orienté différemment.*

Cette propriété, qui paraît digne de remarque, résulte fort simplement de l'identité de nature des courbes représentées par les équations

$$\rho = h \cos(\alpha + \omega) \cos 2\omega,$$
$$\rho = h \cos(2\omega + \varphi) \cos \omega,$$
$$\rho = h \sin(2\omega + \varphi) \sin \omega.$$

La construction qui vient d'être représentée *(fig. 16)* peut être légèrement modifiée de la manière suivante :

*On donne une circonférence* (K) *et des cordes* PA, PB *issues d'un de ses points* P. *On projette* A *(ou* B*) en* E *sur un diamètre fixe* GG', *puis* E *en* F *sur* AP *(ou en* F' *sur* BP*); et l'on prend, sur la corde* AP *(ou* BP*) le segment* FM *égal à* AF *(ou le segment* F'M' *égal à* BF'.*)*

*Le lieu* (M) [*ou* (M')] *est un trifolium oblique.*

Cette construction est, en effet, une conséquence immédiate de la définition du trifolium comme lieu des pieds des hauteurs de triangles inscrits PAB dont une hauteur PP′ est donnée.

Il suffit de tracer le diamètre GG′ parallèle à cette dernière hauteur pour reconnaître l'exactitude de cette proposition.

De la même figure on pourra aisément déduire d'autres constructions du lieu (M, M′) et conclure différentes propriétés de cette courbe.

Voici, par exemple, une remarque très simple :

*Soient, dans une circonférence, des triangles inscrits* PAB *dont un sommet,* P, *est fixe, et un côté* AB *parallèle à une direction donnée* (f), *le lieu des projections de chacun des sommets* A *ou* B *sur une parallèle menée par le point* B, *ou* A, *à l'une des cordes* PA, PB, *est un trifolium oblique.*

Lorsque $\theta = o$, le lieu des points F, F′ est une courbe dont le rayon vecteur PF est la moyenne arithmétique entre celui de la circonférence PA, et celui du folium double, PM. La courbe (F, F′) a donc pour équation

$$\rho = 3a \cos \omega - 2a \cos^3 \omega.$$

Cette courbe admet un axe de symétrie et deux points d'inflexion qui, avec le pôle, forment un triangle équilatéral.

## Un mode de transformation géométrique.

La construction du trifolium en partant du cercle, représente un mode de transformation (*) qui a été signalé par M. G. de Longchamps (*Géom. analyt. loc. cit.*, p. 511), et qui a dû se présenter bien des fois à la curiosité des géomètres.

A défaut d'autres renseignements bibliographiques, il paraît

(*) La question proposée au concours de 1891 à l'École polytechnique, dont une solution est donnée dans le *Journal de Mathématiques spéciales*, pages 157-161, a pour point de départ la transformation de la parabole, par le mode en question. (G. L.)

digne d'une nouvelle attention, parce qu'il fournit très simplement un grand nombre de propriétés de certaines courbes, notamment de l'hyperbole équilatère et du trifolium.

Ces réserves faites sur la nouveauté des résultats, voici en quoi consiste la transformation :

*On donne une courbe* (U), *une direction* (f), *et un point* P, *pôle de la courbe (Fig. 17).*

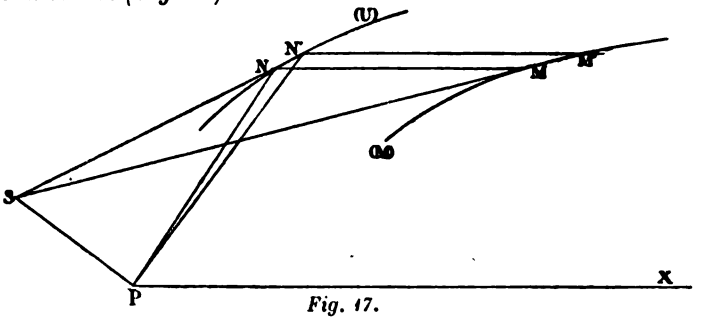



*Fig. 17.*

*Par le pôle, on mène des rayons vecteurs* PN, *que l'on rabat autour du point* N *dans la direction* (f).

*On demande le lieu* (M) *des points* M, M' *ainsi obtenus et le tracé de la tangente en* M, M' *à la courbe* (M), *connaissant la tangente* NS *au point* N *de la courbe* (U).

La méthode des limites conduit fort naturellement à la détermination de la tangente, ainsi que M. G. de Longchamps l'a établi *(loc. cit.*, p. 514) de la manière suivante, en supposant (ce qui est toujours possible), la direction (*f*) parallèle à l'axe polaire PX.

S désignant l'intersection des tangentes NN', MM', on a, par la similitude des triangles SNM, SN'M',

$$\frac{SN}{SN'} = \frac{NM}{N'M'} = \frac{PN}{PN'};$$

donc SP est une bissectrice de l'angle NPN'. A la limite, SP est perpendiculaire à PN.

Voici, de la même proposition, une autre démonstration communiquée par M. d'Ocagne.

*d*(N), *d*(M) désignant les différentielles des arcs décrits simultanément par les points N, M, on a évidemment

$$d(MN) = d(N)\cos\widehat{SNM} + d(M)\cos\widehat{SMN}.$$

Mais $$d(MN) = d(PN) = d(N) \cos \widehat{SNP}$$

et $$d(M) = \frac{MS}{NS} d(N).$$

Donc, après suppression du facteur $d(N)$

$$\cos \widehat{SNP} = \cos \widehat{SNM} + \frac{MS}{NS} \cos \widehat{SMN}$$

ou $NS \cos \widehat{SNP} = NS \cos \widehat{SNM} + MS \cos \widehat{SMN} = NM = NP$, et par suite l'angle NPS est droit.

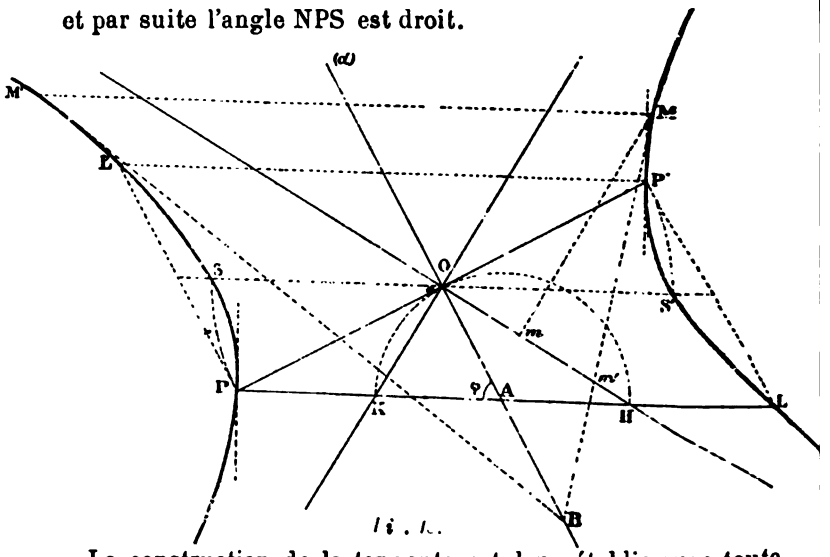



Fig. 18.

La construction de la tangente est donc établie avec toute la généralité désirable. Néanmoins, nous croyons utile d'exposer un autre moyen d'y parvenir.

La courbe (U) pouvant être considérée, dans le voisinage du point A, comme un élément de sa tangente, sa transformée, en ce point, se confondra avec la transformée d'une droite.

Or, on peut aisément reconnaître que la transformée d'une droite $(d)$ est une hyperbole équilatère circonscrite au parallélogramme PLP'L' dont les côtés sont parallèles aux droites $(d)$ $(f)$ et dont un des sommets est au point P, l'autre, P', étant symétrique par rapport à un point de la droite $(d)$ *(Fig. 18)*.

Si par le centre O, milieu de PP' sur la droite $(d)$, on mène une parallèle à $(f)$, ce diamètre de l'hyperbole rencontrera la courbe en deux points S, S', tels que $OS = OS' = OP$.

Donc les axes de l'hyperbole sont parallèles aux bissectrices de l'angle APO des directions (*d*), (*f*).

On observera que, par suite de l'égalité des segments PH, KL, des sécantes parallèles à (*f*), compris entre l'hyperbole et ses asymptotes, ces dernières sont définies par la condition que les triangles HAO, OAK soient isoscèles. On pourra donc obtenir les asymptotes par une construction directe :

Prendre un point A quelconque sur (*d*) et rabattre le segment OA suivant la direction (*f*) en AH, AK, puis joindre OH, OK. Ces droites seront les asymptotes de l'hyperbole équilatère transformée de la droite (*d*) par rapport au point P.

Les angles de ces asymptotes avec la droite (*d*) seront donc $\frac{\varphi}{2}$, $90 - \frac{\varphi}{2}$, $\varphi$ désignant l'angle PAO.

Par construction, le triangle PP'L est rectangle en P' et inscrit à l'hyperbole équilatère; donc, en vertu d'une propriété connue, la corde PL est normale en P à cette hyperbole.

C'est du reste ce qu'il serait aisé d'établir directement. Ainsi, l'hyperbole équilatère transformée d'une droite (*d*) est toujours normale, au pôle, à la direction (*f*).

Incidemment, on peut rappeler que PL est la longueur du diamètre du cercle de courbure à l'hyperbole au même point P.

De plus, aux points S, S', les tangentes à l'hyperbole sont parallèles à la droite (*d*).

Sur ces diverses propriétés, on pourra consulter les ouvrages suivants : Plücker, *Analyt. geom. Entwick.* t. I. p. 231; Marini, *N. A. M.* 1864, p. 327; Milinowski, *Elem. synt. Geom. der gleich. Hyperb.* 1883; Schoute, Congrès de Blois, 1884, p. 43; *Mathesis*, VI, 1886, p. 13.

Cela posé, il reste à déterminer les tangentes aux points M, M' déduits d'un point B de la droite (*d*).

Par définition et en vertu de ce qui précède, la droite (*d*) est le diamètre conjugué à la direction (*f*); donc les tangentes en M, M', se rencontrent sur la droite (*d*), en un point B'.

Ainsi, plus généralement, *les tangentes en* M, M' *se rencontrent sur la tangente à la courbe* (U) *au point* A.

Il suffit donc, en résumé, de connaître la tangente en un seul des points M, M'.

On l'obtiendra en projetant le point M, par exemple, en *m*, sur une des bissectrices précitées (asymptotes de l'hyperbole)

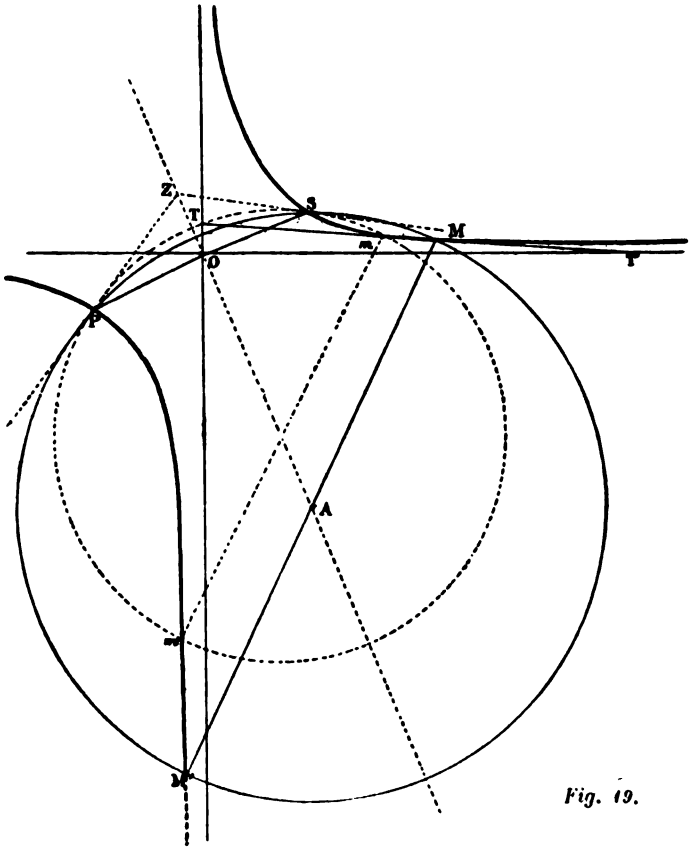



*Fig. 19.*

et prolongeant le segment O*m* d'une longueur égale *mm'* à partir du point *m*. M*m'* sera la tangente en M.

Mais on peut profiter aussi de la remarque précédente et modifier cette construction, en la rendant plus simple *(fig. 19)* :

Tracer le diamètre AOZ conjugué à la corde MM'; décrire la circonférence ayant A pour centre et AM pour rayon; elle rencontre l'hyperbole en deux points P, S, qui se trouvent être les intersections de la circonférence avec la corde POS

perpendiculaire à OA. Mener les tangentes à cette circonférence en P et S; elles se rencontrent en un point Z pôle de PS. ZM, ZM' sont les tangentes demandées.

La propriété précitée de l'hyperbole équilatère peut s'énoncer autrement :

*Une circonférence passant par deux points* P, S, *diamétralement opposés sur l'hyperbole équilatère rencontre cette conique en deux autres points* M, M' *tels, que la droite* MM' *est conjuguée à l'axe* OA *du cercle. Les cordes* PS, MM', *du cercle et de l'hyperbole ont même pôle* Z.

Ou bien encore :

Chacune des circonférences passant par deux points P, S diamétralement opposés sur l'hyperbole équilatère rencontre cette conique en deux autres points M, M', tels que la corde MM' a une inclinaison constante, symétrique de celle de la corde PS par rapport aux asymptotes. Donc ces cordes MM' admettent le même diamètre conjugué OA perpendiculaire à PS.OA est le lieu des pôles des cordes MM' et le pôle Z de la corde MM' par rapport à l'hyperbole est le même que celui de PS par rapport à la circonférence.

Il est utile d'observer que la corde MM' de l'hyperbole est en même temps un diamètre de la circonférence PSMM'.

Réciproquement, la circonférence décrite sur une corde MM' d'une hyperbole équilatère rencontre cette conique en deux autres points P, S, situés sur un diamètre de l'hyperbole. (Voir, à ce sujet, *N. A. M.*, 1879, p. 325; Charvet.)

On peut enfin donner une autre construction de la tangente en M, en observant que cette tangente est symédiane du triangle PSM.

Cette propriété, énoncée par M. E. Lemoine (*J. S.* 1884, p. 168 et 1886, p. 115), puis par M. d'Ocagne (*J. S.* 1889, p. 143) peut être établie comme il suit.

En vertu d'une propriété connue, le point M de contact de la tangente TMT' est le milieu du segment de cette tangente compris entre les deux asymptotes; donc le triangle OMT est isoscèle.

Mais, d'autre part, on sait que les cordes communes à un cercle et à une hyperbole équilatère sont également inclinées

sur les axes (ou sur les asymptotes); le triangle P'MS' est donc isoscèle et la bissectrice de l'angle PMS est parallèle à OT'.

Or, OM est la médiane du triangle PMS; TM est donc la symédiane. (Voir aussi *J. S.* 1890, pp. 122 et 131; G. Tarry.)

La même figure pourra nous servir pour l'application d'une autre propriété de l'hyperbole équilatère, indiquée par M. G. de Longchamps (*J. S.* 1889, p. 264) :

*Deux circonférences* MPSM', mPSm' *passant par deux points* P, S *diamétralement opposés sur l'hyperbole équilatère rencontrent celle-ci en des points* M, m (M', m') *tels que les angles* MSm, MPm (M'Sm', M'Pm') *sont égaux.*

Cette propriété résulte immédiatement du fait de l'égalité d'inclinaison des cordes SM, PM sur les asymptotes.

Enfin, en se reportant à la construction générale de la tangente en M à une courbe (M) transformée d'une courbe (U), on reconnaît immédiatement la propriété suivante :

*La tangente à l'hyperbole équilatère, transformée de la droite* (d), *rencontre celle-ci à son point d'intersection avec la perpendiculaire à* NP *menée du point* P.

La transformation géométrique dont il vient d'être question se traduit aisément par les formules suivantes (Voir *loc. cit.*, *Géom. analyt.* p. 523).

$$Y = y, \qquad X = x \pm \sqrt{x^2 + y^2},$$

d'où

$$y = Y, \qquad x = \frac{X^2 - Y^2}{2X}.$$

Ainsi, la droite dont l'équation est

$$y = mx + n,$$

se transforme en une hyperbole équilatère ayant pour équation

$$m(x^2 - y^2) - 2xy + 2nx = 0.$$

En coordonnées polaires, les formules précédentes deviendraient

$$r \sin u = \rho \sin \omega,$$

$$r \cos u = \frac{\rho \cos 2\omega}{2 \cos \omega}.$$

C'est ainsi, par exemple, que leur substitution dans l'équation de la circonférence (*v*)

$$r = 2a \cos (u + \theta),$$

donne pour résultat l'équation (2).

On peut reconnaître également d'autres propriétés des courbes transformées.

Si la courbe (M) admet des asymptotes rectilignes, la transformée en admet un nombre double, et ces nouvelles asymptotes sont les bissectrices des angles formés par les asymptotes de la courbe (U) et par la direction ($f$), les sommets de ces angles étant les projections du point P sur ces asymptotes.

Si ces droites sont parallèles, les asymptotes de la transformée sont représentées par deux séries de droites rectangulaires et parallèles, dont les intersections se trouvent sur la projetante du pôle P sur les asymptotes de (U).

Comme à chaque point de la proposée correspondent deux points de la transformée situés sur des droites parallèles, on voit qu'en général le degré de la transformée doit être double de celui de la proposée.

La transformation est donc biquadratique; mais le degré peut se réduire, si la direction ($f$) est parallèle à une droite jouant un rôle essentiel (axe de coordonnées, directrice, asymptote, axe de symétrie, etc.) ou si le point P se trouve sur la courbe ou sur une des droites précitées, etc.

C'est pourquoi certains cas particuliers de cette transformation méritent d'être signalés. On pourra citer les suivants :

Si les données sont, par exemple, une parabole (U), son foyer P, et l'axe ($f$), la courbe transformée (M) se compose, évidemment, de la directrice ($d$) et d'une parabole (U') ayant même axe et le point P pour sommet. Le paramètre de cette nouvelle parabole est moitié du précédent.

Dans ce cas, les hyperboles équilatères sont tangentes à la directrice, et normales à l'axe de la parabole au foyer P. Elles ont leurs centres sur la tangente au sommet de la parabole.

On en conclut que ces hyperboles ont pour enveloppe une parabole. C'est du reste ce qu'on peut vérifier par l'analyse.

En effet, la parabole donnée étant représentée par l'équation

$$y^2 = 2px + p^2,$$

l'hyperbole équilatère tangente aux droites $x = 0$, $x = -p$, et ayant son centre sur la droite $y = mx$ a pour équation

$$x^2 - y^2 + 2mxy + (1 + m^2)px = 0.$$

L'équation de l'enveloppe de ces courbes est donc

$$x^2y^2 - px(x^2 - y^2 + px) = 0,$$

qui se décompose en

$$x = 0, \quad x = -p, \quad y^2 = px.$$

Si les données sont une parabole (U), le sommet P, l'axe (*f*), la transformée est une cubique formée de deux arcs symétriques par rapport à l'axe, se croisant au point P et dont une branche est asymptote à une droite parallèle à l'axe des *y* et à une distance du point P égale au paramètre de la parabole.

Si les données sont une hyperbole équilatère

$$xy = a^2,$$

le centre P, l'asymptote PX, la direction (*f*) parallèle à PX, on a, par les formules précédentes,

$$Y(X^2 - Y^2) = 2a^2X.$$

Cette transformée se compose de deux branches hyperboliques asymptotes à PX et à la bissectrice de l'angle des axes, et d'une branche, à inflexion au point P, et en deux autres points et asymptote à la perpendiculaire à la bissectrice précitée (voir *loc. cit. Géom. analyt.*, p. 524).

La construction de cette courbe nous a été signalée en 1863, comme question d'examen. Nous devons admettre que l'auteur de cette question avait employé la transformation étudiée ci-dessus; cependant cette construction ne nous a pas été indiquée.

## Hyperboles équilatères tangentes au trifolium oblique.

La transformation que nous venons d'étudier, appliquée à un cercle (c), donne en général une courbe du quatrième degré dont les dimensions dépendent de trois paramètres :

La distance du point P au centre O du cercle;

Le rayon du cercle;

L'angle de la direction (*f*) avec la droite OP.

Mais ces paramètres se réduisent à deux, si le point P est situé sur la circonférence.

On obtient alors, suivant les valeurs de l'angle des deux directions (*f*) et OP, toutes les variétés du trifolium oblique.

Ces diverses courbes présentent, par conséquent, les propriétés suivantes :

La circonférence ($v$) est la ligne diamétrale des cordes parallèles à la direction ($f$).

Le cercle donné et le trifolium sont tangents à deux parallèles à la direction ($f$).

Chacune des cordes ($f$) rencontre le trifolium en quatre points, formant deux couples (M, M'), ($m$, $m'$), correspondant à deux hyperboles équilatères et à deux points A, $a$, de la circonférence. Les tangentes en A, $a$, à ce cercle, passent par les points de rencontre T, $t$, des tangentes TM, TM', $tm$, $tm'$ au trifolium.

La propriété des tangentes au trifolium ($g$) aux points G, G' d'être parallèles entre elles et perpendiculaires à PD est une conséquence de la propriété des tangentes à l'hyperbole équilatère. En effet, le point D devient alors le centre de l'hyperbole; donc les tangentes à cette courbe aux points G, G' opposés sur un de ses diamètres sont parallèles à la tangente en D au cercle ($v$), c'est-à-dire perpendiculaires à PD.

Le trifolium est l'enveloppe d'hyperboles équilatères normales au point P à la direction ($f$), et dont les centres sont sur la cardioïde, podaire de la circonférence par rapport au point P.

Les tangentes communes au trifolium et à l'hyperbole équilatère peuvent s'obtenir par un tracé dérivé des seules données, sans qu'il soit nécessaire de représenter l'hyperbole. Il suffit, pour cela, de mener la tangente en A au cercle ($v$) et en P au cercle MPM', ayant A pour centre et PA pour rayon.

On pourrait, enfin, essayer d'appliquer l'analyse à la recherche de l'enveloppe des hyperboles équilatères précitées, mais le développement des formules serait probablement très compliqué. On peut l'abréger en observant que le résultat dérive de la remarque suivante:

L'enveloppe des hyperboles équilatères tangentes à l'origine à l'axe des $y$ et dont les centres se trouvent sur la podaire de l'origine par rapport à une courbe donnée est une autre courbe dont l'équation se déduit de la première, rapportée aux mêmes axes, par le seul changement de $x$ en $\frac{x^2 - y^2}{2x}$, $y$ restant invariable.

## Questions diverses.

Au cours de ces recherches, nous avons rencontré certaines questions présentant une corrélation plus ou moins directe avec l'étude du trifolium et nous avons pensé qu'il y aurait utilité à en indiquer ici quelques applications.

I. — C'est ainsi, par exemple, que les constructions données dans ce qui précède s'adaptent parfaitement à l'étude géométrique de la question 173, énoncée par M. Amigues (*J. S.* 1885, p. 192):

*On donne un triangle rectangle* IPI′ *(supposé isoscèle); on lui circonscrit un cercle et une hyperbole équilatère variable. Ces deux courbes ont alors en commun trois points fixes* I, P, I′, *et un point variable* R. *En ce dernier on mène la tangente* MRM′ *à l'hyperbole. Trouver le lieu des points d'intersection* M′ *de cette tangente avec les parallèles menées par le sommet* P *de l'angle droit aux asymptotes de la même hyperbole.*

Une solution analytique a été publiée (*loc. cit.*, 1888, p. 93), mais la question peut se traiter très simplement par la géométrie.

En effet, en utilisant le résultat déjà obtenu, on est très naturellement amené à supposer que les tangentes aux hyperboles équilatères doivent être les cordes du trifolium parallèles la direction (*f*), puisque la construction représentée (*fig. 1 et 2*) fait reconnaître que ces cordes sont vues du point P sous un angle droit MPM′. Donc les deux rayons vecteurs PM, PM′ sont parallèles aux asymptotes d'une hyperbole équilatère ayant PR pour diamètre conjugué à la direction (*f*) perpendiculaire à II′.

L'hyperbole est donc déterminée; mais la proposition 173 montre que chaque hyperbole passe par les deux points fixes II′ diamétralement opposés sur le cercle (*v*) et ainsi l'on peut énoncer la corrélation suivante entre le trifolium (droit ou oblique) et l'hyperbole équilatère :

Chacune des cordes MM′ du trifolium parallèles à la direction (*f*) est tangente en son milieu R à une hyperbole équi-

latère ayant son centre au milieu de PR, passant par les deux points fixes I, I′ du cercle (*v*) diamétralement opposés dans la direction perpendiculaire à (*f*), et admettant pour asymptotes des parallèles aux rayons vecteurs PM, PM′.

Cette corrélation n'est en définitive que l'application des propriétés déjà énoncées pour l'hyperbole équilatère :

1° La circonférence IPI′ décrite sur une corde II′ de l'hyperbole équilatère comme diamètre rencontre la courbe en deux points P, R diamétralement opposés sur cette conique;

2° Toute circonférence IPI′ passant par deux points P, R diamétralement opposés sur une hyperbole équilatère rencontre la courbe en deux autres points I, I′ diamétralement opposés sur cette circonférence.

Ces propriétés viennent s'ajouter aux analogies, déjà si nombreuses, entre le cercle et l'hyperbole équilatère.

II. — Les relations que nous venons d'exposer en tous détails entre la circonférence, l'hypocycloïde triangulaire et l'hyperbole équilatère, permettent de résoudre complètement et d'une manière pour ainsi dire intuitive, une question déjà énoncée dans le *Journal de Mathématiques élémentaires et spéciales* n° 397, t. V, 1881, p. 526 :

*Étant donnés trois points dans un plan, on considère toutes les hyperboles équilatères passant par ces trois points; et, de l'un des points donnés, on mène des perpendiculaires sur les asymptotes de toutes ces hyperboles. On demande le lieu des pieds de ces perpendiculaires.*

Les trois points donnés A, B, C, et l'orthocentre D correspondant au triangle ABC, forment ce que M. G. de Longchamps a proposé d'appeler un *groupe orthocentrique* (*Mathesis* 1888, pp. 56 et 209), parce que chacun de ces points est l'orthocentre du triangle formé par les trois autres points. C'est pourquoi nous croyons avantageux, dans la question actuelle, de ne pas distinguer l'orthocentre par la lettre spéciale habituellement employée.

Cela posé, considérons seulement le triangle ABC.

On sait que toutes les hyperboles équilatères circonscrites au triangle ABC passent par son orthocentre D.

Le lieu des centres de ces coniques est la circonférence (E)

des neuf points (cercle d'Euler) (cas particulier de la conique des neuf points qui est le lieu des centres des coniques passant par quatre points) (J. S. IV, 1880, p. 108).

Soit donc O un point de cette circonférence. On aura immédiatement, par symétrie, quatre autres points A′, B′, C′, D′ de l'hyperbole, ce qui permettra de reconnaître complètement la situation et le tracé de la conique, dans les différentes régions du plan.

On choisira, parmi ces conditions surabondantes, celles qui suffisent pour déterminer l'hyperbole équilatère, c'est-à-dire, par exemple, deux points A, B et le centre O.

Ce sont précisément les données du problème traité *(J. S.* 1882, p. 255). Pour déterminer les asymptotes, on pourra appliquer une des constructions suivantes :

1° Décrire la circonférence Δ passant par A, B, A′ et tracer le diamètre BB″ dont l'extrémité B″ se trouve alors sur l'hyperbole. (Cette propriété de l'hyperbole équilatère, n'est autre, comme on le voit, que le théorème rappelé par M. Charvet, N. A. M. 1879, p. 325, et dont nous avons indiqué l'application à l'étude qui précède. Observons, pareillement, que ce théorème peut servir à démontrer la proposition 279 énoncée par M. G. de Longchamps, *J. S.* 1890, p. 48.) Le triangle ABB″, rectangle en A, est inscrit à l'hyperbole équilatère. La tangente en A est la perpendiculaire AK à l'hypoténuse BB″ *(J. S., loc. cit.*, p. 156).

Du point A comme centre, avec OA pour rayon, on décrit une circonférence qui rencontre AK en deux points M, N; OM, ON sont les asymptotes.

2° O′ étant le centre du cercle Δ, on peut aussi décrire une circonférence ayant O pour centre et OO′ pour rayon ; elle rencontre BB′ en deux points *m*, *n*, situés sur les asymptotes *(loc. cit.)*.

3° Enfin, on peut recourir au tracé des bissectrices de l'angle formé par les droites AA′, BB″. Ces bissectrices sont parallèles aux axes, et on en déduit aisément les asymptotes *(ibid.)*.

Les asymptotes correspondant à un point O quelconque du cercle (E) d'Euler forment donc des couples de cordes OI, OJ, aboutissant aux extrémités I, J, d'un diamètre IJ de ce cercle.

L'enveloppe des asymptotes est donc une courbe telle, que le lieu du sommet de l'angle formé par deux tangentes rectangulaires soit une circonférence.

De plus, les trois hauteurs AD, BD, CD du triangle ABC sont tangentes à la courbe cherchée ; il en est de même des trois côtés du triangle, car ces côtés forment, avec les hauteurs correspondantes, trois angles droits, auxquels se réduisent trois des hyperboles équilatères.

La courbe enveloppe est donc l'hypocycloïde triangulaire tritangente à la circonférence (E) d'Euler, et le lieu des points définis dans l'énoncé 397 est la podaire de l'hypocycloïde triangulaire par rapport à un point A, B, C, intérieur à cette courbe et extérieur au cercle (E) tritangent.

Cette podaire est composée de trois boucles et représente une sorte de trifolium oblique.

III. — Les propriétés précédentes trouvent pareillement leur application à l'étude d'une autre question, énoncée par M. G. de Longchamps (J. S. 1882, n° 11) :

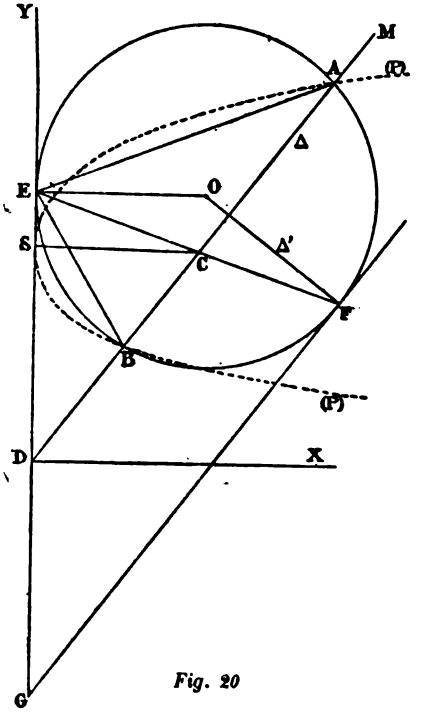



*Fig. 20*

*On donne une parabole* (P) *et un point* M$(\alpha, \beta)$ *dans son plan. Par ce point, supposé fixe, on fait tourner une droite* Δ *qui rencontre* P *en* A *et* B, *et l'axe de la parabole au point* C. *Par les points* A *et* B *on fait passer un cercle qui touche en* E *la tangente au sommet* S *de la parabole. La droite* CE *rencontre cette circonférence en un second point* F *que l'on joint au centre* O *du cercle, ce qui donne une droite* Δ'.

[redacted]

Il reste à prouver que le point S est la projection du point C. Or, on a

$$DS = CD \cos SDC = \sqrt{DA.DB} \cos SDC;$$

ou, en fonction des coordonnées :

$$DS = m\sqrt{ab}.$$

Voici une autre solution du problème de la *détermination d'une parabole dont on donne les points* A, B, *la tangente en* B *et la direction* BE *ou* δ *de l'axe ou des diamètres.* (Fig. 21)

On aura un troisième point C en menant AC parallèle à BD, puis prenant $CE = AE$.

Pour déterminer l'axe de la parabole, il suffira de connaître le point M de rencontre de la conique avec la sécante AM perpendiculaire à δ.

A cet effet, considérons l'hexagone de Pascal ABCMFGA, dont deux sommets F, G sont rejetés à l'infini dans la direction δ, et dont le côté FG est tout entier rejeté aussi à l'infini.

On aura à combiner :

1° Les droites BC, MF (δ), qui donnent un point V;

2° Les droites AM, CF (δ), qui donnent un point O;

3° Les droites AB, GF; cette dernière rejetée à l'infini; leur intersection se fait donc à l'infini, sur AB. La droite de Pascal est par conséquent parallèle à AB. Mais elle passe par les points O et V. On obtiendra donc le point V par l'intersection de BC avec la parallèle à AB menée par le point O.

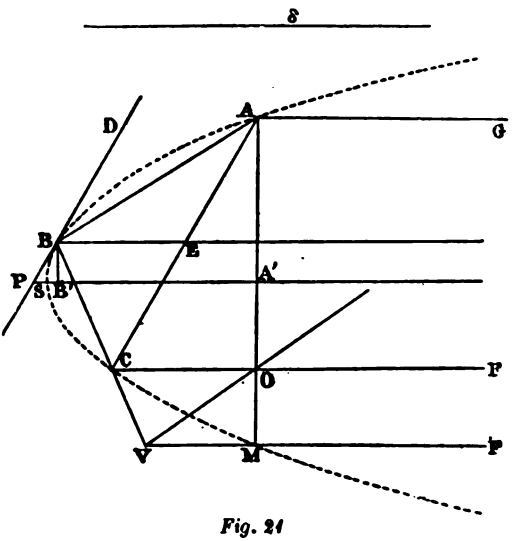



*Fig. 21*

## Résumé et conclusions.

La corrélation entre le trifolium et l'hypocycloïde triangulaire nous semble devoir présenter, aux lecteurs de cette Notice, un intérêt autre que celui d'une simple étude géométrique. La nécessité de la connaissance de quelques propriétés essentielles de l'hypocycloïde se trouve en effet justifiée par la nature des questions qui ont été proposées, par exemple, pour le concours d'admission à l'École polytechnique en 1874, puis en 1887. Le lieu géométrique de 1874 était la quartique trinodale associée à l'hypocycloïde triangulaire; celui de 1887 était un trifolium oblique, podaire de l'hypocycloïde, par rapport à un point de la circonférence tritangente. Enfin, la question de mathématiques donnée en 1891 pendant l'impression même de ce travail ne pouvait venir mieux à propos pour confirmer l'utilité d'une étude particulière du trifolium dans le *Journal de Mathématiques spéciales*.

Après la solution si complète qui vient d'être donnée dans ce même recueil, nous ne pouvons avoir d'autre but que de chercher à montrer les facilités que l'étude de cette question peut retirer de l'application des remarques présentées dans les paragraphes précédents.

Supposons la parabole (U) rapportée à son foyer F et à un axe polaire FX, différent de l'axe SF.

Soient $r$, $\theta$ les coordonnées polaires d'un point de la courbe, $p$ le paramètre, $\alpha$ l'angle des droites FX, SF.

La parabole (U) aura pour équation

$$(U) \qquad r = \frac{p}{1 - \cos(\alpha - \theta)}.$$

La transformée (A) s'obtiendra par les formules

$$\rho = 2r\cos\omega, \qquad \theta = 2\omega,$$

et la transformée (B), par les formules

$$\rho = 2r\cos(\omega_1 - \theta), \qquad \omega_1 = \frac{\theta}{2} + 90^\circ.$$

On aura donc

(A) $$\rho = \frac{2p\cos\omega}{1-\cos(\alpha-2\omega)},$$

(B) $$\rho = \frac{-2p\cos\omega}{1+\cos(2\omega-\alpha)},$$

équations de deux paraboles normales à l'axe polaire, à l'origine, ayant leurs axes parallèles aux directions rectangulaires :

$$\omega_A = \frac{\alpha}{2}, \qquad \omega_B = \frac{\alpha}{2} + 90^\circ.$$

Les paramètres des trois paraboles ont, pour valeurs respectivement,

$$p_U = p, \qquad p_A = \frac{p}{2}\cos\frac{\alpha}{2}, \qquad p_B = \frac{p}{2}\sin\frac{\alpha}{2}.$$

On en conclut $$p_A^2 + p_B^2 = \frac{p^2}{4}.$$

En coordonnées rectangulaires, les trois paraboles ont pour équations

(U) $$(x\sin\alpha - y\cos\alpha)^2 - 2p(x\cos\alpha + y\sin\alpha) - p^2 = 0,$$

(A) $$\left(y\cos\frac{\alpha}{2} - x\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2 - px = 0,$$

(B) $$\left(x\cos\frac{\alpha}{2} + y\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2 + px = 0,$$

et leurs axes

(U') $$x\sin\alpha - y\cos\alpha = 0,$$

(A') $$y - \left(x - \frac{p}{2}\right)\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = 0,$$

(B') $$y + \left(x + \frac{p}{2}\right)\cot\frac{\alpha}{2} = 0.$$

Les axes (A'), (B') passent par le sommet S de la parabole (U), point dont les coordonnées sont

$$x = -\frac{p}{2}\cos\alpha, \qquad y = -\frac{p}{2}\sin\alpha.$$

Dans le même système de coordonnées, les formules de transformation géométrique seraient, comme on l'a vu p. 42 :

$$y = Y, \qquad x = \frac{X^2 - Y^2}{2X};$$

l'équation (U) deviendrait

$$[(x^2-y^2)\sin\alpha - 2xy\cos\alpha]^2 - 4px[(x^2-y^2)\cos\alpha + 2xy\sin\alpha] - 4p^2x^2 = 0.$$

On vérifierait facilement qu'elle est le produit des équations (A) et (B).

Par suite du mode de construction même des points A, B, on peut reconnaître que les deux paraboles (A), (B) sont normales à FX et par conséquent tangentes entre elles à l'origine F, et qu'elles admettent une tangente commune, parallèle à FX et également tangente à la parabole (U).

La tangente aux trois paraboles a pour équation

$$y = -\frac{p}{\sin\alpha}.$$

L'étude complète de la question nous entraînerait hors de notre cadre, nous laisserons donc ce soin au lecteur.

## Indications bibliographiques.

Voici, d'après les renseignements qu'il nous a été donné de recueillir, les indications bibliographiques les plus essentielles au sujet du trifolium.

### TRIFOLIUM OBLIQUE

1874. *H. Brocard.* — Mémoires sur divers problèmes de géométrie dont la solution dépend de la trisection de l'angle. Alger, 12 p. gr. in-4°, 1 pl. §§ 21, 22 23.

1887. *G. de Longchamps.* — Sur le trifolium. *J. S.* 203-205, 220-223.

1887. *J. Neuberg et H. Brocard.* — Concours de l'Ecole polytechnique en 1887. *Mathesis.* 182-183. Solutions analytique et géométrique.

1887. *G. de Longchamps.* — Même question. *J. S.* 162-164. Solution géométrique.

1888. *E. Barisien.* — Même question. *N. A. M.* 244-248. Solution analytique.

1888. *Anonyme.* — Même question. *N. A. M.* 248-252. Solution géométrique.

## TRIFOLIUM RÉGULIER

1870. *L. Painvin.* — Note sur l'hypocycloïde à trois rebroussements. Théorème IX. *N. A. M.* p. 262.

1887. *H. Brocard.* — Le trifolium équilatéral. *J. S.* p. 68.

## TRIFOLIUM DROIT

1884. *G. de Longchamps.* — *Géométrie analytique*, t. II, 511-515. Construction du trifolium droit. Tracé de la tangente.

1886. *G. de Longchamps.* — *Géométrie de la règle*, § 126. *J. S.* p. 254. Le trifolium droit.

1887. *H. Brocard.* — Le trifolium droit. *J. S.* p. 68.

1888. *Amigues.* — Question 173. *J. S.* p. 93.

## FOLIUM DOUBLE

1869. Concours d'admission à l'Ecole polytechnique. — Lieu des projections M du point O, sommet d'un angle droit AOB sur les axes des paraboles tangentes aux trois côtés du triangle isoscèle OAB (*N. A. M.* 1869, 378-384). Solution. (Le lieu de M est un folium double).

1873. Concours d'admission à l'Ecole centrale. — Soit AB le diamètre vertical d'une sphère Σ. Par A on mène une droite AZ inclinée de 45° sur AB, et l'on imagine le cône Γ de révolution ayant AZ pour axe et AB pour génératrice. L'intersection des surfaces Γ, Σ se projette sur un plan perpendiculaire à AB suivant une courbe (M). — Solution. Le lieu (M) est une transformée homographique du folium double.

(Ces deux indications nous sont communiquées par M. G. de Longchamps.)

*Note.* — Si l'on remplace, dans la première de ces questions, le triangle isoscèle OAB par un triangle quelconque, le lieu M devient un trifolium oblique. Cette étude a été exposée dans le *Journal* (autographié) *de Mathématiques spéciales* du lycée de Montpellier, n° 1 du 15 décembre 1869, mais la construction de la courbe n'a pas été exactement représentée.

1886. *G. de Longchamps.* — Le folium double. *J. S. Géométrie de la règle*, § 123, p. 251-252.

1887. *H. Brocard.* — Le folium double. *J. S.* p. 66-67.

1887. *G. de Longchamps.* — Le folium double. Mémoire inédit (*).

1889. *G. de Longchamps.* — Exercice écrit n° 22. Le lieu (J), défini dans cette question, est le folium double (*J. S.* 166 et 188).

---

(*). Le Mémoire que cite ici M. Brocard est celui dont j'avais annoncé (*Journal* 1886, p. 252) la prochaine publication. Mais l'abondance des

En attendant que cette étude reçoive de nouveaux développements, nous croirons avoir atteint notre but si nous avons contribué à établir que l'hypocycloïde triangulaire et le trifolium méritent de trouver place dans l'enseignement classique, au même titre que les podaires du cercle et de la parabole, qui se rencontrent si fréquemment dans les questions d'examens.

L'hypocycloïde triangulaire est, il est vrai, de date relativement récente, mais l'étude qui en a été faite par les Géomètres de notre siècle lui a donné une grande importance. Le moment paraît venu de réclamer pour elle la place qui lui convient dans les programmes ou dans les Traités de Géométrie analytique.

---

manuscrits qui m'ont été proposés depuis cette époque pour être insérés, et le peu d'intérêt que présentait ce travail, me l'ont fait oublier. Cet intérêt se trouve encore diminué aujourd'hui par la publication du Mémoire que M. Brocard vient de consacrer à l'étude de cette famille de courbes remarquables à laquelle appartient le folium double. Aussi la Note en question peut-elle rester inédite, sans inconvénient.

G. L.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 10322-8-91.

# BIBLIOGRAPHIE (*)

SYNOPSIS DER HÖHEREN MATHEMATIK von JOHANN G. HAGEN, S. J., Director der Sternwarte des Georgetown College, Washington, D. C. Erster Band. Arithmetische und algebraische Analyse. — Berlin, Verlag von Felix L. Dames, 47, Tauben-Strasse, 47, MDCCCXCI. — Un volume grand in-4° de VIII-399 pages.

« L'œuvre entreprise par le R. P. Hagen est à la fois colossale dans le travail qu'elle réclame, d'une importance considérable par son utilité indiscutable, enfin véritablement neuve comme conception.

» Tout homme qui s'adonne aux sciences mathématiques finit par se concentrer dans un cercle assez étroit, science pure ou applications. Mais il arrive à chaque instant qu'il rencontre, dans son propre domaine, des questions dont l'étude réclame des éléments qui lui sont étrangers, soit parce que ces éléments n'étaient pas classiques au temps de ses études, » soit parce qu'ils appartiennent à une partie élevée de la science. « Alors, pour se mettre au courant, que de recherches et de temps perdu !

» L'ouvrage que nous annonçons remédie à ce mal. Tous les résultats acquis dans les hautes mathématiques » jusqu'à une certaine limite que nous signalerons plus bas, « sont ici groupés avec ordre, de façon qu'on s'y oriente avec une grande facilité. Les définitions sont données et expliquées, les théorèmes énoncés; il ne manque que les démonstrations, et d'abondantes indications bibliographiques permettent au lecteur de les trouver à bonne source. Partout le fil logique reste apparent, ce qui distingue cet ouvrage d'un pur dictionnaire ou recueil de formules. Une foule de notes critiques ou historiques en rendent la lecture plus intéressante. »

(*) Extrait de la *Revue des questions scientifiques*, 1892, Deuxième série, t. II (t. XXXII de la collection), livraison d'octobre pp. 594-601.

-gretté Gilbert, publiée l'an dernier
*... belge* (30 septembre 1891, p. 367),
... res exacte de l'Encyclopédie publiée
qu'elle ne fait pas connaître les limites
... a dû forcément borner sa tâche. En
... aux sujets exposés dans les meilleurs
...oires devenus classiques; il fait connaître
...s principaux résultats acquis et, ce qui
... les lacunes qui restent à combler. L'histo-
...e peut se refaire au moyen des innom-
...nts bibliographiques contenus dans les
... l'ouvrage. Ces renseignements ont été
...es et aux mémoires utilisés pour la compo-
... mais toutes les citations, aussi bien celles
...aticiens depuis Euler que celles des recueils
... vérifiées, chaque fois que la chose a été

...stématique et historique du R. P. Hagen est
...sections que l'on peut grouper en quatre

...mbres (nombres entiers, quantités complexes,
...eorie des séries (séries, produits infinis, frac-
...ifférences et sommes); théorie des fonctions,
... des invariants et des substitutions; théorie des

...mer l'indication des matières traitées dans
... douze sections, en traduisant les titres des cha-
...els elles sont subdivisées.

... *mbres entiers* (pp. 1-42). 1. Décomposition des
...mes : partitions, décompositions en nombres
...culièrement en carrés (par exemple, en cinq
...quel est cité même le mémoire assez récent
...nes quadratiques; fractions décimales, avec
...es les plus récentes de ces fractions. 2. Décom-
...; indication des tables; propriétés de la fonc-
...r dit trop peu de chose des nombres parfaits.
...re des nombres premiers. L'auteur indique les
... sur ce sujet difficile, en oubliant de signaler
... de Gram *(Mém. de l'Ac. de Copenhague,*
...plement de celui de Riemann. 4. Congruences
... Residus. Théorèmes de Fermat et de Wilson.

6. Résolution des congruences. 7. Congruences du premier degré (nombreuses méthodes; soit dit en passant, celle de Poinsot n'a pas vraiment été démontrée par son auteur). 8. Congruences simultanées. 9. Congruences binômes. Racines primitives. 10. Congruences quadratiques. Résidus et non résidus. Au point de vue historique, il y a ici une petite lacune : Kronecker *(Monatsberichte* de Berlin, 22 avril 1875, pp. 267-274), a montré qu'Euler a trouvé le premier l'énoncé complet de la loi de réciprocité ; selon nous, elle devrait porter son nom, ou celui de Gauss qui l'a démontrée. Il faudrait aussi citer ici le mémoire *(J. de Schlömilch, XXX, 1887)* où Baumgart a analysé la plupart des démonstrations de cette loi célèbre (celles de Schaar exceptées), ainsi que les travaux récents de Kronecker et de Lucas. 11. Indices ou exposants. 12. Congruences algébriques, jusques y compris la théorie des racines imaginaires de Galois. N'y a-t-il pas sur ce sujet d'autres travaux de Dedekind que celui qui est cité p. 37?

II. *Théorie des quantités complexes* (continues ou discontinues) (pp. 43-54). 1. Définitions. Il y a ici une appréciation historique que nous ne partageons nullement. L'auteur fait observer avec justice que c'est Argand qui a inventé, en 1806, la représentation géométrique des imaginaires, en même temps que Buée; qu'il a encore exposé la même chose plus tard (1813-1815), dans les *Annales de Gergonne;* mais il ajoute que c'est Gauss qui l'a fait connaître d'une manière générale dans un article bibliographique où il annonçait l'un de ses propres ouvrages, le 23 avril 1831. Nous doutons fort que l'article anonyme de Gauss, sur un sujet très difficile, la théorie des résidus biquadratiques, enfoui dans un recueil non spécialement mathématique et rédigé en allemand, ait eu sur les géomètres l'influence des articles beaucoup plus accessibles d'Argand publiés en 1813, dans le seul grand journal de mathématiqnes qui existât alors. Dès 1828, Mourey faisait paraître, d'après les idées d'Argand, sa *Vraie théorie des quantités négatives et des quantités prétendues imaginaires,* ce qui prouve que la conception d'Argand était descendue même dans le domaine de l'enseignement élémentaire. 2. Nombres complexes de Gauss. 3. Nombres complexes de Kummer. 4. Nombres complexes généraux.

Les sujets abordés dans cette seconde section et les ouvrages cités, qui comptent parmi les écrits les plus profonds que l'on ait jamais publiés sur les mathématiques (par exemple, les *Grundzüge* de Kronecker), montrent dans quel esprit élevé est conçue la *Synopsis.*

III. *Théorie des combinaisons* (pp. 55-68). 1. Permutations. 2. Combinaisons. 3. Arrangements ou plutôt permutations à deux indices. 4. Propriétés des coefficients binômiaux. 5. Somme des coefficients binômiaux. Dans le dernier chapitre plusieurs formules appartiennent à l'auteur.

IV. *Théorie des séries* (pp. 69-113). Cette section est l'une des plus importantes de la *Synopsis* et l'une de celles qui contiennent le plus de renseignements précieux. L'auteur indique au début, comme ouvrages principaux consultés, le *Calcul différentiel,* d'Euler ; le *Traité des différences,* de Lacroix; le *Traité élémentaire des séries,* de Catalan; les *Résumés analytiques* et l'*Analyse algébrique,* de Cauchy, enfin l'*Histoire des séries,* de Reiff; mais il s'est beaucoup servi, dans son exposition, d'un grand nombre d'autres écrits et en particulier de ceux de Pringsheim. On peut regretter qu'il n'ait pas connu ceux de Cesáro, si remarquables au point de vue de la rigueur et de la précision. Nous aurions voulu aussi voir employer les désignations suivantes : *Série indéterminée* (Olivier, Catalan) = série non convergente, où la somme de $n$ termes n'a pas une limite infinie ; *équiconvergente* (Gilbert) = Gleichmässig convergent ; *semi-convergente* (Jordan) = bedingt convergent ; *série pseudo-convergente* = série convergente en apparence seulement, comme la série de Stirling, que Legendre *(Exercices de calc. int.,* 1811, p. 394) appelait *demi-convergente (halbconvergente Reihe* de la *Synopsis,* IV, I, A, n° 3, p. 70).

Voici le détail des matières traitées dans la quatrième section : 1. Convergence et divergence : définition; conditions générales (il aurait fallu donner ici le criterium général de Cauchy, qui est insuffisant dans le sens critiqué par Catalan, mais nécessaire et suffisant quand on l'entend dans le sens de Cauchy. Voir notre *Résumé du Cours d'analyse infinitésimale de l'Université de Gand,* pp. 234-241, ou Bertrand, *Algèbre,* t. II, pp. 3-4); criteriums spéciaux; séries imaginaires ou multiples; transformation des séries. 2. Calcul des séries : addition, multiplication, division, élévation aux puissances, extraction de racines, logarithme d'une série, dérivation et intégration (incomplet); usage des séries divergentes. 3. Séries arithmétiques. Quelques formules seraient plus simples si l'auteur employait la notation $\nabla^n u$ pour $u_n$. 4. Séries harmoniques : du premier ordre, constante d'Euler; d'ordre supérieur; fonctions de Bernoulli; nombres de Bernoulli (on pourrait signaler ici les démonstrations de la formule de von Staudt, données par Lucas et Cesáro). 5. Séries

ordonnées suivant les puissances de la variable : convergence et continuité ; séries récurrentes ; séries géométriques ; séries hypergéométriques ; séries dont chaque terme est une partie aliquote du précédent. 6. Développement des fonctions en séries : Théorèmes généraux de Cauchy, Taylor, Maclaurin, Lagrange, Liouville ; séries binômiale, exponentielle ; série logarithmique ; séries trigonométriques, nombres d'Euler ; théorème de Lindemann sur $\pi$. Pourquoi n'est-il rien dit ici du théorème analogue de Hermite sur $e$ ?

V. *Produits infinis et facultés* (114-124). 1. Produits infinis : convergence ; développements des fonctions en produits infinis ; transformation en série. 2. Facultés : définitions, formules fondamentales, transformation en série. 3. Factorielles ; ici plusieurs propriétés de la fonction gamma.

VI. *Fractions continues* (125-141). 1. Définition. 2. Réduites. 3. Réduites secondaires. 4. Convergence. 5. Inversion et symétrie. 6. Fractions continues périodiques. 7. Développement des fonctions et des séries en fractions continues. 8. Fractions continues d'ordre supérieur. 9. Fractions continues ascendantes. Sauf erreur, on ne trouve pas cités dans ce chapitre, ni l'important Mémoire de Hermite *Sur la fonction exponentielle* (1873), ni l'excellent manuel de Possé, *Sur quelques applications des fractions continues* (Pétersbourg, 1886).

VII. *Différences et sommes* (142-171). 1. Différences. Ici surtout la notation par le delta renversé aurait rendu plusieurs formules plus intuitives. 2. Sommes. 3. Interpolation (la formule de Newton pour des ordonnées équidistantes *ou non*, est déjà dans les *Principes*. On peut aussi citer sur la matière les deux monographies de Merrifield et de Radau). 4. Équations aux différences, du premier ordre, linéaire ou non, du $n^{ième}$ ordre et linéaire, aux différences partielles, aux différences mêlées.

VIII. *Théorie des fonctions* (172-241). 1. Définitions relatives à la théorie générale des fonctions : fonctions rationnelles, irrationnelles, algébriques (définition trop étroite selon nous), transcendantes ; zéros, infinis, résidus. 2. Fonctions d'une variable complexe : définition ; dérivée (théorème fondamental trop peu précis), surfaces de Riemann. 3. Propriétés générales sur une surface de Riemann, en un point ordinaire, en un point de discontinuité, en un point d'embranchement. 4. Inversion des fonctions. 5. Déterminants fonctionnels. 6. Résultants et discriminants. 7. Fonctions homogènes. 8. Fonctions symétriques. 9. Fonctions alternantes. 10. Substitutions linéaires : matrices ;

substitutions quelconques, spécialement pour les fonctions bilinéaires et quadratiques ; substitutions orthogonales.

IX. *Théorie des déterminants* (215-228). 1. Définition. 2. Propriétés fondamentales : transformations, sommes, produits; déterminants bordés. 3. Mineurs. 4. Systèmes adjoints. 5. Déterminants spéciaux: symétriques, hémisymétriques, gauches, etc. Dans cette section, l'auteur aurait pu utiliser davantage les Mémoires, le *Treatise* et l'*History* de Muir.

X. *Théorie des Invariants* (219-280). Les auteurs cités en tête de la section sont Gordan, Salmon, de Bruno, Clebsch. L'introduction historique ne mentionne pas les invariants différentiels rencontrés d'abord par Ampère et Cauchy. 1. Représentation symbolique. 2. Substitutions linéaires; définition des invariants. 3. Propriétés fondamentales et équations différentielles. 4. Polarisation ; omégalisation. 5. Transvection partielle (Faltung) et transvection. 6. Émanants, combinants, évectants. 7. Types et formes associées. Représentation par des covariants doublement ou simplement binaires. 8. Systèmes complets. 9. Formes linéaires. 10. Formes quadratiques. 11. Formes quadratiques spéciales (de l'octaèdre, du tétraèdre, du cube, de l'icosaèdre, d'après Klein). 12. Formes premières. 13. Formes cubiques. 14. Système d'une forme quadratique et d'une forme cubique. 15. Système de deux formes cubiques. 16. Formes biquadratiques. 17. Forme canonique et rapport anharmonique des formes biquadratiques. 18. Système d'une forme quadratique et d'une forme biquadratique. 19-22. Système complet, et représentation typique et canonique des formes du 5e et du 6e degré.

Cette section, où l'auteur a eu le courage de résumer les résultats établis dans les ouvrages fondamentaux cités au début et dans beaucoup de mémoires de Sylvester, Cayley, Klein, etc., devra être complétée, dans une seconde édition, par l'indication des travaux de Hilbert et de Deruyts. Il y aussi, croyons-nous, des écrits italiens sur la matière qui ne peuvent être passés sous silence.

XI. *Théorie des substitutions* (281-305), d'après Cauchy, Serret, Jordan, Netto, avec des indications sur les travaux de Lie. 1. Définition; ordre. 2. Décomposition; classe. 3. Espèces de substitutions, semblables, permutables, arithmétiques, géométriques. 4. Systèmes conjugués et groupes : définitions et théorèmes. 5. Indices des systèmes conjugués. 6. Représentation par des fonctions. 7. Groupes linéaires. 8. Groupes de substitutions des expressions algébriques.

XII. *Théorie des équations* (306-375). Les auteurs cités en tête de cette section sont Bézout, Waring, Galois, Serret, Jordan. 1. Définition. 2. Nombre des racines et racines égales. Les indications historiques relatives au théorème fondamental doivent être rectifiées et complétées. L'auteur ne distingue pas assez des autres les preuves qui peuvent revêtir une forme purement arithmétique, comme dit Kronecker (p. 308, dernière ligne; par une malheureuse faute d'impression, il y a, dans le texte, Weierstrass au lieu de Kronecker); telle est la seconde preuve de Gauss et celles qui lui ressemblent, par exemple, très probablement, celle de Walecki (1882), qui n'est pas citée; puis celle d'Argand, qui date de 1806 (elle a paru dans le livre cité, p. 45, ligne 9), et que Lipschitz a rendue à peu près inattaquable. Cette preuve d'Argand n'est pas une transformée de celles de Gauss ou de Cauchy, contrairement à ce que dit le R. P. Hagen; mais les essais de démonstrations de Legendre, de Liouville et de Sturm ne diffèrent pas substantiellement du travail d'Argand. La théorie des racines égales est aussi beaucoup plus difficile qu'elle n'en a l'air, comme l'a vu Gauss (2e preuve) et comme il ressort des travaux de Kronecker. Selon nous, le point de vue arithmétique doit dominer de plus en plus la théorie des équations toute entière. 3. Composition des équations. 4. Fonctions symétriques. 5. Transformations. 6. Séparation des racines. N'aurait-il pas fallu dire ici un mot de la méthode des différences, améliorée par Choquet, et du théorème de Newton, généralisation de celui de Descartes? Remarquons aussi que Budan a trouvé, non seulement le théorème que l'on attribue souvent à tort à Fourier, mais aussi d'autres théorèmes très curieux qui ont peut-être suggéré à Cauchy ses recherches sur la séparation des racines imaginaires. Dans ce chapitre, la littérature relative au théorème de Sturm est bien résumée; toutefois le mémoire de Gilbert est oublié. 7. Résolubilité algébrique. Recherches de Lagrange, Abel, Galois, Kronecker, Jordan. 8. Résolution des équations algébriques : équations des quatre premiers degrés (d'après Serret, mais en tenant compte de Matthiessen); des équations réductibles aux quatre premiers degrés; équations du 5e degré et des degrés supérieurs; équations binômes; équations abéliennes générales et spéciales. 9. Résolution des équations numériques; racines rationnelles; racines irrationnelles. Nous pensons que la *regula falsi* a été exposée, pour la première fois, d'une manière générale, par S. Stevin; à propos de celle de Gräfe, on devra citer maintenant l'excellente dissertation de Carvallo.

10. Équations linéaires simultanées. A ajouter aux mémoires cités, celui de Rouché (*J. de l'Éc. polyt.*, 1880, cahier 48) et de Méray (*J. de Liouville*, 1884). 11. Équations simultanées de degré supérieur : degré de l'équation finale; calcul de cette équation; solutions communes. Les résultants de Sylvester et de Cauchy pourraient s'écrire d'une manière qui permettrait de mieux voir leurs propriétés, comme nous l'avons montré dans les *Bulletins de l'Académie de Belgique*, 1878-79. 13. Équations indéterminées.

*Table des matières; table des principaux ouvrages cités; table alphabétique des sujets traités* (14 pages in-4°); *errata* (377-399). Ces diverses tables sont extrêmement utiles, surtout la troisième qui permet de retrouver rapidement les renseignements dont on a besoin. Voici quelques additions à la table des auteurs, que nous soumettons à l'auteur pour une future édition de la *Synopsis :* 1° Baltzer, *Elemente der Mathematik;* Lucas, *Théorie des nombres;* Chrystal, *Algebra:* trois ouvrages où abondent les renseignements bibliographiques et dont les deux derniers sont très originaux. 2° Les traités ou manuels d'analyse de Jordan, Lipschitz, Peano, Thomae, qui contiennent un exposé plus rigoureux de la théorie des fonctions que celui de Briot et Bouquet, 3° Le *Giornale* de Battaglini pourrait être utilisé davantage; il serait bon de faire les citations d'Abel d'après la seconde édition de ses œuvres, plus complète et plus exacte que la première; enfin, dans la théorie des nombres, il y aurait lieu de citer les Euleri *Commentationes arithmeticae collectae* (Petropoli, 1849).

L'analyse qui précède, où nécessairement nous n'avons pu entrer dans quelques détails que là où nous avons l'une ou l'autre observation critique à faire, peut donner une idée du nombre immense de questions résumées par l'auteur; mais ce n'est que l'étude d'un chapitre déterminé qui révèlera au lecteur la valeur de cette encyclopédie systématique. On peut dire que c'est une carte presque toujours minutieusement exacte de cette province si étendue du domaine mathématique : l'analyse arithmétique et l'analyse algébrique.

La *Synopsis* est le résultat d'un travail colossal d'assimilation et de coordination que l'on ne peut donc trop recommander aux géomètres, à cause des renseignements sûrs vraiment innombrables qu'elle contient et des recherches et tâtonnements qu'elle leur épargnera.

P. Mansion.

# MATHESIS

# MATHESIS

## RECUEIL MATHÉMATIQUE

## A L'USAGE DES ÉCOLES SPÉCIALES

## ET DES ÉTABLISSEMENTS D'INSTRUCTION MOYENNE

PUBLIÉ PAR

**P. MANSION** ET **J. NEUBERG**

Ancien élève de l'École normale des sciences, Professeur ordinaire à l'Université de Gand. Membre de l'Académie royale de Belgique, etc.

Ancien élève de l'École normale des sciences, Professeur ordinaire à l'Université de Liège, Correspondant de l'Académie royale de Belgique, etc.

AVEC LA COLLABORATION DE PLUSIEURS PROFESSEURS BELGES ET ÉTRANGERS.

*Ut pictura mathesis!*
PH. BRETON

---

*DEUXIÈME SÉRIE.*

**TOME III. — ANNÉE 1893.**

(TOME XIII DE LA COLLECTION.)

---

GAND
AD. HOSTE, ÉDITEUR
IMPRIMEUR-LIBRAIRE
47, RUE DES CHAMPS, 47

PARIS
GAUTHIER-VILLARS & FILS
IMPRIMEURS-LIBRAIRES
55, QUAI DES AUGUSTINS, 55

GAND, IMPRIMERIE C. ANNOOT-BRAECKMAN AD. HOSTE, SUCCESSEUR

1893

## ABRÉVIATIONS.

B. B. Bulletins de l'Académie royale de Belgique.

C. R. Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris.

N. A. M. Nouvelles Annales de Mathématiques (depuis 1842).

N. C. M. Nouvelle Correspondance Mathématique (1874-1880).

J. M. E. (ou J. M. S). Journal de Mathématiques élémentaires (ou Journal de Mathématiques spéciales), fondé en 1877 par BOURGET, continué par G. DE LONGCHAMPS.

*Crelle*, Journal de Mathématiques pures et appliquées, fondé par CRELLE en 1826, continué successivement par BORCHARDT, KRONECKER et WEIERSTRASS, par KRONECKER et par FUCHS (en allemand surtout).

*Liouville*, Journal de Mathématiques pures et appliquées, fondé par LIOUVILLE en 1836, continué d'abord par RESAL, puis par JORDAN.

(2), III, 327-333 signifie : Deuxième série, tome troisième, pages 327 à 333.

# MATHESIS

## SUR LES COURBES DU QUATRIÈME ORDRE QUI ONT TROIS POINTS DOUBLES D'INFLEXION(*),

par M. BALITRAND, ancien élève de l'École Polytechnique.

I. Si l'on prend le triangle des points doubles A, B, C, pour triangle de référence, l'équation générale de ces courbes est :

$$\frac{l}{\alpha^2}+\frac{m}{\beta^2}+\frac{n}{\gamma^2}=0. \tag{1}$$

La conique qui a pour équation

$$\frac{l\alpha^2}{\alpha'^2\alpha''^2}+\frac{m\beta^2}{\beta'^2\beta''^2}+\frac{n\gamma^2}{\gamma'^2\gamma''^2}=0, \tag{2}$$

est autopolaire par rapport au triangle de référence et passe par les deux points $(\alpha', \beta', \gamma')$, $(\alpha'', \beta'', \gamma'')$, pourvu que ceux-ci soient situés sur la courbe (1).

Si ces deux points se rapprochent indéfiniment, l'équation (2) devient

$$\frac{l\alpha^2}{\alpha'^4}+\frac{m\beta^2}{\beta'^4}+\frac{n\gamma^2}{\gamma'^4}=0, \tag{3}$$

et la conique qu'elle représente est tangente à la courbe (1) au point $(\alpha', \beta', \gamma')$.

On en déduit pour l'équation de la tangente en ce point à la courbe (1)

$$\frac{l\alpha}{\alpha'^3}+\frac{m\beta}{\beta'^3}+\frac{n\gamma}{\gamma'^3}=0. \tag{4}$$

La condition pour que la droite

$$\lambda\alpha+\mu\beta+\nu\gamma=0$$

soit tangente à la courbe (1) est :

$$\sqrt[3]{l\lambda^2}+\sqrt[3]{m\mu^2}+\sqrt[3]{n\nu^2}=0, \tag{5}$$

---

(*) Un premier article du même auteur sur ces courbes a paru dans *Mathesis*, (2), I, p. 241. (J. N.)

et les coordonnées du point de contact sont :

$$\alpha' = \sqrt[3]{\frac{l}{\lambda}}, \quad \beta' = \sqrt[3]{\frac{m}{\mu}}, \quad \gamma' = \sqrt[3]{\frac{n}{\nu}}.$$

L'équation (5), équation tangentielle de la courbe (1), peut encore s'écrire

$$(l\lambda^2 + m\mu^2 + n\nu^2)^3 - 27\, lmn\lambda^2\mu^2\nu^2 = 0.$$

Sous cette forme, elle montre immédiatement que les six tangentes aux points doubles touchent la conique

$$l\lambda^2 + m\mu^2 + n\nu^2 = 0.$$

Les coordonnées $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ du centre de la conique (3) sont données par les formules(*)

$$\frac{\frac{l\alpha_1}{\alpha'^4}}{a} = \frac{\frac{m\beta_1}{\beta'^4}}{b} = \frac{\frac{n\gamma_1}{\gamma'^4}}{c},$$

ou bien

$$\frac{1}{\alpha'^2} = \sqrt{\frac{a}{l\alpha_1}}, \quad \frac{1}{\beta'^2} = \sqrt{\frac{b}{m\beta_1}}, \quad \frac{1}{\gamma'^2} = \sqrt{\frac{c}{n\gamma_1}},$$

et, par suite, le lieu du centre est la courbe représentée par l'équation

$$\sqrt{\frac{la}{\alpha_1}} + \sqrt{\frac{mb}{\beta_1}} + \sqrt{\frac{nc}{\gamma_1}} = 0. \tag{6}$$

C'est une quartique de troisième classe qui a pour points de rebroussement les sommets du triangle de référence.

THÉORÈME. *Le lieu des centres des coniques conjugées au triangle* ABC *et qui touchent la courbe* (1) *est une quartique ayant pour points de rebroussement les sommets du triangle.*

*L'enveloppe des coniques conjugées au triangle* ABC *et dont les centres sont sur la courbe* (6) *est une quartique qui a pour points doubles d'inflexion les sommets du triangle.*

II. Dans l'équation (1), les coefficients $l$, $m$, $n$ ne peuvent être tous positifs, si la courbe qu'elle représente est réelle. Nous supposerons qu'il

(*) L'auteur emploie les coordonnées normales. Plus généralement le lieu du pôle d'une droite fixe par rapport aux coniques conjugées au triangle ABC et qui touchent la courbe (1), est une quartique qui a pour points de rebroussement les sommets du triangle. (J. N.)

en est ainsi et, mettant les signes en évidence, nous écrirons cette équation sous la forme

$$\frac{l^2}{\alpha^2}+\frac{m^2}{\beta^2}-\frac{n^2}{\gamma^2}=0. \tag{7}$$

Les coordonnées d'un point $M_1$ de cette courbe s'expriment alors par les formules (nous omettons un facteur de proportionnalité)

$$\alpha=\frac{l}{\cos\varphi},\quad \beta=\frac{m}{\sin\varphi},\quad \gamma=n, \tag{8}$$

ou encore, en changeant de paramètre et posant $\operatorname{tang}\frac{1}{2}\varphi=t$,

$$\alpha=\frac{l}{1-t^2},\quad \beta=\frac{m}{2t},\quad \gamma=\frac{n}{1+t^2}. \tag{9}$$

La tangente au point $M_1$ a pour équation :

$$\frac{\alpha}{l}\cos^2\varphi+\frac{\beta}{m}\sin^2\varphi-\frac{\gamma}{n}=0. \tag{10}$$

Elle passe par le point de rencontre des deux droites

$$\frac{\alpha}{l}\cos\varphi+\frac{\beta}{m}\sin\varphi-\frac{\gamma}{n}=0,\quad \frac{\alpha}{l}\sin\varphi+\frac{\beta}{m}\cos\varphi=0.$$

Il suffit, en effet, pour obtenir l'équation (10), de retrancher les équations précédentes après avoir multiplié la seconde par $\sin\varphi\cos\varphi$.

Pour déduire de cette remarque une construction de la tangente au point $M_1$ de la courbe (7), considérons la conique

$$\frac{\alpha^2}{l^2}+\frac{\beta^2}{m^2}-\frac{\gamma^2}{n^2}=0, \tag{11}$$

et menons la tangente au point M dont les coordonnées sont

$$\alpha=l\cos\varphi,\quad \beta=m\sin\varphi,\quad \gamma=n;$$

son équation est

$$\frac{\alpha}{l}\cos\varphi+\frac{\beta}{m}\sin\varphi-\frac{\gamma}{n}=0.$$

Elle coupe les côtés BC, AC aux points P et Q; les droites AP, BQ se coupent au point :

$$\alpha=\frac{l}{\cos\varphi},\quad \beta=\frac{m}{\sin\varphi},\quad \gamma=n;$$

c'est précisément le point $M_1$.

D'ailleurs l'équation

$$\frac{\alpha}{l}\sin\varphi+\frac{\beta}{m}\cos\varphi=0$$

représente la droite conjuguée harmonique de CM par rapport à CA et CB.

Donc, pour construire la tangente au point $M_1$ nous menons la tangente au point M et la droite conjuguée harmonique de CM par rapport à CA et CB ; et nous joignons ensuite le point d'intersection de ces deux droites au point $M_1$.

III. Si l'on adopte les formules (9), l'équation de la tangente devient :

$$\frac{\alpha}{l}(1-t^2)^3+\frac{\beta}{m}(2t)^3-\frac{\gamma}{n}(1+t^2)^3=0. \tag{12}$$

Si l'on y considère $(\alpha, \beta, \gamma)$ comme les coordonnées d'un point donné, l'équation (12) fournit les valeurs du paramètre $t$ pour les points de contact des tangentes issues de ce point. Ces valeurs satisfont aux relations

$$\Sigma t=0, \quad \Sigma\frac{1}{t}=0.$$

Par le sommet A, menons une droite ; elle coupe la courbe (7) aux points P et Q dont les paramètres vérifient la relation

$$t_1t_2=1.$$

Les tangentes en ces points ont pour équations

$$\frac{\alpha}{l}(1-t_1^2)^3+\frac{\beta}{m}(2t_1)^3-\frac{\gamma}{n}(1+t_1^2)^3=0,$$

$$\frac{\alpha}{l}(t_1^2-1)^3+\frac{\beta}{m}(2t_1)^3-\frac{\gamma}{n}(1+t_1^2)^3=0.$$

Elles se coupent sur le côté BC ; d'ailleurs les droites BP et BQ forment évidemment un faisceau harmonique avec les côtés BA, BC. On a donc ce théorème :

*Si, par un point double* A *de la courbe* (7), *on mène une droite qui coupe cette courbe aux points* P *et* Q, *les tangentes en ces points se coupent sur le côté* BC ; *les points* A, P, Q *et le point d'intersection de la droite et du côté* BC *forment une division harmonique.*

La tangente à la courbe (7) au point défini par la valeur $t_1$ du

paramètre $t$ coupe la courbe en deux autres points dont les paramètres sont racines de l'équation

$$2t_1^2t^2 + (t_1^4 - 1)\,t - 2t_1 = 0. \tag{13}$$

Cette équation est remarquable : Elle est indépendante de $l$, $m$, $n$. Si l'on y considère $t_1$ comme donné, elle détermine les paramètres des points où la courbe (7) est coupée par la tangente au point $t_1$ ; si l'on y considère $t$ comme donné, elle détermine les paramètres des points de contact des tangentes menées du point $t$ à la courbe.

Elle peut d'ailleurs être identifiée avec l'équation qui donne les points d'intersection d'une droite avec la courbe. Car représentons cette droite

$$\lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma = 0. \tag{14}$$

L'équation qui donne les paramètres des points d'intersection de cette droite et de la courbe (7) est :

$$\frac{l\lambda}{1-t^2} + \frac{m\mu}{2t} + \frac{n\nu}{1+t^2} = 0,$$

ou

$$m\beta t^4 + 2t^3(n\nu - l\lambda) - 2t(n\nu + l\lambda) - m\beta = 0.$$

L'identification avec (13) est possible et l'on obtient pour $\lambda$, $\mu$, $\nu$ les valeurs :

$$\lambda = \frac{1-t^2}{2l}, \quad \mu = \frac{t}{m}, \quad \nu = \frac{1+t^2}{2n}.$$

On retrouve ainsi le beau théorème suivant, dû à Laguerre :

*Les points de contact des tangentes menées à la courbe* (7) *par un point pris sur cette courbe sont en ligne droite.*

L'équation (13), nous l'avons déjà observé, est indépendante de $l$, $m$, $n$. Si le point P, qui a pour coordonnées $l$, $m$, $n$ décrit une droite, à chaque point de cette droite correspond une courbe telle que (7). Les points situés sur ces courbes et qui répondent à une même valeur du paramètre $t$ sont en ligne droite, comme le montrent les formules (9). Les tangentes en ces points coupent les courbes correspondantes en deux autres points dont les lieux sont des droites, car la valeur du paramètre $t$ pour ces points est constante. C'est ce qui résulte de l'équation (13), qui peut d'ailleurs conduire à d'autres conséquences remarquables.

## SUR UN NOUVEAU GROUPE DE TROIS PARABOLES;

par M. MANDART, professeur agrégé.

1. Soient A', B', C' les milieux des côtés du triangle ABC, H l'orthocentre, O le centre du cercle inscrit, G le centre de gravité, I, $I_a$, $I_b$ et $I_c$ les centres des cercles tritangents.

Prenons sur OA', OB', OC' trois longueurs égales

$$A'P_a = B'P_b = C'P_c = \lambda,$$

toutes trois dirigées vers O ou dans le sens opposé.

La droite $P_bP_c$ intercepte sur les côtés OB', OC' du triangle OB'C' des segments égaux; donc elle enveloppe une parabole $\pi_a$, tangente aux trois côtés du triangle OB'C' (*Mathesis*, t. X, p. 31). Le foyer $F_a$ est au milieu de l'arc B'OC' du cercle OB'AC' (*); c'est donc la projection de O sur la bissectrice AI. $OF_a$ est l'axe de $\pi_a$; la tangente au sommet est parallèle à AI et passe au milieu de B'C'; la directrice, passant par l'orthocentre A' du triangle circonscrit OB'C', coïncide avec la bissectrice de l'angle B'A'C'.

Les droites $P_cP_a$, $P_aP_b$ enveloppent deux autres paraboles $\pi_b$, $\pi_c$. D'après ce qui précède, *les foyers* $F_a$, $F_b$, $F_c$, *des courbes* $\pi_a$, $\pi_b$, $\pi_c$ *appartiennent au cercle décrit sur* OI *comme diamètre et aux bissectrices* AI, BI, CI; *les directrices sont les bissectrices intérieures du triangle* A'B'C'; *les tangentes aux sommets sont les bissectrices intérieures du triangle qui a pour sommets les milieux des côtés de* A'B'C'.

2. Soient $\alpha'$, $\beta$, $\gamma$ les points de contact de B'C', B'O, C'O avec $\pi_a$. On a

$$B'\beta = C'O, \quad C'\gamma = B'O, \quad \frac{\alpha'B'}{\alpha'C'} = \frac{\beta B'}{OB'} = \frac{OC'}{OB'}.$$

---

(*) En effet, le foyer se trouve d'abord sur la circonférence circonscrite au triangle OB'C' de trois tangentes. Les points de contact $\beta$, $\gamma$ de OB', OC' avec $\pi_a$ s'obtiennent en prenant $B'\beta = C'O$, $C'\gamma = B'O$; comme $O\beta = O\gamma$, le triangle $O\beta\gamma$ est isoscèle, et la médiane issue de O, qui est un diamètre de $\pi_a$, est la bissectrice de l'angle $\beta O\gamma$; c'est même l'axe de la parabole. Le foyer se trouve donc à l'intersection de cette bissectrice avec la circonférence OB'C'. La tangente au sommet correspond à $\lambda = \frac{1}{2}(B'O + C'O)$.

On en conclut que les points de contact des côtés du triangle A'B'C' avec les paraboles $\pi_a$, $\pi_b$, $\pi_c$ sont en ligne droite.

Plus généralement, les points de contact des côtés de chacun des triangles $P_aP_bP_c$ avec les paraboles correspondantes sont en ligne droite; car dans la définition de ces courbes, le quadrangle $P_aP_bP_cO$ peut être substitué au quadrangle A'B'C'O(*).

**3.** Le cercle (OI)(**) rencontre OA', OB', OC' en trois points $V_a$, $V_b$, $V_c$ situés sur trois parallèles $IV_a$, $IV_b$, $IV_c$ aux côtés du triangle ABC; par suite, $A'V_a = B'V_b = C'V_c = r$, et le triangle $V_aV_bV_c$, qui est inversement semblable à ABC, est une position particulière du triangle $P_aP_bP_c$.

La droite $IF_a$, bissectrice de l'angle BAC, est aussi la bissectrice de l'angle $V_bIV_c$; donc $F_a$ est le milieu de l'arc $V_bV_c$, et $V_aF_a$ est la bissectrice de l'angle $V_a$ du triangle $V_aV_bV_c$. Il résulte de là que le centre du cercle inscrit à $V_aV_bV_c$ est l'orthocentre de $F_aF_bF_c$; ce point est aussi le centre I' du cercle inscrit au triangle A'B'C'.

**4.** Parmi les triangles $P_aP_bP_c$, il y en a deux qui se réduisent à une droite. Pour les trouver, observons que le double de la surface du triangle $P_aP_bP_c$ a pour expression

$$OP_b.OP_c \sin A + OP_c.OP_a \sin B + OP_a.OP_b \sin C;$$

nous devons donc poser

$$\frac{\sin A}{R\cos A - \lambda} + \frac{\sin B}{R\cos B - \lambda} + \frac{\sin C}{R\cos C - \lambda} = 0, \qquad (1)$$

ou

$$\lambda^2 - R\lambda + R^2 \frac{\Sigma \sin A \cos B \cos C}{\sin A + \sin B + \sin C} = 0.$$

Le dernier terme de cette équation se ramène à

$$R^2 \frac{\sin A \sin B \sin C}{\sin A + \sin B + \sin C} = \frac{SR}{2p} = \frac{rR}{2}.$$

---

(*) Plus simplement, deux quelconques des triangles $P_aP_bP_c$ étant homologiques, les côtés homologues se coupent en trois points qui sont en ligne droite; lorsque les triangles tendent à se confondre, les intersections des côtés homologues ont pour limites les points de contact des côtés avec $\pi_a$, $\pi_b$, $\pi_c$.

(**) Le cercle (OI) est le cercle de Fuhrmann du triangle A'B'C' (Voir *Mathesis* t. X, p. 105).

Substituant et résolvant, on trouve

$$\lambda = \tfrac{1}{2}(R \pm \sqrt{R(R-2r)}) = \tfrac{1}{2}(R \pm OI). \qquad (2)$$

Si donc le diamètre OI rencontre la circonférence ABC en W, W', les deux valeurs de $\lambda$ sont égales à $\frac{1}{2}$IW et $\frac{1}{2}$IW'; ce qui s'accorde avec un théorème de M. Fuhrmann (*Mathesis*, t. X, p. 111).

5. Prenons A'B'C' pour triangle de référence, et cherchons l'enveloppe de l'axe d'homologie des triangles A'B'C', $P_aP_bP_c$. Soient $Q_a$, $Q_b$, $Q_c$ les intersections des côtés homologues. Le triangle OB'C', coupé par la transversale $P_bP_c$, donne

$$\frac{P_bO}{P_bB'} \cdot \frac{P_cC'}{P_cO} \cdot \frac{Q_aB'}{Q_aC'} = 1, \quad \text{d'où} \quad \frac{Q_aB'}{Q_aC'} = \frac{R\cos B - \lambda}{R\cos C - \lambda}.$$

De là, on déduit aisément l'équation de la droite $Q_aQ_bQ_c$ en coordonnées barycentriques :

$$\frac{\alpha}{R\cos A - \lambda} + \frac{\beta}{R\cos B - \lambda} + \frac{\gamma}{R\cos C - \lambda} = 0. \qquad (3)$$

Ordonnons cette équation par rapport à $\lambda$ et égalons à zéro le discriminant; nous aurons

$$\Sigma^2\alpha(\cos B + \cos C) - 4\Sigma\alpha\Sigma\alpha\cos B\cos C = 0,$$

ou

$$\sqrt{(\cos B - \cos C)\alpha} + \sqrt{(\cos C - \cos A)\beta} + \sqrt{(\cos A - \cos B)\gamma} = 0. \qquad (4)$$

Telle est l'équation de l'enveloppe de la droite $Q_aQ_bQ_c$; elle représente une parabole inscrite au triangle A'B'C'.

On parvient au même résultat en observant que les points $Q_a$, $Q_b$, $Q_c$ décrivent des ponctuelles projectives avec celles des points $P_a$, $P_b$, $P_c$; car la tangente $P_bP_c$ de $\pi_a$, par exemple, marque sur les tangentes OB', OC', A'B' des ponctuelles projectives.

Lorsque $\lambda$ tend vers zéro, les points $Q_a$, $Q_b$, $Q_c$ ont pour limites les points de contact de B'C', C'A', A'B' avec $\pi_a$, $\pi_b$, $\pi_c$; donc la droite qui joint ces points de contact touche la courbe (4).

Les deux tangentes communes aux paraboles $\pi_a$, $\pi_b$, $\pi_c$ sont également des tangentes à la courbe (4); car elles sont les axes d'homologie de A'B'C' avec deux triangles aplatis (c'est-à-dire dont les sommets sont en ligne droite). Soient $L_aL_bL_b$, $L'_aL'_bL'_c$ ces deux triangles et soient $l_a$, $l_b$, $l_c$ les milieux de $L_aL'_a$, $L_bL'_b$, $L_cL'_c$. Les équations des droites

$L_aL_b$, $L'_aL'_b$ s'obtiennent en remplaçant, dans (3), $\lambda$ par les deux racines de (1); on voit immédiatement, par la comparaison de (3) et de (1), que les deux droites passent par le point ayant pour coordonnées sin A, sin B, sin C, c'est-à-dire par le centre I' du cercle inscrit au triangle A'B'C'. I' étant l'intersection des directrices $\pi_a$, $\pi_b$, $\pi_c$, les tangentes communes $L_aL_b$, $L'_aL'_b$ sont rectangulaires.

On a

$$A'L_a = \tfrac{1}{2}(R + \sqrt{R^2 - 2Rr}), \quad A'L'_a = \tfrac{1}{2}(R - \sqrt{R^2 - 2Rr});$$

on en conclut que

$$A'l_a = \tfrac{1}{2}R, \quad L_aL'_a = \sqrt{R^2 - 2Rr}.$$

Le triangle $I'L_aL'_a$ étant rectangle, on a aussi

$$I'l_a = \tfrac{1}{2}L_aL'_a = \sqrt{R^2 - 2Rr}.$$

De là on déduit le théorème suivant :

*Si, sur les droites* A'O, B'O, C'O, *on prend des longueurs* $A'l_a = B'l_b = C'l_c = \frac{1}{2}R$, *la circonférence circonscrite au triangle* $l_al_bl_c$ *a pour centre le centre* I' *du cercle inscrit à* A'B'C' *et passe par le centre du cercle circonscrit au triangle* A'B'C'.

La parabole (4) a pour directrice OI'; car O est l'orthocentre du triangle circonscrit A'B'C' et I' est l'intersection de deux tangentes rectangulaires. Pour trouver le foyer, menons par A', B', C' des perpendiculaires sur la directrice OI'; on peut les considérer comme aboutissant au foyer situé à l'infini. Par suite, leurs isogonales par rapport au triangle A'B'C' concourent sur la circonférence A'B'C' au foyer proprement dit. Les coordonnées barycentriques de ce point (*) sont

$$\frac{a^2}{\cos B - \cos C}, \quad \frac{b^2}{\cos C - \cos A}, \quad \frac{c^2}{\cos A - \cos B},$$

A'B'C' étant le triangle de référence (*).

---

(*) Pour les calculer, on cherche, par rapport au triangle ABC, les coordonnées du point à l'infini sur la polaire de I' relative au cercle ABC, cette polaire étant perpendiculaire à OI'; puis celles du point inverse. (J. N.)

## UNE PROPRIÉTÉ DES QUADRIQUES ;

par M. Cl. Servais, professeur à l'Université de Gand.

**1.** Prenons pour axes de coordonnées les deux tangentes conjuguées rectangulaires et la normale en un point A d'une quadrique ; l'équation de la surface sera

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2gxz + 2fyz - 2z = 0.$$

Soient $R_1$, $R_2$ les rayons de courbure principaux, N la corde normale, $T_1$ et $T_2$ les portions des tangentes considérées, comprises entre le point A et les pôles de la corde normale, par rapport aux sections normales principales. On a

$$a = \frac{1}{R_1}, \quad b = \frac{1}{R_2}, \quad c = \frac{2}{N}, \quad g = \frac{1}{T_1}, \quad f = \frac{1}{T_2};$$

l'équation peut donc s'écrire :

$$\frac{x^2}{R_1} + \frac{y^2}{R_2} + \frac{2z^2}{N} + \frac{2xz}{T_1} + \frac{2yz}{T_2} - 2z = 0.$$

**2.** Si la surface est un hyperboloïde équilatère on a

$$a + b + c = 0, \quad \text{ou} \quad \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{2}{N} = 0. \tag{1}$$

Donc : *En tout point d'un hyperboloïde équilatère, la courbure moyenne est égale à l'inverse de la corde normale.*

Ou bien : *Le symétrique de l'extrémité de la corde normale, par rapport au point* A, *est le conjugué de ce point par rapport aux centres de courbure principaux.*

Si une section normale est une hyperbole équilatère, on a

$$\frac{1}{R} + \frac{2}{N} = 0, \tag{2}$$

R étant le rayon de courbure de la section. La formule d'Euler combinée avec les relations (1) et (2) conduit à l'équation :

$$\frac{\sin^2\theta}{R_1} + \frac{\cos^2\theta}{R_2} = 0 \quad \text{ou} \quad \operatorname{tg}^2\theta = -\frac{R_1}{R_2}.$$

Donc *l'angle que la trace d'une section normale fait avec le grand axe de l'indicatrice, est le complément de l'angle que l'une des asymptotes de l'indicatrice fait avec le même axe, si la section est une hyperbole équilatère.*

3. Si la surface est un paraboloïde, on a

$$abc - af^2 - bg^2 = 0 ;$$

donc : *En tout point d'un paraboloïde,*

$$\frac{2}{N} = \frac{R_1}{T_1^2} + \frac{R_2}{T_2^2}.$$

4. L'équation de la surface rapportée à son centre et à ses axes est

$$a'x^2 + b'y^2 + c'z^2 + d' = 0,$$

où

$$d' = -\frac{ab}{abc - af^2 - bg^2}, \quad a' + b' + c' = a + b + c, \qquad (3)$$

$$P_a = -\frac{d'}{a'}, \quad P_b = -\frac{d'}{b'}, \quad P_c = -\frac{d'}{c'},$$

$P_a$, $P_b$, $P_c$ étant les puissances des involutions de points conjugués sur les axes. En vertu de l'égalité (3), on a le théorème :

*En tout point d'une quadrique à centre, on a la relation :*

$$\frac{1}{P_a} + \frac{1}{P_b} + \frac{1}{P_c} = \left(\frac{2}{N} + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\left(\frac{2}{N} - \frac{R_1}{T_1^2} - \frac{R_2}{T_2^2}\right).$$

Soit $\delta$ la perpendiculaire abaissée du centre de la surface sur le plan tangent au point A ; on a

$$\delta = \frac{1}{\frac{2}{N} - \frac{R_1}{T_1^2} - \frac{R_2}{T_2^2}} ;$$

par conséquent,

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{2}{N} = \delta\left(\frac{1}{P_a} + \frac{1}{P_b} + \frac{1}{P_c}\right).$$

Ainsi *le long d'une polhodie la quantité*

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{2}{N}$$

*reste constante.*

## BIBLIOGRAPHIE.

*Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* von M. CANTOR. Zweiter Band, von 1200-1668. Zweiter Theil. Leipzig, Teubner, 1892 (X et 363 p. in-8°). Prix du volume complet : 24 marcs.

Voici le sommaire du second fascicule du tome second des importantes leçons de M. Cantor sur l'histoire des mathématiques :

*De* 1550 *à* 1600. 1. Histoire des mathématiques ; éditions des géomètres classiques ; géométrie ; mécanique (Ramus, Xylander, Stevin, Maurolycus, Benedetti, etc.) ; 2. Suite. Cyclométrie et trigonométrie (Stevin, Viète, A. Romanus, L. van Ceulen, les Metius, etc.); 3. Calcul et algèbre (Schoner, Stevin, Bombelli, Viète, Bürgi, etc.).

*De* 1600 *à* 1668. 1. Histoire des mathématiques ; éditions des géomètres classiques 2. Géométrie (Kepler, Mydorge, Desargues, Pascal, Descartes, etc.) ; 3. Mécanique pratique et théorique (Galilée, Torricelli, etc.); 4. Trigonométrie et cyclométrie (Neper, Snellius, Girard, Cavalieri, Grégoire de Saint Vincent, etc.); 5. Calcul. Logarithmes (Neper, Bürgi, Briggs, Vlacq, etc.) ; 6. Invention de méthodes. Calcul des probabilités Fractions continues. Collections de problèmes (Pascal, Descartes, Fermat, Schwenter, Mydorge, etc.); 7. Théorie des nombres; algèbre (Bachet, de Billy, Fermat, Descartes, Girard, Harriot, Hudde, etc.); 8. Géométrie analytique (Girard, Sluse, Fermat, Descartes); 9. Considérations infinitésimales. Kepler, Cavalieri (aussi Souvey, Guldin) ; 10. Descartes, Fermat (Quadrature, Tangente, etc.) ; 11. Roberval, Torricelli ; 12. Grégoire de Saint Vincent, Wallis, Pascal, Sluse, Hudde, Van Heuraet, Tacquet, Neil, etc.

Table alphabétique (19 pages). Comme dans le premier volume, il manque une table des chapitres.

Rien que les titres des chapitres et des noms cités témoignent assez de l'intérêt que présente le fascicule du livre de M. Cantor dont nous venons de donner un aperçu.

M. Cantor caractérise la seconde moitié du 16e siècle, en rappelant les découvertes de Stevin en arithmétique pratique et en mécanique, et celles de Viète en algèbre et en géométrie algébrique. Selon lui, la première moitié du 17e siècle, où brille surtout le nom de Fermat, doit être regardée comme l'époque de l'invention du calcul infinitésimal. Nous ne partageons pas cette dernière appréciation. Selon nous, les grands géomètres de la première moitié du 17e siècle sont, au même titre qu'Archimède, des précurseurs de Leibniz et de Newton. Mais ceux-ci sont seuls les vrais inventeurs du calcul infinitésimal, parce que les premiers, ils ont trouvé que le problème des quadratures était l'inverse du problème des tangentes, remarque capitale d'où est sortie l'analyse moderne. L'époque de Fermat est plutôt caractérisée par la découverte de la géométrie analytique et des principes de l'arithmétique supérieure.

Cette petite critique n'enlève rien au mérite du beau livre de M. Cantor que nous recommandons vivement à tous ceux qui s'intéressent aux mathématiques et à leur histoire. (P. M.)

*A Sequel to the First Six Books of the Elements of Euclid*, by John CASEY, edited by Patrick A. E. DOWLING, B. A., R. U. I., Professor of Mathematics, University College, Dublin. Sixth Edition, revised and enlarged. Dublin: Hodges, Figgis and Co; London: Longmans, Green and Co. 1892. Volume in-12 cartonné à l'anglaise de XXIV-302 pages, avec 198 figures dans le texte. Prix : 3 sh. 6 d.

La cinquième édition du traité classique du Dr J. Casey a été publiée en octobre 1888 et aussitôt signalée dans notre journal (VIII, 252) ; mais, si nous avons cru devoir réduire alors à quelques lignes l'annonce d'un ouvrage bien connu de nos lecteurs et dont les précédentes éditions avaient fait l'objet de bibliographies spéciales (voir *Mathesis*, V, pp. 76-78, et VI, p. 276), c'est parce que, nous faisions connaître, à ce moment même, la prochaine publication d'une traduction du magnifique *Supplément* de ce livre, consacré à la Géométrie récente, désormais érigée en corps de doctrine par le Dr Casey.

Mieux que les plus élogieux comptes rendus, la traduction de ce chapitre, et sa publication dans *Mathesis* où, il y a douze ans, cette Géométrie a vu le jour, devaient exercer une influence décisive sur les progrès d'un ensemble de recherches intéressant à un haut degré le public mathématique, à en juger par les importants résultats que les étudiants, les professeurs et plusieurs savants géomètres viennent y ajouter continuellement.

La traduction due à l'obligeante collaboration de M. Falisse, a été publiée en 1889 dans *Mathesis*, et suivie aussitôt d'un supplément inédit, relatif à la théorie des polygones harmoniques, ajouté à cette occasion par M. Casey.

En rééditant à part cette traduction, en 1890, M. J. Neuberg annonçait la préparation de nouvelles études sur les points de Gergonne et de Nagel, et diverses propriétés des figures inversement semblables et de trois figures directement semblables, etc. On pouvait donc en espérer la publication très prochaine, et compter, suivant une progression jusque là régulière, sur une nouvelle édition en 1890.

La mort prématurée du Dr Casey retarda momentanément l'exécution de ce projet; mais, dans l'intervalle, grâce à la collaboration de M. Neuberg, l'étude de la Géométrie récente faisait sa première apparition dans le traité classique de Géométrie de MM. Rouché et de Comberousse, dont il a été publié une analyse critique dans la *Revue des Questions Scientifiques*, 1892, puis en supplément dans *Mathesis*, février 1892.

Depuis que l'ouvrage du Dr Casey est parvenu à sa quatrième édition, il a été divisé en deux parties. Celle qui est consacrée à la Géométrie d'Euclide est arrivée, pour ainsi dire, à sa forme définitive. Il n'en est pas de même du supplément qui, à chaque édition, a été entièrement refondu et augmenté de nouvelles applications. Voici, à titre d'indication qui peut avoir son intérêt, un aperçu du développement donné à ce chapitre :

| Editions. | Pages. | Figures. | Exercices. |
|---|---|---|---|
| 3e 1884 | 10 | 2 | 20 |
| 4e 1886 | 60 | 23 | 181 |
| 5e 1888 | 84 | 31 | 262 |
| 6e 1892 | 134 | 45 | 317 |

Cette augmentation considérable répond au désir manifesté par M. Casey qui aura trouvé en la personne de son gendre, M. Patrick Dowling, professeur à l'Université de Dublin, et en M. J. Neuberg, les dignes continuateurs de son œuvre.

A la demande de la famille de l'auteur, M. Neuberg a revu tout le chapitre supplémentaire traitant de la Géométrie récente. Voici les principales modifications qu'il y a introduites. Dans la section I, il a fait connaître la notion des points complémentaires et celle de pôle et polaire trilinéaires. La section II s'est accrue de la théorie des figures inversement semblables. Une nouvelle section, la section VIII, comprend des *Recherches diverses* : Triangles podaires et antipodaires, triangles orthologiques, métapôles de deux triangles, points jumeaux, points tripolairement associés, cercles adjoints, inversion symétrique, cercles tritangents.

Cet exposé comprend à lui seul 35 pages, de sorte qu'en définitive le *Supplément* atteint presque le développement de l'ouvrage primitif dans les trois premières éditions.

Cette augmentation ne s'arrêtera certainement pas là, et, par les résultats obtenus, nous pouvons juger de ceux à venir et augurer que l'œuvre de M. Casey survivra longtemps à son auteur. (B. M.)

---

*Annuaire pour l'an* 1893 *publié par le bureau des Longitudes, avec des notices scientifiques.* Paris, Gauthier-Villars et Fils, 1893. In-18 de v-868 pages, avec figures et 2 Cartes magnétiques. Prix : 1 fr. 50.

Outre les renseignements pratiques qu'il contient chaque année, l'*Annuaire du Bureau des Longitudes* pour 1893 renferme des articles dus aux savants les plus illustres sur les Monnaies, la Statistique, la Géographie, la Minéralogie, etc., enfin les Notices suivantes : *Sur l'Observatoire du mont Blanc;* par J. Janssen. — *Sur la corrélation des phénomènes d'électricité statique et dynamique et la définition des unités électriques;* par A. Cornu. — *Discours sur l'Aéronautique, prononcé au Congrès des Sociétés savantes;* par J. Janssen. — *Discours prononcé aux funérailles de M. Ossian Bonnet;* par F. Tisserand. — *Discours prononcés aux funérailles de M. l'Amiral Mouchez;* par Faye, Bouquet de la Grye et Lœwy. — *Discours prononcé* par J. Janssen, *au nom du Bureau des Longitudes, à l'inauguration de la statue du Général Perrier, à Valleraugue (Gard).*

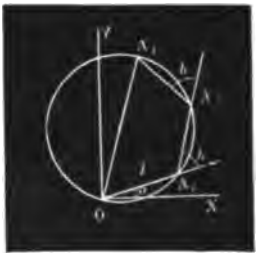
Nous signalons spécialement la notice très étendue (75 pages) de M. Cornu sur l'électricité, à la fin du volume, puis quelques pages du même savant sur l'équivalent mécanique de la chaleur et sur le point critique des fluides.

---

## SOMMATION DES SINUS ET DES COSINUS D'ANGLES EN PROGRESSION ARITHMÉTIQUE(*);

par M. L. Meurice.

Soient OX, OY deux droites rectangulaires. Traçons une droite $OA_1$, faisant avec OX un angle $a$. En un point $A_1$ de $OA_1$, traçons $A_1A_2$ faisant avec le prolongement de $OA_1$ un angle $h$ et prenons $A_1A_2 = OA_1$. De même en $A_2$ traçons $A_2A_3$ faisant avec $A_1A_2$ prolongé un angle égal à $h$ et prenons $A_2A_3 = A_1A_2$, etc.



Nous obtiendrons ainsi la ligne polygonale régulière $OA_1A_2A_3 \ldots A_n$, qui sera inscriptible dans une circonférence. Par suite, les angles inscrits $A_1OA_2$, $A_2OA_3$, ... seront tous égaux entre eux et auront pour valeur $\frac{1}{2}h$.

Les angles $OA_2A_1$, $OA_3A_2$, ..., $OA_nA_{n-1}$ auront pour valeurs $\frac{1}{2}h$, $h$, $\frac{3}{2}h$, ..., $\frac{1}{2}(n-1)h$.

Le triangle $OA_nA_{n+1}$ nous donne

$$\frac{OA_n}{A_nA_{n+1}} = \frac{\sin\frac{1}{2}nh}{\sin\frac{1}{2}h},$$

d'où, en appelant $l$ le côté de la ligne régulière,

$$OA_n = l\frac{\sin\frac{1}{2}nh}{\sin\frac{1}{2}h}.$$

L'angle $A_nOX$ est évidemment égal à $a + \frac{1}{2}(n-1)h$. Donc les projections de $OA_n$ sur OX et OY sont égales à

$$OA_n \cos A_nOX = l\frac{\sin\frac{1}{2}nh\cos[a + \frac{1}{2}(n-1)h]}{\sin\frac{1}{2}h},$$

$$OA_n \sin A_nOX = l\frac{\sin\frac{1}{2}nh\sin[a + \frac{1}{2}(n-1)h]}{\sin\frac{1}{2}h}.$$

Remarquons maintenant que les côtés $OA_1$, $A_1A_2$, $A_2A_3$, ... $A_{n-1}A_n$

---

(*) Si la méthode employée ici n'est pas nouvelle, elle est, du moins, peu connue. (*Rédaction.*)

font avec OX les angles $a$, $a+h$, $a+2h$, .. , $a+(n-1)h$. Donc leurs projections sur OX et sur OY sont respectivement

$$l\cos a,\ l\cos(a+h),\ \ldots,\ l\cos[a+(n-1)h],$$
$$l\sin a,\ l\sin(a+h),\ \ldots,\ l\sin[a+(n-1)h].$$

D'où, en appliquant le théorème des projections :

$$\cos a+\cos(a+h)+\ldots+\cos[a+(n-1)h]=\frac{\sin\frac{1}{2}nh\cos[a+\frac{1}{2}(n-1)h]}{\sin\frac{1}{2}h},$$

$$\sin a+\sin(a+h)+\ldots+\sin[a+(n-1)h]=\frac{\sin\frac{1}{2}nh\sin[a+\frac{1}{2}(n-1)h]}{\sin\frac{1}{2}h}.$$

---

## SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

### Question 742.

(Voir *Mathesis*, (2), I, p. 263 et II, p. 253).

1° *Etant donnés une conique et deux points* A *et* B *dans son plan, les points de contact des tangentes à cette conique, menées par les deux points* A, B, *sont sur une deuxième conique* S *passant par les deux points* A, B. *A quelle condition la conique* S *est-elle une hyperbole équilatère ?*

2° *Démontrer qu'après avoir choisi le point* A, *on peut trouver comme il suit, un point* B *remplissant la condition indiquée ci-dessus : Du point* A, *on trace deux droites quelconques et par le pôle de chacune d'elles, on mène une perpendiculaire à l'autre. Ces deux droites se coupent au point* B *cherché.*

3° *Le point* A *étant fixe et les deux droites dont il vient d'être question tournant autour du point* A, *quel est le lieu du point* B ? (V. Jamet.)

*Solution géométrique par* M. Cl. Servais. Soient P et Q les pôles de deux droites $p$ et $q$ se coupant au point A, B le point d'intersection des perpendiculaires abaissées des points P et Q respectivement sur les droites $q$ et $p$. La droite $p$ étant fixe et l'autre $q$ mobile autour du point A, les droites PB et $q$ décrivent deux faisceaux projectifs. Mais le faisceau $(q)$ est projectif à la ponctuelle (Q) ou au faisceau (QB) dont le centre est à l'infini dans la direction perpendiculaire à la droite $p$ ; les faisceaux (PB) et (QB) sont donc projectifs. Si la droite $q$ coïncide avec la droite $p$, les rayons PB et QB sont superposés, par conséquent les

faisceaux (PB) et (QB) sont perspectifs et le point B décrit une droite $a$ perpendiculaire au diamètre passant par le point A(*). Cette droite est indépendante du choix de la droite $p$; car les droites $a$ relatives à chacune des droites $p$ et $q$, supposées séparément fixes, ont un point commun et même direction.

Soient C et D les points de contact des tangentes issues du point A; $A_1$ et $A_2$, $A_3$ et $A_4$ les points d'intersection des droites CD et $a$ avec les axes de la conique; $A_5$ et $A_6$ les conjugués respectifs de $A_1$ et $A_2$ sur ces axes. Le quatrième sommet $B_1$ du rectangle ayant pour côtés $OA_1$ et $OA_2$ est commun aux perpendiculaires abaissées des points $A_1$ et $A_2$ respectivement sur $AA_6$ et $AA_4$. Ce point $B_1$ appartient donc à la droite $a$. On a

$$OA_3 . OA_5 = OA_5 . OA_1 + OA_3 . A_1A_5 .$$

Or

$$\frac{OA_3}{B_1A_1} = \frac{AA_5}{A_1A_5} \quad \text{ou} \quad \frac{OA_5}{OA_2} = \frac{OA_6}{A_1A_5};$$

par conséquent,

$$OA_3 . OA_5 = OA_5 . OA_1 + OA_2 . OA_6 = P_a + P_b,$$

$P_a$ et $P_b$ étant les puissances de l'involution des points conjugués sur les axes. De même

$$OA_4 . OA_6 = P_a + P_b;$$

donc *la droite a est la polaire du point* A *par rapport au cercle de Monge de la conique considérée.*

Si on prend pour les droites $p$ et $q$ les tangentes AC et AD, on voit que la droite $a$ passe par l'orthocentre H du triangle ACD. La droite $a$ peut donc être construite si on connaît seulement le triangle ACD. Donc: *Les cercles de Monge de toutes les coniques qui ont un double contact avec une conique* E *aux points* C *et* D *forment un faisceau*(**).

---

(*) On suppose le point Q à l'infini; $q$ devient le diamètre OA et le point B est à l'infini.

(**) Cette remarque est un cas particulier du théorème suivant, qui est connu :

*Les cercles de Monge relatifs à toutes les coniques qui touchent quatre droites fixes passent par deux points fixes.*

Pour démontrer cette propriété, soient U, V les points d'intersection des cercles ayant pour diamètres les diagonales du quadrilatère complet formé par les tangentes fixes. Les couples de droites joignant U aux sommets opposés du quadrilatère

Si le point A est sur le cercle de Monge, la droite $a$ passe par ce point et réciproquement. Cela exige que le triangle ACD soit rectangle en A, sinon $a$ serait une hauteur de ce triangle et elle ne pourrait être perpendiculaire à la médiane OA. D'ailleurs, si le triangle CAD est rectangle en A, ce point est situé sur $a$ ; par conséquent : ***Le cercle de Monge d'une conique est le lieu des sommets des angles droits circonscrits à la conique.***

Soient B un point quelconque de la droite $a$, F le point de contact d'une tangente menée de B à la conique, G le point (AH, FD), I le point (AC, FB), J le point (CD, AB). La polaire $j$ du point J est la hauteur AH du triangle ACD ; car les perpendiculaires abaissées de C et J respectivement sur les droites $j$ et AC se coupent sur $a$ ; donc la perpendiculaire abaissée de C sur $j$ passe par le point J. Soient K le point (AH, CD), L le conjugué de G sur la droite FD ; on a

$$(CDJK) = (FDLG) = -1,$$

donc les droites CF, JL, GK sont concourantes et leurs pôles I, G, J sont en ligne droite.

De là résulte que les six points ACDFBH sont sur une conique ; H étant l'orthocentre du triangle ACD, cette conique est une hyperbole équilatère. Donc, si les points A et B sont conjugués par rapport au cercle de Monge, les six points ABCDEF sont sur une hyperbole équilatère (E est le point de contact de la seconde tangente issue de B).

Généralisation. *Les plans polaires de deux points* A *et* B *par rapport à une quadrique* (S), *coupent cette surface suivant deux coniques* $\sigma_0$ *et* $\sigma_1$, *situées sur une même quadrique* ($S_1$) *avec les points* A *et* B. *Cette quadrique* ($S_1$) *sera un hyperboloïde équilatère si les points* A *et* B *sont conjugués par rapport à la quadrique, lieu des points d'où l'on peut mener à la surface* (S) *trois tangentes rectangulaires.*

Note. Si l'on considère la parabole tangente aux droites AC et AD aux points C et D, le point A et la droite $a$ seront également distants de la directrice. De là, la construction de la directrice d'une parabole, déterminée par deux tangentes AC, AD et leurs points de contact C et D : du milieu de la droite AH, H étant l'orthocentre du triangle ACD, on abaisse une perpendiculaire sur la médiane de ce triangle, issue du point A.

---

forment une involution rectangulaire ; donc les tangentes menées de U à chacune des coniques sont également rectangulaires, et U appartient au cercle de Monge de chacune de ces courbes. (J. N.)

## Question 771.

(Voir *Mathesis*, (2), II, p. 152.)

*Soit* I *le centre du cercle inscrit à* ABC. *Démontrer que les projections du point de Nagel sur les diamètres du cercle, parallèles aux asymptotes de l'hyperbole équilatère* IABC, *appartiennent à un diamètre de cette hyperbole.* (E. Cesáro.)

*Solution par* M. Sollertinsky. On sait que l'hyperbole équilatère IABC passe par les points de Nagel et de Gergonne correspondant au cercle I. Mais, si l'on construit, sur une corde quelconque d'une hyperbole comme diagonale, un parallélogramme dont les côtés soient parallèles aux asymptotes de l'hyperbole, l'autre diagonale du parallélogramme passe par le centre de la courbe.

*Solution par* M. Droz. Dans le tome IX, p. 207, de *Mathesis*, M. de Longchamps a proposé une question intéressante dont je ne cite qu'une partie :

*On décrit le cercle* $\Delta_a$ *qui touche les côtés* AB, AC *d'un triangle* ABC *et qui a un contact intérieur en* $V_a$ *avec le cercle circonscrit. La polaire de* A *par rapport à* $\Delta_a$ *passe par le centre* I *du cercle inscrit; les droites* $AV_a$, $BV_b$, $CV_c$ *concourent au point inverse du point de Nagel de* ABC (Voir la démonstration, t. X, p. 67).

Je complète cette question en fixant la position du point inverse de Nagel. Si O est le centre du cercle circonscrit, $d$ la distance $A\Delta_a$, $\rho$ le rayon du cercle $\Delta_a$, on a

$$\rho = d \sin \tfrac{1}{2} A, \quad IA = d \cos^2 \tfrac{1}{2} A, \quad d = \frac{4R \sin \frac{1}{2} B \sin \frac{1}{2} C}{\cos^2 \frac{1}{2} A}.$$

Soit L le point de rencontre des droites OI, $AV_a$. En considérant le triangle $OI\Delta_a$ coupé par la transversale $AV_a$, on trouve

$$\frac{OL}{IL} = \frac{OV_a \cdot \Delta_a A}{\Delta_a V_a \cdot IA} = \frac{1}{4 \sin \frac{1}{2} A \sin \frac{1}{2} B \sin \frac{1}{2} C}.$$

Le point L est donc le même pour $AV_a$, $BV_b$, $CV_c$. Il en résulte que *l'inverse du point de Nagel appartient à la droite* OI.

La transformée par points inverses de la droite OI est l'hyperbole équilatère ABCI, car O et I ont pour inverses H et I ; cette hyperbole passe donc par le point de Nagel $\nu$, qui est l'inverse d'un point de la droite OI.

Cela posé, si, sur une corde de l'hyperbole comme diagonale, on

construit un parallélogramme dont les côtés sont parallèles aux asymptotes, la seconde diagonale passe par le centre de la courbe. (*)

Appliquant cette propriété à la corde $\nu I$ de l'hyperbole ABCL, on trouve le théorème de M. Cesàro.

Note. M. Déprez a donné une solution peu différente de celles qui précèdent, et fait quelques remarques intéressantes : 1° L'hyperbole ABCI passe aussi par le point de Gergonne $\Gamma$ de ABC, et par le point P dont les coordonnées sont inversement proportionnelles aux rayons des cercles inscrits à ABC. 2° Dans le théorème de M. Cesàro, on peut remplacer $\nu$ par T ou par P. 3° Les circonférences circonscrites aux triangles podaires des points $\nu$, T, P par rapport à ABC se coupent sur le cercle des neuf points de ABC, au centre de l'hyperbole ABCI.

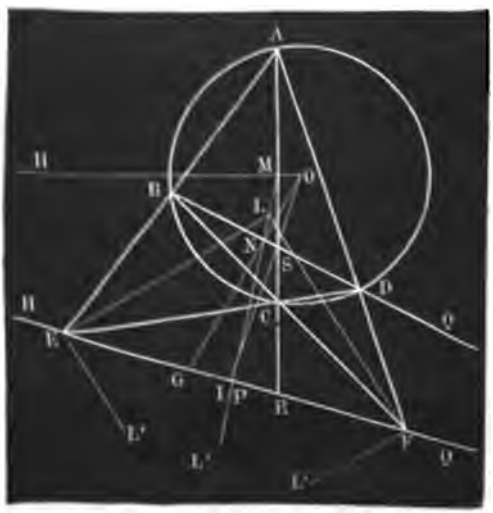
---

## ×Question 774.

(Voir *Mathesis*, (2), II, p. 152.)

*Soient* M, N *les milieux des diagonales* AC, BD *d'un quadrilatère inscriptible* ABCD, *et soient* E, F *les points d'intersection des côtés opposés* AB *et* CD, BC *et* DA. *Démontrer que les circonférences* MNE, MNF *ont pour tangente commune la troisième diagonale* EF.

(Langley.)




*Solution par* M. Droz-Farny. O étant le centre de la circonférence circonscrite, représentons par G, H les points de rencontre de ON, OM avec EF, par P le milieu de EF, par S l'intersection des diagonales AC, BD. AC et BD divisant EF en

---

(*) Ce théorème est dû à Bobillier (*Annales de Gergonne*, t. XIX, page 358); M. Schoute en a déduit des propriétés fort curieuses d'une certaine courbe unicursale du 4e ordre (*Bulletin de Darboux*, t. XIX, p. 278). (Droz)

parties harmoniques, le faisceau S (ABEF) est harmonique ; par suite, les pôles des droites SA, SB, SE, SF forment une division harmonique. Ces pôles, situés sur la polaire EF de S, sont évidemment H, G, F, E ; P étant le milieu de EF, on a

$$\overline{PE}^2 = \overline{PF}^2 = PG \cdot PH.$$

D'autre part, si $r$ désigne le rayon de la circonférence O,

$$OM \cdot OH = ON \cdot OG = r^2 ;$$

le quadrilatère MNGH est donc inscriptible, et l'on a

$$PM \cdot PN = PG \cdot PH = \overline{PE}^2 = \overline{PF}^2,$$

ce qui démontre le théorème.

*Solution par* M. Sollertinsky. Les triangles EBD, ECA étant inversement semblables, les médianes EN, EM sont proportionelles à BD, AC et également inclinées sur la bissectrice de l'angle AED ; de même FN, FM sont dans le rapport BD : AC et également inclinées sur la bissectrice de l'angle AFC. Ces deux bissectrices rencontrent donc MN en un même point L tel, que LN : LM = BD : AC. Semblablement les bissectrices extérieures des angles NEM, NFM se coupent en un même point L′ de MN. L'angle ELF étant droit, la figure ELFL′ est un rectangle ; donc LL′, EF se coupent en leur milieu commun P, et PE = PL. La division harmonique MNLL′ donne

$$\overline{PE}^2 = \overline{PF}^2 = \overline{PL}^2 = PM \cdot PN.$$

Donc EF est la tangente commune aux cercles EMN, FMN.

*Solution par* M. Emmerich. On a successivement

$$SA \cdot SC = SB \cdot SD,$$

$$(SM + MA)(MA - SM) = (SN + NB)(NB - SN),$$

$$\overline{MA}^2 - \overline{MS}^2 = \overline{NB}^2 - \overline{NS}^2. \qquad (1)$$

Les points (A, C, S, R), (B, D, S, Q) forment des groupes harmoniques, R et Q étant les points de rencontre de EF avec AC et BD ; donc

$$\overline{MA}^2 = MS \cdot MR, \quad \overline{NB}^2 = NS \cdot NQ. \qquad (2)$$

Des relations (1) et (2), on conclut

$$MS(MR - MS) = NS(NQ - NS), \quad \text{ou } MS \cdot SR = NS \cdot SQ.$$

[illegible]

[illegible]

## Question [illegible].

[illegible]

Étant M et N deux points correspondants d'une ellipse et du cercle décrit sur le grand axe comme diamètre, le rayon OM de l'ellipse rencontrant en P la tangente menée en N au cercle, on demande l'aire de la courbe engendrée par P. ([illegible].)

Solution par [illegible]. Les coordonnées des points M, N peuvent être représentées par $(a\cos\theta, b\sin\theta)$, $(a\cos\theta, a\sin\theta)$; le rayon OM et la tangente en N ont respectivement pour équations

$$y = x\frac{b}{a}\tan\theta,\quad x\cos\theta + y\sin\theta = a.$$

Le point d'intersection P de ces droites a pour coordonnées

$$x = \frac{a^2 \cos\theta}{a\cos^2\theta + b\sin^2\theta}, \quad y = \frac{ab\sin\theta}{a\cos^2\theta + b\sin^2\theta}, \tag{1}$$

et le lieu de P a pour équation

$$a^2(a^2y^2 + b^2x^2) = (ay^2 + bx^2)^2.$$

Soit Q le point où l'ordonnée de P rencontre ON. Les ordonnées des points P, Q étant dans le rapport constant $b : a$, les aires S, S′ des courbes décrites par ces points sont dans le même rapport. Or l'angle $QOx = \theta$ et $OQ = x : \cos\theta$, $x$ ayant la valeur (1); donc

$$OQ = \frac{a^2}{a\cos^2\theta + b\sin^2\theta}.$$

Il en résulte

$$S' = 2a^4 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\theta}{(a\cos^2\theta + b\sin^2\theta)^2}.$$

Soit I l'intégrale indéfinie. Si l'on écrit

$$I = \int \frac{1}{a^2\left(1 + \frac{b}{a}\operatorname{tg}^2\theta\right)^2} \cdot \frac{d\theta}{\cos^4\theta},$$

on est conduit à poser

$$\sqrt{\frac{b}{a}}\operatorname{tg}\theta = \operatorname{tg}\varphi, \quad \text{d'où} \quad \sqrt{\frac{b}{a}}\frac{d\theta}{\cos^2\theta} = \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi},$$

et comme

$$\cos^2\theta = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2\theta},$$

on aura

$$I = \frac{1}{ab\sqrt{ab}} \int (a\sin^2\varphi + b\cos^2\varphi)\, d\varphi$$

$$= \frac{1}{2ab\sqrt{ab}} \int [a(1 - \cos 2\varphi) + b(1 + \cos 2\varphi)]\, d\varphi$$

$$= \frac{1}{2ab\sqrt{ab}} \left[(a + b)\varphi - \frac{1}{2}(a - b)\sin 2\varphi\right].$$

Observant maintenant qu'à $\theta = 0$, $\theta = \frac{1}{2}\pi$ correspondent les valeurs $\varphi = 0$, $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, on trouve

$$S' = \frac{a^4}{ab\sqrt{ab}}\left[(a+b)\varphi - \frac{1}{2}(a-b)\sin 2\varphi\right]_0^{\frac{1}{2}\pi} = \pi\frac{a^3(a+b)}{2b\sqrt{ab}},$$

$$S = \frac{b}{a}S' = \pi\frac{a^2(a+b)}{2\sqrt{ab}}.$$

M. Fraipont a résolu la même question en introduisant les coordonnées polaires du point P.

---

## ×Question 787.

(Voir *Mathesis*, (2) II, p. 216.)

*Les côtés* BC, CA, AB *d'un triangle* ABC *sont divisés aux points* P, Q, R, *dans un même rapport* $p : q$, *et aux points* P', Q', R' *dans le rapport inverse. Démontrer que les cercles* PQR, P'Q'R' *ont pour axe radical la droite* GK *joignant le centre de gravité de* ABC *au point de Lemoine.* (Tucker(*).)

*Lorsque le rapport* $p : q$ *varie, l'axe radical des cercles* ABC, PQR *enveloppe une conique.* (J. Neuberg).

*Solution par* M^me^ Prime *et* MM. Mandart, Droz, Déprez. Les coordonnées barycentriques des points P, Q, R sont

$$0,\ p,\ q;\quad p,\ 0,\ q;\quad q,\ p,\ 0.$$

En exprimant qu'elles vérifient l'équation de la circonférence PQR, à savoir

$$(\alpha+\beta+\gamma)(u\alpha+v\beta+w\gamma) - a^2\beta\gamma - b^2\gamma\alpha - c^2\alpha\beta = 0,$$

on trouve les égalités de condition

$$vq + wp = \frac{a^2pq}{p+q},\quad up + wq = \frac{b^2pq}{p+q},\quad uq + vp = \frac{c^2pq}{p+q}.$$

---

(*) La première partie de la question 787 est la question 11599 de l'*Educational Times* (juillet 1892). M. Tucker en a donné une solution, avec quelques autres développements et la 2^e^ partie du n° 787, dans le même journal (décembre 1892.)

Celles-ci donnent, en supposant $p + q = 1$,

$$u = pq\,(b^2p^2 + c^2q^2 - a^2pq),$$
$$v = pq\,(c^2p^2 + a^2q^2 - b^2pq),$$
$$w = pq\,(a^2p^2 + b^2q^2 - c^2pq).$$

Soient $u'$, $v'$, $w'$ les quantités analogues relatives au cercle P'Q'R'; elles en diffèrent par le changement de $p$ en $q$ et de $q$ en $p$. L'axe radical des cercles PQR, P'Q'R' aura pour équation

$$(u - u')\,\alpha + (v - v')\,\beta + (w - w')\,\gamma = 0,$$

ou

$$(b^2 - c^2)\,\alpha + (c^2 - a^2)\,\beta + (a^2 - b^2)\,\gamma = 0.$$

On voit immédiatement qu'il passe par le point G (1, 1, 1) et le point K ($a^2$, $b^2$, $c^2$).

L'axe radical des cercles ABC, PQR est représenté par l'équation

$$u\alpha + v\beta + w\gamma = 0;$$

en substituant les valeurs de $u$, $v$, $w$, on trouve

$$(b^2\alpha + c^2\beta + a^2\gamma)p^2 - (a^2\alpha + b^2\beta + c^2\gamma)pq + (c^2\alpha + a^2\beta + b^2\gamma)q^2 = 0.$$

L'enveloppe de cet axe a pour équation

$$(a^2\alpha + b^2\beta + c^2\gamma)^2 - 4\,(b^2\alpha + c^2\beta + a^2\gamma)\,(c^2\alpha + a^2\beta + b^2\gamma) = 0.$$

Remarques. — 1. Cette enveloppe est une conique qui touche les brocardiennes de la droite de Lemoine aux points où elles rencontrent la réciproque de cette droite. (J. N.)

2. On peut voir géométriquement que l'axe radical des cercles ABC, PQR enveloppe une conique. En effet, les axes radicaux des trois cercles ABC, PQR, P'Q'R' concourent en un même point; donc de chaque point de la droite GK, on peut mener deux droites de l'enveloppe. (Droz.)

3. Les droites QR et Q'R' se coupent en un point A' de la médiane AG; les droites RP et R'P', en un point B' de BG; les droites PQ et P'Q', en un point C' de CG. Le triangle A'B'C' est homothétique à ABC; le rapport de similitude est égal à $(m^2 - mn + n^2) : (m + n)^2$. Les six points P, Q, R, P', Q', R' sont sur une conique homothétique à l'ellipse de Steiner et ayant pour équation

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \left(\frac{p}{q} + \frac{q}{p}\right)(\beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta) = 0. \quad \text{(Tucker.)}$$

4. Prenons sur BC, CA, AB les longueurs $BP = CQ = AR = \lambda$ ; et aussi $CP' = AQ' = BR' = \lambda$. L'axe radical des cercles PQR, P'Q'R' passe par le centre de gravité du périmètre du triangle ABC.

Si les distances BP, CQ, AR sont inversement proportionnelles aux côtés BC, CA, AB et que P', Q', R' soient les isotomiques de P, Q, R, l'axe radical des cercles PQR, P'Q'R' passe constamment par le centre de gravité de AB.C (DÉPREZ.)

---

## *QUESTIONS D'EXAMEN.

**541.** L'expression $9^n - 8n - 1$ est divisible par 64. (*J. de Vuibert.*)

**542.** Les nombres 20 et 21 sont les seuls nombres de deux chiffres dont le plus petit diviseur autre que l'unité est égal à la somme des chiffres de ces nombres. (*J. de Vuibert.*)

**543.** Trouver l'âge actuel d'une personne sachant qu'il est égal à la somme des chiffres de l'année de sa naissance. (*J. de Vuibert.*)

**544.** Si

$$aA = bB = cC, \text{ on a } (a + B)(b + C)(c + A) = (A + b)(B + c)(C + a)$$

(*J. de Vuibert*)

**545.** Si un nombre de trois chiffres est divisible par 21, il en de même de la somme du chiffre des centaines et de quatre fois le chiffre des unités, diminuée de deux fois le chiffre des dizaines. (*J. de Vuibert.*)

**546.** Trouver quatre nombres entiers, positifs, tels que leur somme soit égale à la somme obtenue en ajoutant au produit du plus grand par le plus petit, le produit des deux autres.

Soient $x$, $x + y$, $x + z$, $x + u$, les quatre nombres cherchés rangés par ordre de grandeur. On trouve pour équation du problème

$$2x(x - 2) + (y + z + u)(x - 1) + yz = 0;$$

d'où il résulte que $x$ est inférieur à 2. Donc $x = 1$, $yz = 2$, ou $y = 1$, $z = 2$, ou $y = 1$, $z = 2$, $u$ indéterminé. Les nombres cherchés sont 1, 2, 3 et un quatrième nombre quelconque. (J. M. E.)

**547.** Si deux angles opposés A, C d'un quadrilatère ABCD sont complémentaires, le carré du produit des diagonales est égal à la somme des carrés des produits des côtés opposés.

Ce théorème, peu connu, est compris dans ce théorème plus général :

Si la circonférence ABC rencontre DA, DB, DC en A', B', C', les produits

DA.BC, DB.CA, DC.AB sont proportionnels à B'C', C'A', A'B', et les angles du triangle A'B'C' s'expriment très simplement en fonction des angles que font, deux à deux, les droites AB, BC, CA, DC, DA, DB.

**548.** Si A et B sont deux points d'une circonférence de centre O, on fait passer une circonférence C par les points O, A, B.

Soit $\alpha$ l'angle AOB. Démontrer que le rapport des arcs interceptés sur les circonférences C et O par l'angle AOB $= \cos \frac{1}{2} \alpha$. (L. MEURICE.)

---

## QUESTIONS PROPOSÉES.

***901.** Sur une droite AB donnée de grandeur et de position dans le plan horizontal, considérons le point A comme un élément de la surface de ce plan horizontal. Soit alors une droite BC située dans le plan vertical qui passe par AB Si l'on fait glisser sur BC une lumière d'intensité constante, il y a une position M pour laquelle la quantité de lumière reçue en A est maximum. Trouver le lieu des points M satisfaisant à cette condition, quand la droite BC prend toutes les positions possibles autour du point B et dans le plan vertical. (A. MOREL.)

**902.** Les normales en deux points P, P' d'une conique coupent en C, C' l'axe focal. Soit F un foyer ; les rayons vecteurs PF, P'F sont rencontrés, respectivement, en D, D' par les parallèles à la corde PP' menées par C', C. Démontrer géométriquement que FD = FD' et que la droite DD' passe par le point d'intersection des normales PC, P'C'. Déduire de ce qui précède une construction du centre de courbure relatif au point P.

(DROZ.)

***903.** Soient $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ les arcs de grand cercle joignant les sommets du triangle sphérique ABC au centre isogone Z (point d'où l'on voit les côtés BC, CA, AB sous le même angle). Démontrer la relation

$$\sin \beta \sin \gamma \cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin a \sin h_a,$$

$h_a$ désignant la hauteur abaissée de A sur BC. (DÉPREZ.)

***904.** Quelle que soit la base du système de numération, aucun des nombres représentés par

$$10101, \quad 101010101, \quad 1010101010101, \quad \cdots$$

n'est premier. (E. CATALAN.)

**805.** Trouver, dans le plan d'un rectangle ABCD, un point M tel, que les triangles ABM, BCM, CDM, DAM aient des cercles circonscrits égaux. Trouver le lieu géométrique du point M et des orthocentres des quatre triangles. (H. MANDART.)

**806.** Si quatre droites $a, b, c, d$ sont coupées par une cinquième $e$ aux points A, B, C, D, démontrer que les coniques circonscrites aux triangles $bcd$, $cda$, $dab$, $abc$ et touchant respectivement $a, b, c, d$ en A, B, C, D rencontrent $e$ en un même point. (J. NEUBERG.)

*807. On a, identiquement,

$$\frac{1+x}{1-x}x+\frac{1+x^2}{1-x^2}x^4+\cdots+\frac{1+x^n}{1-x^n}x^{(n^2)}=$$

$$\frac{x}{1-x}(1+x^n)+\frac{x^2}{1-x^2}(1+x^{4n})+\cdots+\frac{x^n}{1-x^n}[1+x^{(n^2)}.]$$

Si l'on suppose $x$ compris entre 0 et 1, et que l'on fasse croître $n$ indéfiniment, cette identité devient celle de Clausen. (BASCHWITZ.)

**808.** M étant un point quelconque du plan d'un triangle ABC, soient $H_a$, $H_b$, $H_c$ les orthocentres des triangles MBC, MCA, MAB. Si les droites $AH_a$, $BH_b$, $CH_c$ sont concourantes, M est sur la circonférence circonscrite au triangle ABC. Quel est le lieu du point de concours des droites $AH_a$, $BH_c$, $CH_a$? (LEMOINE.)

**809.** On joint les extrémités C et D d'un diamètre d'une conique à un foyer F de cette courbe, par des droites rencontrant le diamètre conjugué C'D' aux points M et M'. Si O est le centre de la conique,

$$OM \cdot OM' + OC^2 = \textit{constante}.$$

Si $\alpha$ est l'angle que la tangente au point C fait avec un rayon vecteur CF, on a

$$OC' \sin\alpha = \textit{constante}.$$ (CL. SERVAIS.)

---

**Rectification.** M. Catalan nous avait signalé, avant M. Lemoine, que la construction de la moyenne proportionnelle attribuée à M. Bordage avait été donnée par M. Gouzy (Voir *Mathesis*, (2), II, 275).

# SUR LE CERCLE ORTHOCENTROÏDAL;

par Madame PRIME.

Soient G, H, le centre de gravité et l'orthocentre du triangle ABC. Le cercle décrit sur GH comme diamètre (*cercle orthocentroïdal*) jouit de propriétés assez curieuses, dont un grand nombre ont été signalées dans *Mathesis*, t. X, p. 166.

Dans l'article suivant, je vais faire connaître quelques nouvelles propositions sur ce cercle.

**1.** Soient $F_1$, $F_2$, $F_3$ trois figures semblables construites sur les hauteurs $AH_a$, $BH_b$, $CH_c$ comme lignes homologues; désignons par $a_2$, $b_2$, $c_2$ les points de rencontre du cercle (GH) avec les médianes AA', BB', CC', et par $a_1$, $b_1$, $c_1$ ses points d'intersection avec les hauteurs. Le système des figures semblables $F_1$, $F_2$, $F_3$ a pour cercle de similitude le cercle (GH), pour triangle de similitude $a_2b_2c_2$, pour triangle invariable $a_1b_1c_1$ (CASEY, *Géométrie récente*). On en conclut que les médianes du triangle formé par trois droites homologues de $F_1$, $F_2$, $F_3$, passent par $a_2$, $b_2$, $c_2$ et se coupent sur la circonférence (GH).

**2.** Cherchons la surface S' du triangle $a_1b_1c_1$. Ce triangle est inversement semblable à ABC; car les droites $Ga_1$, $Gb_1$, $Gc_1$ sont parallèles à BC, CA, AB. Le rayon du cercle circonscrit étant égal à $\frac{1}{2}$ GH = OG, on a

$$\frac{S'}{S} = \frac{\overline{OG}^2}{R^2} = \frac{R^2 - \frac{1}{9}(a^2+b^2+c^2)}{R^2} = 1 - \frac{4S \operatorname{cotg}\omega}{9R^2}$$

$$= 1 - \tfrac{8}{9} \sin A \sin B \sin C \operatorname{cotg}\omega;$$

$\omega$ désigne ici l'angle de Brocard et l'on sait que

$$\operatorname{cotg}\omega = \frac{a^2+b^2+c^2}{4S}, \quad S = 2R^2 \sin A \sin B \sin C.$$

**3.** Cherchons les coordonnées des points $a_1$, $b_1$, $c_1$.

De ce que $a_1$ divise $H_aA$ dans le rapport 1 : 2, on déduit facilement que les coordonnées normales de ce point sont proportionnelles à

$$\frac{1}{2\cos B \cos C}, \quad \frac{1}{\cos B}, \quad \frac{1}{\cos C}$$

et les coordonnées barycentriques à

$$\tfrac{1}{2}(\operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C),\quad \operatorname{tg} B,\quad \operatorname{tg} C.$$

**4.** Pour trouver les coordonnées de $a_2$, nous cherchons d'abord le rapport $Aa_2 : a_2A'$. Le quadrilatère $H_aHa_2A'$ étant inscriptible, on a

$$Aa_2 \cdot AA' = AH \cdot AH_a = 2OA' \cdot AH_a = a \operatorname{cotg} A \cdot h_a = bc \cos A;$$

donc

$$a_2A = \frac{bc\cos A}{m_a},\quad a_2A' = m_a - \frac{bc\cos A}{m_a} = \frac{m_a^2 - bc\cos A}{m_a}.$$

En ayant égard aux relations

$$m_a^2 = \tfrac{1}{2}(b^2 + c^2) - \tfrac{1}{4}a^2,\quad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A,$$

on trouve

$$a_2A' = \frac{a^2}{4m_a}\ (*);$$

par suite,

$$Aa_2 : a_2A' = 4bc\cos A : a^2.$$

Il en résulte que les coordonnées barycentriques de $a_2$ sont proportionnelles à

$$a^2,\quad 2bc\cos A,\quad 2bc\cos A,$$

et les coordonnées normales à

$$a,\quad 2c\cos A,\quad 2b\cos A.$$

**5.** *Les côtés opposés de l'hexagone $a_1c_2b_1a_2c_1b_2$, qui est un hexagone harmonique ayant pour point de Lemoine le point de Lemoine* K *du triangle* ABC, *se coupent deux à deux sur les côtés du triangle* ABC *en trois points de la droite de Lemoine des triangles $a_1b_1c_1$, $a_2b_2c_2$.*

En effet, la droite $a_2b_1$ a pour équation

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ a & 2c\cos A & 2b\cos A \\ 2\cos C & 1 & 2\cos A \end{vmatrix} = 0;$$

(*) Cette valeur résulte aussi de ce que $a_2$ est le symétrique, par rapport à BC, du point de rencontre de la symédiane AK avec la circonférence ABC, ou le symétrique, par rapport à A', du point où la médiane AA' rencontre la circonférence ABC. — Voir *Mathesis*, loc. cit.

elle coupe le côté AB en un point de la droite

$$\begin{vmatrix} x & y \\ a - 2b\cos C & 2c\cos A - b \end{vmatrix} = 0. \qquad (1)$$

De même, la droite $a_1b_2$, qui a pour équation

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2c\cos B & b & 2a\cos B \\ 1 & 2\cos C & 2\cos B \end{vmatrix} = 0,$$

coupe le côté AB au même point que la droite

$$\begin{vmatrix} x & y \\ 2c\cos B - a & b - 2a\cos C \end{vmatrix} = 0. \qquad (2)$$

Or

$$\frac{a - 2b\cos C}{2c\cos B - a} = \frac{2c\cos A - b}{b - 2a\cos C} = 1;$$

donc les équations (1) et (2) sont identiques. En tenant compte des égalités $a = b\cos A + c\cos B$, $b = c\cos A + a\cos C$, $c = a\cos B + b\cos A$, on peut écrire les équations (1) et (2) ainsi :

$$\frac{x}{b\cos C - c\cos B} + \frac{y}{c\cos A - a\cos C} = 0.$$

On en conclut que la Pascale de l'hexagone $a_1b_2c_1a_2b_1c_2$ a pour équation

$$\frac{x}{b\cos C - c\cos B} + \frac{y}{c\cos A - a\cos C} + \frac{z}{a\cos B - b\cos A} = 0,$$

ou

$$\frac{x}{\sin(A - C)} + \frac{y}{\sin(C - A)} + \frac{z}{\sin(A - B)} = 0.$$

6. Cherchons l'équation du cercle (GH). Si $l$, $m$, $n$ sont les puissances des sommets du triangle de référence par rapport à une circonférence, l'équation, en coordonnées barycentriques, de cette courbe est

$$\Sigma\alpha\Sigma l\alpha - \Sigma a^2\beta\gamma = 0.$$

Dans le cas qui nous occupe,

$$l = Aa_1 \cdot AH = \tfrac{2}{3} h_a \cdot a\cot g A = \tfrac{4}{3} S\cot g A, \text{ etc.};$$

donc le cercle (GH) est représenté par

$$\tfrac{4}{3} S\Sigma\alpha\Sigma\alpha\cot g A - \Sigma\alpha^2\beta\gamma = 0. \qquad (3)$$

Si l'on observe que

$$a^2 = 2S\,(\operatorname{cotg} B + \operatorname{cotg} C),\ \text{etc.},$$

on peut encore mettre (3) sous les formes

$$2\Sigma\alpha^2 \operatorname{cotg} A - \Sigma\,(\operatorname{cotg} B + \operatorname{cotg} C)\,\beta\gamma = 0,$$
$$3\Sigma\alpha^2 \operatorname{cotg} A - \Sigma\alpha\Sigma\alpha \operatorname{cotg} A = 0.$$

De ces équations, on déduit aisément que le cercle orthocentroïdal, le cercle circonscrit au triangle ABC, le cercle des neuf points et le cercle polaire ont pour axe radical commun l'axe orthique de ABC (Voir *Mathesis*, loc. cit.).

Si l'on prend pour triangle de référence le triangle A'B'C', on a

$$l = A'a_2 \,.\, A'G = \frac{a^2}{12m_a^2},\ \text{etc.},$$

et le cercle (GH) a pour équation

$$\Sigma\alpha\Sigma\frac{a^2}{3m_a^2}\,\alpha - \Sigma a^2\beta\gamma = 0.$$

---

## SUR LA FORMULE DE LEIBNIZ.

1. Les formules de Leibniz et de Delaunay(*)

$$D^m PQ = PD^m Q + m_1 P' D^{m-1} Q + m_2 P'' D^{m-2} Q + m_3 P''' D^{m-3} Q + \text{etc.},$$
$$PD^m Q = D^m PQ - m_1 D^{m-1} P' Q + m_2 D^{m-2} P'' Q - m_3 D^{m-3} P''' Q + \text{etc.},$$

où $m_1$, $m_2$, $m_3$, etc. désignent les coefficients du binôme :

$$m_1 = \frac{m}{1},\quad m_2 = \frac{m\,(m-1)}{1.2},\quad m_3 = \frac{m\,(m-1)\,(m-2)}{1.2.3},\ \text{etc.}$$

ont été généralisées par Pfaff et Genocchi, de la manière suivante :

$$\left.\begin{aligned} D^m PQ = PD^m Q + m_1 P' u D^{m-1}\frac{Q}{u} + m_2 DP' u^2 D^{m-2}\frac{Q}{u^2} \\ + m_3 D^2 P' u^3 D^{m-3}\frac{Q}{u^3} + \text{etc.} \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

$$\left.\begin{aligned} PD^m Q = D^m PQ - \frac{m_1}{u} D^{m-1}\,(P'u\,.\,Q) + \frac{m_2}{u^2} D^{m-2}\,(P'u^2\,.\,Q) \\ - \frac{m_3}{u^3} D^{m-3}\,(P'u^3\,.\,Q) + \text{etc.} \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

---

(*) $D^m PQ$ désigne ici la dérivée $m^e$ du produit PQ.

Genocchi a démontré ces diverses formules et quelques autres du même genre, non seulement dans le cas où l'indice $m$ est positif et entier, mais encore dans celui où $m$ est fractionnaire et positif, ou entier et négatif. En outre, Genocchi a trouvé les conditions de convergence des séries qui forment le second membre quand le nombre des termes y est illimité (*).

Une curieuse application de la formule (1) contenue dans le travail de Genocchi et l'article de M. Hermite, sur la formule de Delaunay (*Nouvelle correspondance mathématique*, t. II, p. 54-55) nous ont engagé à chercher une démonstration élémentaire des formules (1) (2), quand $m$ est entier et positif.

2. En développant les seconds membres, dans les formules (1), (2), on trouve des termes d'une certaine forme, dont les coefficients ne dépendent pas de la nature des fonctions P, Q, $u$. Pour trouver ces coefficients, il suffira par conséquent de faire les hypothèses $P = e^{px}$, $Q = e^{qx}$, $u = e^{kx}$. On ramène ainsi la vérification des formules (1) (2) à celle des égalités suivantes, obtenues en faisant les substitutions dont il vient d'être question

$$\left.\begin{aligned}(p+q)^m = pp^{-1}q^m + m_1p\,(p+k)^0\,(q-k)^{m-1} \\ + m_2p\,(p+2k)\,(q-2k)^{m-2} + m_3p\,(p+3k)^2\,(q-3k)^{m-3} + \text{etc.}\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

$$\left.\begin{aligned}q^m = pp^{-1}\,(p+q)^m - m_1p\,(p+k)^0\,(p+q+k)^{m-1} \\ + m_2p(p+2k)(p+q+2k)^{m-2} - m_3p\,(p+3k)^2\,(p+q+3k)^{m-3} + \text{etc.}\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

La formule (3), qui est le binôme d'Abel (*Œuvres*, première édition, I, pp. 31-32), peut se déduire de (4), en remplaçant dans celle-ci $q$ par $-(p+q)$, ou $p+q$, par $-q$. Il suffit donc de s'occuper de la formule (4).

---

(*) A. Genocchi. *Dimostrazione d'una formula di Leibnizio e Lagrangio e di alcune formole affine* (Mémoires de Turin, 2me série, t. XXVI, 1869; 17 p. in-4°). La première formule, due à Leibniz, a été retrouvée par Lagrange, lorsqu'il était encore très jeune. La seconde, que Winkler attribue à Jacobi, dans les *Sitzungsberichte* de Vienne, t. XLVII, p. 174-175, 1863, et qu'il croit n'avoir jamais été publiée, est en réalité bien connue. On la trouve dans un Mémoire de Delaunay (*Journal de Liouville*, t. VI, p. 212, 1841), dans le *Journal de Crelle* (t. LIV, p. 290, 1857; LV, p. 305, 1858) et dans Moigno, *Calcul des variations*, p. 176, 186. La troisième formule, numérotée (1) dans le texte, a été publiée en 1794, par Pfaff, dans les *Archives de Hindenbourg*; enfin la dernière (2), est de Genocchi, à qui nous empruntons les renseignements qui précèdent.

En faisant $q = 0$, dans (4), on trouve, après division par $p$,

$$0 = p^{m-1} - m_1 (p+k)^{m-1} + m_2 (p+2k)^{m-1} - m_3 (p+3k)^{m-1} + \text{etc.} \quad (5)$$

De même cette dernière relation, pour $k = 0$, devient, après division par $p^{m-1}$ :

$$0 = 1 - m_1 + m_2 - m_3 + \text{etc.} \quad (6)$$

Cette dernière égalité est vraie, car elle équivaut à

$$0 = 1 - \frac{m}{1} + \frac{m(m-1)}{1.2} - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} + \text{etc.} = (1-1)^m.$$

Nous allons faire voir que l'égalité (6) entraîne l'égalité (5), celle-ci l'égalité (4), et, par suite (3), (2), (1), en employant un procédé de démonstration identique au fond à celui d'Abel, dans l'article cité plus haut.

3. En dérivant par rapport à $k$, on déduit de (5) la relation

$$0 = r^{n-1} - n_1 (r+k)^{n-1} + n_2 (r+2k)^{n-1} - n_3 (r+3k)^{n-1} + \text{etc.},$$

où $n = m - 1$, $r = p + k$. Supposons cette égalité vraie. Alors les deux membres de la relation (5), ayant même dérivée par rapport à $k$, ne peuvent différer que par une constante. Or cette constante est nulle, car pour $k = 0$, d'après (6), le second membre de (5) est égal au premier.

Il résulte de là que la relation (5) est vraie pour une valeur quelconque de $m$, si elle est vraie pour cette valeur diminuée d'une unité. Or pour $m = 2$, on a :

$$0 = p - 2(p+k) + (p+2k).$$

Par suite, l'égalité (5) subsiste pour $m = 3, 4, 5$, etc., ou pour une valeur quelconque positive et entière.

4. Considérons maintenant l'égalité (4) à vérifier et dérivons par rapport à $q$. Nous trouvons, en divisant par $m$, après dérivation,

$$\left.\begin{aligned} q^n = {} & p p^{-1} (p+q)^n - n_1 p (p+k)^0 (p+q+k)^{n-1} \\ & + n_2 p (p+2k) (p+q+2k)^{n-2} - \text{etc.} \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

$n$ étant encore égal à $n - 1$.

Supposons $m$ la relation (7) exacte. Les deux membres de (4) ayant même dérivée par rapport à $q$, ne diffèrent que par une constante. Cette constante est nulle, car pour $q = 0$, d'après l'égalité (5) démontrée plus haut, le second membre de (4) est égal au premier. La relation (4) est donc vraie pour une valeur quelconque entière et positive de $m$, si elle est

vraie pour une valeur inférieure. Or pour $m = 1$, (4) devient une identité

$$q = (p + q) - p.$$

Donc enfin (4) et, par suite (3), (2), (1) subsistent pour $m$ entier et positif. (P. M.).

22 juillet 1876.

---

## BIBLIOGRAPHIE.

*Leçons de cinématique et de dynamique suivies de la détermination des centres de gravité à l'usage des candidats à l'École Polytechnique*, par X. ANTOMARI, ancien élève à l'école normale, agrégé des Sciences mathématiques, directeur des études et professeur de mathématiques spéciales à l'École Monge. Paris, Nony et Cie, 1892. Un volume in-8° de IV-232 p. in-8° avec 81 figures dans le texte. Prix : 4 fr.

Le nouveau programme d'admission à l'École polytechnique de Paris comprend la cinématique, la dynamique et la statique. L'auteur s'est efforcé d'écrire un manuel qui corresponde à ce programme, sauf qu'en statique il ne traite que la détermination des centres de gravité, renvoyant pour le reste aux leçons de statique de M. Carvallo. L'ouvrage de M. Antomari est un bon livre qui sera utile, non seulement aux candidats pour lesquels il est écrit, mais encore à tous ceux qui veulent acquérir des notions de mécanique. Voici l'indication des matières traitées dans ce livre et quelques observations critiques qui peuvent être faites.

Dans un chapitre préliminaire, l'auteur expose la composition et les produits géométriques de vecteurs.

Le livre I comprend la cinématique du point *matériel (?)*. Dans le premier chapitre, la vitesse et l'accélération sont considérées comme des grandeurs algébriques; dans le second chapitre, on les considère comme des vecteurs. La détermination de la vitesse en coordonnées polaires ne nous paraît pas suffisamment expliquée; l'auteur dit que le déplacement AA′ est la somme géométrique de deux autres AI et IA′ et en conclut que la vitesse lim $(AA' : \Delta t)$ est la somme géométrique des deux vitesses lim $(AI : \Delta t)$ et lim $(IA' : \Delta t)$. L'auteur aurait dû démontrer dans ses préliminaires que l'on peut diviser les termes d'une équation vectorielle par une même quantité et que l'on peut passer à la limite dans des équations de cette espèce. Le chapitre III est consacré à la détermination de la vitesse et de l'accélération en coordonnées cartésiennes; le chapitre IV traite des mouvements relatifs et de la composition des mouvements; le chapitre V contient quelques applications.

Le livre II renferme la dynamique du point matériel. Les quatre premiers chapitres contiennent respectivement : 1° les principes généraux; 2° l'application au mouvement des projectiles; 3° la proportionnalité des forces aux accélérations dans le cas des forces constantes; 4° cette même proportionnalité dans le cas général et la composition des forces. La grandeur des forces est définie par l'équilibre; la

proportionnalité des forces aux accélérations est démontrée rigoureusement dans le cas des forces constantes. Dans le cas d'une force variable, l'auteur dit : « Si $\Delta t$ est très petit, on peut considérer la force comme constante dans cet intervalle, de sorte que sa valeur, en vertu du premier cas, est $m\frac{\Delta v}{\Delta t}$. » Nous ne considérons pas ce raisonnement comme rigoureux. Si l'auteur s'est heurté à cette difficulté, c'est que la définition de la force, qu'il a choisie, ne s'applique qu'aux forces constantes. On pourrait compléter cette définition en suivant les idées de l'auteur; mais que de longueurs on aurait évitées, en adoptant immédiatement comme définition que les forces, constantes ou variables, sont mesurées par des quantités proportionnelles aux accélérations qu'elles produisent. Dans le chapitre V, on trouve les équations du mouvement d'un point et les problèmes usuels. Le chapitre VI contient le théorème des forces vives. L'auteur définit le travail élémentaire pour un déplacement infiniment petit *ds* du point, en considérant la force comme constante; le travail total est la somme des travaux élémentaires. C'est là un langage d'autant plus incorrect qu'il ne suffit pas ici de sous-entendre le mot limite. Le travail élémentaire tel qu'il est utilisé dans l'équation différentielle des forces vives, n'est ni le travail infiniment petit exact, ni celui qu'on obtient en supposant la force constante; c'est une véritable différentielle que l'on ne peut obtenir qu'en prenant comme déplacement la différentielle de l'arc portée suivant la tangente à la trajectoire. Le chapitre VII traite des forces centrales et du mouvement des planètes, le chapitre VIII du mouvement d'un point sur une courbe et une surface fixes.

Le livre III contient en cinq chapitres la détermination des centres de gravité : d'abord les théorèmes généraux, puis la recherche des centres de gravité des lignes, des surfaces, des volumes, et enfin les théorèmes de Guldin.

Ajoutons que chaque livre est suivi de nombreux exercices, choisis judicieusement de manière que les commençants ne soient pas rebutés par des problèmes trop difficiles. (J. M.).

---

*Cours de géométrie descriptive de l'École militaire* par F. CHOMÉ, professeur à l'École militaire de Belgique. Première partie. Livre premier, à l'usage des candidats à l'École militaire et aux écoles spéciales des Universités. Seconde édition. Bruxelles, Castaigne; Paris, Gauthier-Villars et fils, 1893. (Ouvrage autorisé par le Conseil de perfectionnement de l'enseignement moyen). Un volume in-4° de 159 pages et un atlas in-4° de 37 planches. Prix : 10 francs (*).

I. *Sommaire*. Préface, introduction. Première partie : Projections orthogonales sur deux plans perpendiculaires. Livre premier. Du point, de la droite et du plan. *Chapitre I* (73 pages). Représentation du point, de la droite et du plan considérés

---

(*) Nous avons communiqué notre compte rendu en épreuve à M. le Professeur Chomé, qui nous a adressé la réponse que nous publions plus bas. C'est aux professeurs qui expérimenteront l'un et l'autre mode d'enseignement de la géométrie descriptive à juger lequel vaut le mieux, celui de Monge et de Brasseur, ou celui de MM. Mannheim et Chomé.

isolément, ou l'un par rapport à chacun des deux autres. 1. Du point. 2. De la droite. 3. Du plan. 4. Conventions relatives à la représentation des figures. 5. Sections planes faites dans les polyèdres. 6. Intersection de deux polyèdres.

*Ch. II* (36 pages). Rabattements, rotations et changements de plans de projection. 1. Généralités. 2. Rabattements. 3. Rotations. 4. Changement des plans de projection. 5. Remarques, problèmes, applications et exercices.

*Ch. III* (23 pages). Plus courtes distances entre les points, les droites et les plans. Angles des droites et des plans. 1. Généralités. 2. Des plus courtes distances. 3. Des grandeurs angulaires. 4. Résolution des trièdres.

*Appendices* (20 pages). 1. Prescriptions à observer pour l'exécution des épures par M. Goedseels(*). 2. Programmes des épures demandées aux examens d'entrée à l'École militaire. 3. Autres programmes d'épures.

II. Voici, d'après la préface de l'auteur, ce qui distingue de la précédente, l'édition actuelle de son ouvrage.

La première édition du cours de M. Chomé a paru en 1886 (Gand, Meyer-Van Loo, 89 p. in-4° et atlas de 34 planches). La nouvelle édition comprend, en plus que la première, les §§ 4, 5, 6 du ch. I et les trois appendices.

La nouvelle édition diffère en outre de la première « par une exposition nouvelle et plus rationnelle des principes... Depuis longtemps, nous nous abstenons de tracer la ligne de terre, dans nos épures, non seulement parce que sa direction seule importe pour la représentation des corps et que dans les applications de la géométrie descriptive aux arts, on ne la dessine jamais; mais encore parce que nous voulons empêcher nos élèves d'avoir constamment recours à l'emploi intempestif des plans de projection. »

« Combien d'élèves sont embarrassés de se servir de plans qui ne seraient pas représentés par leurs traces sur les plans de projection! Combien d'élèves sont embarrassés de chercher l'angle des plans de deux faces d'un polyèdre, quand ils ne peuvent, au préalable, déterminer *dans les limites de l'épure*, les traces de ces plans! »

« Nous avons voulu, dans cette édition, enseigner immédiatement les méthodes telles qu'elles sont employées par les ingénieurs, et nous nous sommes attaché à les établir d'une manière simple et précise, en ne faisant que des conventions parfaitement permises et entièrement d'accord avec nos habitudes. »

Pour rendre plus facile la lecture de son Cours, l'auteur emploie des notations, qui permettent « de toujours parler des figures dans l'espace sans se préoccuper des projections que l'on trace d'après les règles connues... » On dira peut-être que ces notations surchargent les épures élémentaires de lettres, mais « Peut-on sérieusement songer à sacrifier la simplicité du langage, la clarté et la concision dans l'exposition des principes, à une esthétique de figure? » Ces notations qui rendent la lecture du texte beaucoup plus simple sont les suivantes : un point A ou une

(*) Ces prescriptions sont beaucoup trop minutieuses. On peut faire de très bonnes épures à beaucoup moins de frais.

droite L de l'espace ont leurs projections représentées par $A^h$, $A^v$ et $L^h$, $L^v$; de même la projection horizontale d'un plan vertical P, sera désignée par $P^V$, un *plan de bout* (c'est-à-dire, perpendiculaire au plan vertical) Q aura pour projection verticale $Q^H$.

La théorie des changements de plan de projection est exposée avec soin. En général, l'exposition des méthodes est accompagnée d'exemples nombreux.

III. Ce qui caractérise le livre de M. Chomé, c'est évidemment la suppression systématique de l'usage de la ligne de terre. Selon nous, cette suppression *prématurée* complique, sans utilité immédiate, l'exposition *graduée* des éléments de la géométrie descriptive (*).

Il nous semble, en outre, que dans cette édition, comme dans la précédente, l'auteur examine *explicitement* un trop grand nombre de cas ou d'exemples particuliers. Ainsi, il en considère 13, dans le problème de l'intersection de deux plans (**).

Mais si l'on admet le point de vue de l'auteur, point de vue plutôt *logique* que *pédagogique*, ces deux critiques tombent et son livre ne mérite plus que des éloges. Nous le signalons donc aux professeurs qui veulent s'initier, dans un bon manuel, au mode d'exposition de la géométrie descriptive recommandé par M. Mannheim en 1882 et adopté depuis cinq ans à l'École militaire et dans un certain nombre des grands lycées de Paris.

P. MANSION.

## Réponse au compte rendu de M. Mansion.

Dans le compte rendu que l'on vient de lire, il y a des lacunes, une erreur et des affirmations sans preuves.

I. — *Lacunes.* 1° (pp. 40-42, I et II). Il eût été surtout intéressant de signaler, dans un compte rendu, mieux qu'on ne peut le faire par une copie de la table des matières, ou par un extrait de la préface, ce qui distingue l'ouvrage des manuels analogues. On aurait pu signaler ainsi, non seulement les conventions permettant de supprimer la ligne de terre, les notations employées et la méthode suivie pour

(*) « Il est une maxime aussi sage qu'ancienne : Dans tout enseignement élémentaire, on ne doit jamais courir au devant des difficultés. » (PONCELET).

(**) « Pour représenter, dit l'auteur, une surface quelconque, on représente les figures qui la déterminent, en ayant soin d'ajouter oralement, ou par écrit, comment on peut engendrer la surface au moyen de ces figures. Ainsi un plan est *représenté* par les projections de deux droites qui se coupent ou de deux droites parallèles, ou d'une droite et d'un point, ou de trois points » (p. 27). Selon nous, cela n'est pas exact : ces données *déterminent* le plan, mais ne le *représentent* que si elles font suffisamment image dans l'épure. Un hyperboloïde gauche est *déterminé*, mais non *représenté*, par ses trois directrices rectilignes, accompagnées d'une phrase explicative. N'est-ce pas cette confusion entre *détermination* et *représentation* d'un plan qui a entraîné l'auteur à la considération de beaucoup de cas ou d'exemples particuliers où l'emploi de la ligne de terre est nuisible, puis enfin à la suppression systématique de l'usage de cette ligne?

les changements des plans de projection, mais encore les *méthodes sûres et générales* données pour résoudre tous les problèmes et particulièrement : pour déterminer, dans la représentation des corps, le *vu* et le *caché;* pour chercher les sections planes et les intersections des polyèdres, pour faire les rabattements et les rotations ; pour chercher les plus courtes distances et les grandeurs angulaires.

2° (page 41, ligne 34). Le compte rendu ne dit pas si son auteur partage l'avis de celui qui dirait que nos notations surchargent les épures de lettres. Cet avis n'est certainement pas le nôtre et ceux qui regarderont nos planches seront loin de le partager. Le compte rendu ne dit pas non plus, et c'était un fait important à mettre en évidence, que grâce aux notations employées, les changements des plans de projection se font avec une remarquable facilité.

II. — *Erreur.* (p. 42 **) M. Mansion fait erreur, selon nous, en croyant que nous avons confondu la détermination et la représentation d'un plan ; il est évident d'ailleurs que l'on ne peut songer à représenter une figure, avant que celle-ci ne soit entièrement déterminée. La distinction très nette que nous faisons entre la détermination et la représentation d'un plan est du reste clairement indiquée dans notre texte : « Pour représenter une surface quelconque (et par conséquent un plan), on *représente* les figures qui la *déterminent* » On fait cette représentation au moyen d'un dessin géométrique exécuté de façon à satisfaire à la définition de la géométrie descriptive, et cette définition n'exige pas qu'il y ait nécessairement image. L'image est une qualité que l'on ne demande à la représentation que lorsqu'il y a des motifs pour le faire et, pour ce cas spécial, nous donnons au § 4 du chapitre I, les principes à appliquer : nous définissons alors le *vu* et le *caché*, en ayant soin d'éliminer le légendaire observateur dont l'œil est à l'infini, au-dessus du plan horizontal et en avant du plan vertical.

Dans l'exemple d'un hyperboloïde gauche de raccordement, déterminé au moyen de trois directrices rectilignes, on représente ces trois directrices, conformément à ce que nous avons dit au n° 42 sur la représentation des lignes, et l'image, que l'on pourrait obtenir par la représentation des contours apparents pour les plans de projection, sera, en général, bien inutile.

Si M. Mansion n'admet que la représentation imagée d'une figure et rejette la représentation pure et simple sur un plan, sans préoccupation de l'image, que fait-il alors de toutes les constructions auxiliaires dans la représentation des corps? Si ces constructions devaient être représentées par des dessins faisant image, on arriverait à des épures monstrueuses, comme celle que l'on obtiendrait si l'on voulait représenter les traces des plans des différentes faces d'un polyèdre.

Nos méthodes ne dépendent pas de la représentation imagée des figures (par conséquent des plans), et c'est ce qui en fait précisément le mérite au point de vue pédagogique.

III. *Affirmations dépourvues de preuves.* 1° (page 41*) Où trouve-t-on, dans les prescriptions rédigées par M. Goedseels, de la minutie inutile? Quelles sont les prescriptions que l'on pourrait utilement supprimer? Toutes ces prescriptions sont les meilleures et les plus simples que l'on puisse observer dans les travaux

graphiques, et leur utilité sautera aux yeux de tous ceux qui connaissent l'importance, pour l'ingénieur, d'une grande précision dans ces travaux. L'École militaire est habituée, depuis sa fondation, à apporter dans l'exécution des épures, toute la perfection possible ; nous avons voulu y maintenir cette habitude et faire connaître au dehors les procédés employés.

2° (page 42, ligne 8). La suppression de la ligne de terre serait prématurée, d'après M. Mansion, et compliquerait, sans utilité immédiate, l'exposition graduée des éléments de la géométrie descriptive.

Selon nous, cette affirmation est inexacte : elle accuse des idées qui ont leur origine dans l'enseignement habituel de la géométrie descriptive, mais que l'on ne justifie pas et que notre ouvrage condamne.

Non seulement la ligne de terre est inutile, comme nous l'avons démontré (n° 84, p. 14 et erratum de la page 157), mais elle est nuisible et il y a utilité à la supprimer dès le début de l'enseignement de la géométrie descriptive.

Elle est nuisible, parce que les auteurs, par la position absolue de la ligne de terre, ont été entraînés à formuler des règles et des méthodes où les traces des plans et des droites intèrviennent intempestivement, que l'élève n'applique que moyennant la détermination préalable de ces traces et qu'il ne sait plus appliquer quand ces traces sont hors des limites de l'épure.

Les méthodes doivent être indépendantes des données, convenir à tous les cas, et non pas seulement à des cas choisis ; elles doivent être applicables quand on n'a pas ou que l'on ne veut pas chercher les traces des plans et des droites, soit parce que ces traces sont hors de l'épure, soit parce que leur recherche surchargerait l'épure de lignes inutiles ou moins avantageuses que d'autres.

La ligne de terre est encore nuisible, parce que son emploi et l'emploi des traces ayant conduit les auteurs, dans l'étude des méthodes, à prendre des données qui font image (comme dans la représentation d'un plan par ses traces), on habitue les commençants, non pas à raisonner indépendamment des données, mais à raisonner sur des données choisies ; ils prennent une épure pour une espèce de perspective de la figure représentée et quand la représentation ne fait plus image ils ne savent plus résoudre les problèmes alors même qu'ils seraient en possession de méthodes générales, ils croient, ce qui est une grave erreur, que l'épure est plus difficile.

Il y a donc utilité à supprimer la ligne de terre, dès le débit de l'enseignement de la géométrie descriptive. Ce qui précède est confirmé par une longue expérience personnelle acquise à l'École militaire, par l'expérience faite à l'Université de Bruxelles et par celle de plusieurs professeurs qui ont adopté nos méthodes dans l'enseignement moyen.

Poncelet dit qu'il ne faut pas courir au-devant des difficultés. Nous sommes aussi de cet avis ; c'est petit à petit qu'il faut les vaincre, mais c'est précisément ce qui n'est pas fait dans l'enseignement habituel des méthodes de la géométrie descriptive, attendu qu'on n'y donne que des méthodes incomplètes. On fera bien à cet égard, de méditer ce qu'a dit l'illustre Laplace : « Préférez, dans l'enseigne-

« ment, les méthodes générales, attachez-vous à les présenter de la manière la plus « simple, et vous verrez en même temps qu'elles sont presque toujours les plus « faciles. » Nous avons suivi ce précepte et nous avons pu constater que les méthodes générales sont aussi celles que les élèves préfèrent.

3° (page 42, ligne 11). M. Mansion se plaint du trop grand nombre de cas ou d'exemples particuliers et il a tort selon nous. Tout d'abord, il aurait dû distinguer, dans son compte rendu, les cas particuliers des exemples donnés à l'appui de ces cas. En réalité, les 13 cas qu'il a comptés sont 13 exemples qui se rattachent à cinq cas généraux et numérotés, où l'intersection de deux plans se trouve simplement, sans application de la règle générale à suivre pour déterminer cette intersection. Et l'on ne saurait donner, aux commençants, assez d'exemples à l'appui des méthodes; comme nous l'avons dit dans la préface, ces exemples « *ne paraîtront inutiles qu'aux théoriciens, trop peu préoccupés du but que la géométrie descriptive doit atteindre.* »

Du reste, en ce qui concerne la détermination de l'intersection de deux plans, la méthode générale exige, pour ne pas être absurde et inapplicable, l'existence de cas où l'intersection se trouve simplement, et il en résulte que notre critique aurait dû se réjouir de l'existence des cinq cas simples que nous citons, au lieu de s'en plaindre.

Enfin, pour donner aux élèves de l'habileté dans le maniement des projections, nous avons conseillé, une fois pour toutes (n° 93, p. 33), de n'employer les règles générales, « que lorsque la solution du problème proposé ne s'obtient pas plus simplement, à l'inspection des données de la question. » Il était logique, dès lors, de signaler, dans les différents problèmes à résoudre, quelques cas où la règle générale peut ne pas être appliquée.

4° (p. 42, ligne 13). Il ne nous semble pas que notre point de vue soit plutôt *logique* que *pédagogique*. Nous avons eu un égal souci de la *rigueur scientifique* et de la *simplicité pédagogique*, et si, à ce double point de vue, nous avions connu un système meilleur que celui que nous publions, nous l'eussions certainement adopté, car nous n'avons aucun parti pris. Mais nous engageons vivement tous ceux qui enseignent la géométrie descriptive, à essayer, dès le début, la suppression de la ligne de terre : l'expérience sera décisive.

Certes, la suppression de la ligne de terre dérangera bien des habitudes acquises depuis longtemps, et nous entendrons encore, sans aucun doute, les protestations de quelques représentants d'un enseignement qui a eu ses auteurs célèbres, mais que nous considérons comme irrémédiablement condamné. Nous sommes au moment d'une évolution complète et heureuse, réclamée par M. Mannheim; nous pensons y avoir aidé en établissant l'enseignement que nous défendons, sur des principes *nouveaux*, *clairs*, *simples* et *logiques* qui en rendent l'étude facile et agréable pour les commençants

F. Chomé.

## *NOTES MATHÉMATIQUES.

1. *Notice sur C. Gerono,* Le 4 novembre 1892 est mort à Paris C. Gerono, qui a dirigé pendant 45 ans les *Nouvelles Annales de Mathématiques,* journal qui rend, depuis un demi siècle, des services éclatants à l'enseignement et à la science.

Il appartenait à une noble famille génoise que ses opinions démocratiques avaient obligée de quitter successivement l'Italie et la Hollande pour se fixer définitivement à Paris, où Gerono naquit le 8 nivôse de l'an VIII. Au concours général de 1815, il remporta le premier prix de mathématiques élémentaires, tandis que son condisciple au lycée Louis-Le Grand, Victor Hugo, obtenait le cinquième accessit de physique. On raconte qu'en apprenant cette nouvelle, Victor Hugo se jeta dans les bras de son camarade en s'écriant : « je serai le Milton de la littérature et tu seras le Newton de la science. »

A peine sorti du collège, Gerono fut envoyé comme professeur, d'abord à Tulle, puis à Vendôme. De 1825 à 1830, il enseigna les mathématiques et la physique à l'école des Pages, à Versailles.

Après la suppression de cette École, on l'envoya comme principal au collège de Lorient, d'où il fut appelé un peu plus tard à Paris, en qualité de professeur à Sainte-Barbe. Dès lors, Gerono ne quitta plus Paris, où il donna des leçons dans la plupart des établissements d'instruction publique. Jamais carrière de professeur ne fut plus pleinement et plus dignement remplie; il a prodigué ses soins à plus de soixante générations d'élèves, dont beaucoup sont restés ses amis et qui tous emportaient une profonde estime pour son caractère et son talent.

Gérono a inséré un grand nombre d'articles très remarquables dans les *Annales de Gergonne* et dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques.* Il a écrit, en outre, à l'usage des élèves de mathématiques spéciales, plusieurs ouvrages qui se recommandent par une clarté et une précision peu communes : un *Traité de statique,* un *Traité de trigonométrie,* un *Traité de géométrie analytique* (en collaboration avec M. Delisle) et un *Traité de géométrie descriptive* (en collaboration avec M. Cassanac). (D'après la notice de M. Rouché dans les *Nouvelles Annales,* décembre 1892).

2. *Sur le plan.* Dans le cinquième livre de géométrie de Legendre, il y a une lacune entre la deuxième et la troisième proposition ainsi conçues :

II. *Deux lignes droites qui se coupent sont dans un même plan, et en déterminent la position.* Corollaire. *Trois points, non en ligne droite, déterminent la position d'un plan.*

III. *Si deux plans se coupent, leur intersection commune sera une ligne droite.* « Car, si dans les points communs aux deux plans, on en trouvait trois qui ne fussent pas en ligne droite, les deux plans dont il s'agit, passant chacun par ces trois points, ne feraient qu'un seul et même plan, ce qui est contre la supposition. »

Il y a évidemment nécessité d'intercaler entre ces théorèmes une proposition ainsi conçue : *Deux plans ne peuvent pas n'avoir qu'un point de commun.*

On demande la démonstration de cette proposition. (Delbœuf.)

Voici, en substance, comment cette lacune a été comblée dans la sixième édition du *Traité de Géométrie* de Rouche et de Comberousse (*Géométrie de l'Espace*, pp. 2-3, n° 489).

Soient P et $p$ deux plans ayant un point A commun. Menons par A, dans P, la droite BAC, dans $p$ la droite $bAc$. Les droites BAC, $bAc$ se croisent, par suite, BAC traverse le plan $p$ en A, et les points B et C sont l'un d'un côté, l'autre, de l'autre côté de $p$. Une seconde droite B'AC' menée dans P traversera encore $p$ en A ; B' et C' seront de nouveau de part et d'autre du plan $p$. Joignons B'C, B' et C étant choisis l'un d'un côté, l'autre, de l'autre côté du plan P. Cette droite du plan P rencontrera $p$ en un point $a$ différent de A. Donc l'intersection des plans P et $p$ comprendra les deux points A et $a$(*). etc. (P. M.)

3. *Sur la construction d'une moyenne proportionnelle.* La construction rappelée par MM. Catalan et Lemoine (*Mathesis*, (2), II, pp. 250 et 275; (2), III, p. 32) se rencontre déjà dans une lettre de Thomas Strode, datée du 3 novembre 1684 et insérée dans le traité d'algèbre de Wallis (*A Treatise of Algebra both historical and practical : London*, 1685).

---

(*) Cette démonstration suppose démontrée, bien entendu, la proposition suivante : *Deux droites qui ont un point commun, se traversent réciproquement.* Dans le mode d'exposition adopté par Euclide, on peut établir cette proposition, en partant de son quatrième postulat : *Tous les angles droits sont égaux.*

La traduction latine de cette lettre figure dans les *Johannis Wallisii Opera Mathematica*, t. I, pp. 299-301 (1693).

Nous devons cette obligeante communication à M. John S. Mackay, professeur à l'Académie d'Edimbourg. Elle se trouve déjà dans une lettre de M. Mackay à M. de Longchamps, reproduite dans le J. M. E., 1885, p. 158.

---

## SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

### Question 17.

(Voir *Mathesis*, (1), I, p. 30).

*Si* A, B, C *sont des quantités positives*, $a, b, c$ *des quantités réelles, les trois racines de l'équation*

$$(x-a)(x-b)(x-c) - A(x-a) - B(x-b) - C(x-c) = 0$$

*sont réelles. Calculer le discriminant de cette équation et le mettre sous une forme telle qu'on reconnaisse qu'il est toujours négatif.*

*Solution par* M. E. Fauquembergue (Mont-de-Marsan). I. *Réalité des racines.* La réalité des racines de cette équation peut se démontrer, comme pour l'équation en S, de bien des manières. La suivante, dont l'idée première appartient à Cauchy, nous paraît être une des plus simples.

Nous supposons $a < b < c$, ce qui est permis à cause de la symétrie.

En désignant par $f(x)$ le premier membre de l'équation, on a

$$f(x) = (x-a)[(x-b)(x-c) - A] - B(x-b) - C(x-c).$$

On prouve aisément que l'équation

$$(x-b)(x-c) - A = 0$$

a deux racines réelles, l'une $m < b$ et l'autre $n > c$.

Substituons à $x$ dans $f(x)$, successivement :

$$-\infty, \quad m, \quad n, \quad +\infty.$$

$f(-\infty)$ a le signe $-$, $f(+\infty)$ a le signe $+$.

Cherchons les signes de $f(m)$ et $f(n)$ :

$$f(m) = -[B(m-b) + C(m-c)];$$

Or on a $m < b < c$, donc $f(m) > 0$.

De même,

$$f(n) = -[B(n-b)+C(n-c)];$$

Or on a $n > c > b$; donc $f(n) < 0$.

Il en résulte le tableau suivant :

Valeurs de $x$ : $-\infty$, $m$, $n$, $+\infty$;
Signes de $f(x)$ : $-$, $+$, $-$, $+$.

Par suite, l'équation $f(x) = 0$ a une racine réelle comprise dans chacun des intervalles formés par la suite

$$-\infty, \quad m, \quad n, \quad +\infty.$$

II. *Calcul du discriminant.* L'équation $f(x) = 0$ étant développée devient

$$x^3 - (a+b+c)x^2 - (A+B+C-ab-bc-ca)x + Aa + Bb + Cc - abc = 0.$$

On sait que le discriminant $\Delta$ de l'équation $px^3 + 3qx^2 + 3rx + s = 0$ est $(ps-qr)^2 - 4(pr-q^2)(qs-r^2)$.

On en déduit, pour l'équation proposée, le discriminant

$$\Delta = [9(Aa+Bb+Cc-abc) - (a+b+c)(A+B+C-ab-bc-ca)]^2 - 4[3(A+B+C-ab-bc-ca)+(a+b+c)^2] \times [3(a+b+c)(Aa+Bb+Cc-abc)+(A+B+C-ab-bc-ca)^2].$$

En posant

$$b-c = \alpha, \quad c-a = \beta, \quad a-b = \gamma, \quad \text{d'où} \quad \alpha+\beta+\gamma = 0,$$

on trouve d'abord

$$-\Delta = [6(A+B+C)+\alpha^2+\beta^2+\gamma^2][2(A+B+C)^2 + 2A(3a^2-b\beta+c\gamma)+2B(3b^2-c\gamma+a\alpha)+2C(3c^2-a\alpha+b\beta) + a^2\alpha^2+b^2\beta^2+c^2\gamma^2] - [A(8a-b-c)+B(8b-c-a)+C(8c-a-b)+a\alpha^2+b\beta^2+c\gamma^2]^2.$$

Pour effectuer le développement de cette expression, il suffit de calculer les coefficients de $A^2$, de $AB$, de $A$; les autres s'en déduisent par analogie.

On obtient, après avoir fait les réductions et divisé $-\Delta$ par 3,

$$4(A+B+C)^3 + A^2(\alpha^2+8\beta\gamma)+2AB(10\gamma^2-\alpha\beta)+2A\beta\gamma(\alpha^2+2\beta\gamma) + B^2(\beta^2+8\gamma\alpha)+2BC(10\alpha^2-\beta\gamma)+2B\gamma\alpha(\beta^2+2\gamma\alpha) + C^2(\gamma^2+8\alpha\beta)+2CA(10\beta^2-\gamma\alpha)+2C\alpha\beta(\gamma^2+2\alpha\beta)+\alpha^2\beta^2\gamma^2.$$

En groupant *convenablement* les termes, on parvient à mettre cette expression sous la forme :

$$4(A+B+C)^3 - 4(A^3+B^3+C^3) + 4A(A+\beta\gamma)^2 + 4B(B+\gamma\alpha)^2 + 4C(C+\alpha\beta)^2 + (A\alpha+B\beta+C\gamma+\alpha\beta\gamma)^2 + 4AB(5\gamma^2-\alpha\beta) + 4BC(5\alpha^2-\beta\gamma) + 4CA(5\beta^2-\gamma\alpha).$$

Or, si l'on observe que

$$4(A+B+C)^3 - 4(A^3+B^3+C^3) = 12(A+B)(B+C)(C+A),$$

et qu'on tienne compte de la relation $\alpha+\beta+\gamma=0$, on a

$$4(5\gamma^2-\alpha\beta) = (\alpha-\beta)^2 + 19(\alpha+\beta)^2,$$
$$4(5\alpha^2-\beta\gamma) = (\beta-\gamma)^2 + 19(\beta+\gamma)^2,$$
$$4(5\beta^2-\gamma\alpha) = (\gamma-\alpha)^2 + 19(\gamma+\alpha)^2,$$

on peut conclure que l'expression précédente est toujours positive et que par conséquent le discriminant de l'équation proposée est toujours négatif.

Nous avons reçu, depuis longtemps, d'autres solutions de la question 17, moins complètes que la précédente et dues à Van den Broeck et M. Vladimirescu.

---

## ×Question 571.

(Voir *Mathesis*, t. VII, p. 126.)

*Soit*

$$P_n = x^{2k} - x^k + 1,$$

***k étant égal à*** $2^{n-1}$ ***: 1° les polynômes*** $P_1, P_2, P_3, \ldots$ ***sont premiers entre eux, deux à deux; 2° dans le produit*** $P = P_1P_2 \ldots P_n$, ***ordonné suivant les puissances de*** $x$, ***les coefficients sont*** $+1, -1$ ***ou zéro; 3° la variable*** $x$ ***étant moindre que l'unité, on a, quand*** $n$ ***croît indéfiniment,***

$$\lim P = \frac{1}{1+x+x^2}.$$ (E. CATALAN.)

*Solution par* MM. JOACHIMESCU et VLADIMIRESCU. 1. Si l'on pose $P_n = 0$, on trouve

$$x^k = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-3} = \cos\frac{\pi}{3} \pm i\sin\frac{\pi}{3}.$$

Soit $x = \cos\alpha + i\sin\alpha$; l'égalité précédente donnera

$$\cos k\alpha + i\sin k\alpha = \cos\left(\pm\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\pm\frac{\pi}{3}\right).$$

On en conclut

$$k\alpha = 2\lambda\pi \pm \frac{\pi}{3}, \quad \alpha = \frac{(6\lambda \pm 1)\,\pi}{3.2^{n-1}},$$

$\lambda$ désignant un nombre entier quelconque, positif nul ou négatif.

Pour que les polynômes $P_n$, $P_q$ aient un facteur commun, les équations $P_n = 0$, $P_q = 0$ devraient avoir une racine commune, ce qui exigerait

$$\frac{(6\lambda \pm 1)\,\pi}{3.2^{n-1}} = \frac{(6\lambda' \pm 1)\,\pi}{3.2^{q-1}};$$

mais le rapport des nombres impairs $6\lambda \pm 1$, $6\lambda' \pm 1$ ne peut être égal à une puissance de 2, etc.

**8.** En s'appuyant sur l'identité

$$(z^2 - z + 1)(z^2 + z + 1) = z^4 + z^2 + 1,$$

on trouve facilement

$$(x^2+x+1)\,P = (x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^4-x^2+1)\cdots(x^{2k}-x^k+1)$$
$$= (x^4+x+1)(x^4-x^2+1)\cdots(x^{2k}-x^k+1) = \cdots = x^{4k}+x^{2k}+1.$$

Donc

$$P = \frac{x^{4k}+x^{2k}+1}{x^2+x+1} = \frac{x^{2^{n+1}}+x^{2^n}+1}{x^2+x+1}. \qquad (1)$$

Effectuons la division indiquée, en ordonnant le dividende et le diviseur suivant les puissances croissantes de $x$. Si $3p$ est le plus grand multiple de 3 contenu dans $2^n$, on trouvera au quotient les termes

$$1 - x + x^3 - x^4 + x^6 - x^7 + \cdots + x^{3p}, \qquad (2)$$

et le dividende partiel correspondant est

$$-x^{3p+1} - x^{3p+2} + x^{2^n} + x^{2^{n+1}}. \qquad (3)$$

Soit d'abord $2^n = 3p + 1$, de sorte que le reste se réduise à

$$-x^{3p+2} + x^{2^{n+1}};$$

en continuant la division, on trouve les autres termes du quotient, savoir

$$-x^{3p+2} + x^{3p+3} - x^{3p+5} + \cdots - x^{2^{n+1}-3} + x^{2^{n+1}-2}. \qquad (3)$$

Si $2^n = 3p + 2$, le polynôme (3) se réduit à

$$-x^{3p+1} + x^{2^{n+1}};$$

en le divisant par $1+x+x^2$, on aura pour les derniers termes du quotient

$$-x^{3p+1}+x^{3p+2}-x^{3p+4}+\cdots-x^{2^{n+1}-3}+x^{2^{n+1}-2}. \qquad (4)$$

Le produit P est donc, ainsi qu'il était à prévoir, un polynôme dont les termes à égale distance des extrêmes ont des coefficients égaux et de même signe. Quand $2^n=3p+2$, il suit une loi tout à fait régulière :

$$P=(1-x)+(x^3-x^4)+(x^6-x^7)+\cdots;$$

si $2^n=3p+1$, les termes sont encore alternativement positifs et négatifs, mais la marche des exposants de $x$ subit un changement au milieu de P.

3. L'égalité (1) donne immédiatement

$$\lim P=\frac{1}{x^2+x+1}, \quad \text{pour } n=\infty.$$

Voir sur les polynomes $P_n$, CATALAN, *Remarques sur une équation trinôme* (B. B, (1), XIII, 1887) et *Note sur un tableau numérique et son application à certaines transcendantes* (Mém. de l'Ac. de belg.. 1887, XLVII).

---

## Question 780.

(Voir *Mathesis*, (2) II, p. 215.)

*Un diamètre d'une ellipse est donné en grandeur et en position; son conjugué est donné en grandeur seulement. Trouver le lieu des foyers.* (MOREL.)

*Solution géométrique par* MM. DROZ et DÉPREZ. Soient A, B les extrémités du diamètre fixe, O le centre, $2a$ et $2b$ les longueurs des axes, $2a'$ et $2b'$ celles des diamètres conjugués donnés, F et F′ les foyers. On a

$$AF+AF'=AF+BF=2a;$$

d'où, en élevant au carré,

$$\overline{AF}^2+\overline{BF}^2+2AF.\,BF=4a^2. \qquad (1)$$

Mais

$$\overline{AF}^2+\overline{BF}^2=2\overline{OF}^2+2\overline{OA}^2=2(a^2-b^2)+2a'^2. \qquad (2)$$

Des égalités (1) et (2), on déduit

$$AF\,.\,BF=a^2+b^2-a'^2=b'^2.$$

Les points F et F′ décrivent donc une cassinoïde ayant pour foyers les points A, B. Si $a'=b'$, le lieu est une lemniscate de Bernoulli.

*Solution analytique par* MM. MANDART, DENYS *et* JEŘÁBEK. L'équation de l'ellipse variable rapportée au diamètre fixe OA et à son conjugué, est

$$\frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}=1.$$

Si l'on remplace l'axe des $y$ par la perpendiculaire menée en O sur OA, les formules de transformation sont

$$x=\frac{x'\sin\theta-y'\cos\theta}{\sin\theta},\quad y=\frac{y'}{\sin\theta};$$

la nouvelle équation de la courbe est donc

$$\frac{(x'\sin\theta-y'\cos\theta)^2}{a'^2\sin\theta}+\frac{y'^2}{b'^2\sin^2\theta}=1,$$

d'où, en supprimant les accents devenus inutiles,

$$(a^2+b^2\cos^2\theta)\,y^2-2b^2\sin\theta\cos\theta\,.\,xy+b^2\sin^2\theta\,.\,x^2-a^2b^2\sin^2\theta=0.$$

Identifions cette équation avec l'équation focale

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-(mx+ny+t)^2=0;$$

nous aurons d'abord $\alpha=-mt$, $\beta=-nt$, en égalant à zéro les termes du premier degré. Ensuite,

$$\frac{a^2+b^2\cos^2\theta}{1-m^2}=\frac{b^2\sin\theta\cos\theta}{mn}=\frac{b^2\sin^2\theta}{1-n^2}=\frac{a^2b^2\sin^2\theta}{t^2-\alpha^2-\beta^2};$$

remplaçant $m$, $n$ par $-\frac{\alpha}{t}$, $-\frac{\beta}{t}$, nous obtenons

$$\frac{a^2+b^2\cos^2\theta}{t^2-\beta^2}=\frac{b^2\sin\theta\cos\theta}{\alpha\beta}=\frac{b^2\sin^2\theta}{t^2-\alpha^2}=\frac{a^2b^2\sin^2\theta}{t^2(t^2-\alpha^2-\beta^2)}. \qquad (A)$$

Il reste à éliminer $t$ et $\theta$. Si l'on exprime que le produit du premier rapport (A) par le troisième est égal au carré du second, on trouve

$$\frac{a^2+b^2\cos^2\theta}{(t^2-\alpha^2)(t^2-\beta^2)}=\frac{b^2\cos^2\theta}{\alpha^2\beta^2};$$

retranchant ces nouvelles fractions terme à terme, on a

$$\frac{a^2}{t^2(t^2-\alpha^2-\beta^2)}=\frac{b^2\cos^2\theta}{\alpha^2\beta^2}. \qquad (B)$$

Égalant le quatrième des rapports (A) au deuxième, on obtient

$$\frac{a^2\sin\theta}{t^2(t^2-\alpha^2-\beta^2)}=\frac{\cos\theta}{\alpha\beta}. \qquad (C)$$

Des équations (B) et (C), on déduit

$$\alpha\beta = b^2 \sin\theta \cos\theta ; \tag{D}$$

donc chacun des rapports (A) est égal à l'unité, et

$$a^2 + b^2 \cos^2\theta = t^2 - \beta^2, \quad b^2 \sin^2\theta = t^2 - \alpha^2. \tag{E}$$

Les égalités (E) donnent

$$a^2 + b^2 \cos 2\theta = \alpha^2 - \beta^2 ; \tag{F}$$

l'égalité (D) peut prendre la forme

$$2\alpha\beta = b^2 \sin 2\theta. \tag{G}$$

Il est maintenant facile d'éliminer $\theta$ ; on trouve

$$(\alpha^2 - \beta^2 - a^2)^2 + 4\alpha^2\beta^2 = b^4.$$

Remarques. 1° Si l'on élimine $b$ entre les équations (F) et (G) on obtient

$$\alpha^2 - \beta^2 - 2\alpha\beta \operatorname{cotg} 2\theta = a^2,$$

équation d'une hyperbole équilatère. Cette courbe est le lieu des foyers des coniques qui ont un diamètre commun AB et mêmes tangentes aux extrémités de ce diamètre ; elle passe par les points A et B, et a pour asymptote le diamètre conjugué avec AB ; les tangentes en A et B font avec AB l'angle $2\varphi$. (Jeřábeck.)

2° Le lieu des sommets des ellipses considérées par M. Morel a pour équation

$$\rho^4 - \rho^2 (2a^2 \cos^2\omega + b^2) + a^2 \cos^2\omega (a^2 + b^2) = 0,$$

$2a$ et $2b$ désignant les longueurs des diamètres donnés.

Le centre du cercle osculateur au point A décrit une droite perpendiculaire à OA.

Le centre du cercle osculateur à l'extrémité du diamètre conjugué avec AB se meut sur une courbe ayant pour équation.

$$y = \frac{a^2 - b^2 + x^2}{\sqrt{b^2 - x^2}},$$

ou

$$\rho^4 \cos^2\omega + \rho^2 [2a^2 \cos^2\omega - b^2 (1 + \cos^2\omega)] + (a^2 + b^2)^2 = 0.$$

(Déprez.)

### ×Question 798.

(Voir *Mathesis*, (2), II, p. 281.)

*Démontrer l'identité*

$$(a\cos C + z\sin A)(b\cos A + x\sin B)(c\cos B + y\sin C)$$
$$= (a\cos B + y\sin A)(b\cos C + z\sin B)(c\cos A + x\sin C)$$ (MONDART.)

*Solution par* MM. DELAHAYE *et* LISTRAY. Mettant en évidence les facteurs de $x$, $y$, $z$ et observant que

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R,$$

on ramène les deux membres de l'identité à

$$\sin A \sin B \sin C\,(2R\cos A + x)(2R\cos B + y)(2R\cos C + z).$$

---

## ×QUESTION D'EXAMEN.

**549.** Trouver le poids d'un corps en forme de prisme hexagonal régulier dont la hauteur est sextuple du côté de la base, sachant que ce côté a 6 millimètres de longueur et que la densité du corps est 2,7.

---

## QUESTIONS PROPOSÉES.

**810.** Soient AA′, BB′ deux diamètres rectangulaires d'un cercle O. D'un point quelconque C de la circonférence, on abaisse une perpendiculaire CD sur AA′; on porte sur OC une longueur OE=OD, et l'on projette E en F sur AA′. Trouver le lieu du point de rencontre des droites BF et CD.

La figure donne le moyen de construire un angle dont la tangente soit le carré du cosinus d'un angle donné, ou dont le cosinus soit la racine carrée de la tangente d'un angle donné. (P. DECAMPS.)

×**811.** Mettre le produit

$$(1 + x\sqrt{-1})(1 + x^2\sqrt{-1})(1 + x^4\sqrt{-1})(1 + x^8\sqrt{-1})\ldots$$

sous la forme $P + Q\sqrt{-1}$. Dans chacun des polynômes P, Q, déterminer les coefficients des puissances de $x$. Quelle est la loi générale? Déduire, de ce problème, la décomposition de

$$(1 + x^2)(1 + x^4)(1 + x^8)(1 + x^{16})\ldots$$

en une somme de deux carrés. (E. CATALAN.)

×**812.** Soient A, B, C les angles d'un triangle, $\omega$ l'angle de Brocard. Démontrer que les différences

$$\sin^4 A - \sin^2 B \sin^2 C, \quad \sin^4 B - \sin^2 C \sin^2 A, \quad \sin^4 C - \sin^2 A \sin^2 B$$

sont proportionnelles aux quantités

$$\operatorname{cotg} 2\omega - \operatorname{cotg} A, \quad \operatorname{cotg} 2\omega - \operatorname{cotg} B, \quad \operatorname{cotg} 2\omega - \operatorname{cotg} C.$$

**813.** Le centre C d'un cercle se meut sur une parabole donnée et le cercle passe constamment par le foyer F de cette parabole. Trouver 1° l'enveloppe de ce cercle ; 2° le lieu du point de rencontre de ce cercle *a*) avec une parallèle à l'axe menée par C ; *b*) avec l'ordonnée de C ; *c*) avec la tangente à la parabole en C ; *d*) avec la normale menée en C. (A. Morel.)

×**814.** Deux triangles sphériques ont leurs côtés proportionels. Les angles du triangle dont les côtés sont les plus petits sont-ils toujours plus petits que ceux de l'autre triangle?

**815.** Les formules

$$(1) \qquad x = \frac{a_1 t^2 + 2b_1 t + c_1}{at^2 + 2bt + c}, \quad y = \frac{a_2 t^2 + 2b_2 t + c_2}{at^2 + 2bt + c},$$

où $t$ désigne un paramètre variable, définissent une conique. Trouver l'équation de cette courbe en coordonnées cartésiennes et en coordonnées tangentielles. Déduire directement, des formules (1), les conditions nécessaires pour que la courbe soit une ellipse, une circonférence, une hyperbole, un système de deux droites, une parabole. Étant donnée l'équation

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

trouver des expressions rationnelles de la forme (1) qui puissent la remplacer.

×**816.** Éliminer $x, y, z$ entre les équations

$$yz(1-2x) = \alpha^2(1-x)^2, \quad zx(1-2y) = \beta^2(1-y)^2,$$
$$xy(1-2z) = \gamma^2(1-z)^2, \quad x+y+z = 1. \quad \text{(D. Besso.)}$$

**817.** Discuter le lieu de l'équation

$$(x-a)y^2 = (y-b)x^2.$$

**818.** Le lieu des pieds des normales abaissées d'un point P sur des quadriques concentriques et homothétiques est aussi le lieu des sommets des tétraèdres autopolaires par rapport à l'une de ces surfaces et à une sphère de centre P, dont le rayon est variable. (Schoute.)

## ÉGALITÉS ENTRE QUANTITÉS PROPORTIONNELLES;

par M. Joseph Wasteels, professeur à l'Athénée royal de Hasselt.

**Théorème.** Si

$$\frac{\alpha}{\alpha'}=\frac{\beta}{\beta'}=\frac{\gamma}{\gamma'},$$

on a

$$\begin{aligned}&(M\alpha+M'\alpha')(N\beta+N'\beta')(P\gamma+P'\gamma')\\&=(N\alpha+N'\alpha')(P\beta+P'\beta')(M\gamma+M'\gamma')\\&=(P\alpha+P'\alpha')(M\beta+M'\beta')(N\gamma+N'\gamma').\end{aligned}$$

Car ces différentes expressions peuvent s'écrire :

$$\alpha\beta\gamma\left(M+M'\frac{\alpha'}{\alpha}\right)\left(N+N'\frac{\beta'}{\beta}\right)\left(P+P'\frac{\gamma'}{\gamma}\right),$$

$$\alpha\beta\gamma\left(N+N'\frac{\alpha'}{\alpha}\right)\left(P+P'\frac{\beta'}{\beta}\right)\left(M+M'\frac{\gamma'}{\gamma}\right),$$

$$\alpha\beta\gamma\left(P+P'\frac{\alpha'}{\alpha}\right)\left(M+M'\frac{\beta'}{\beta}\right)\left(N+N'\frac{\gamma'}{\gamma}\right),$$

et l'on a

$$M+M'\frac{\alpha'}{\alpha}=M+M'\frac{\beta'}{\beta}=M+M'\frac{\gamma'}{\gamma}\text{ etc.}$$

**Remarques.** 1° Il est clair que $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$ pourraient être remplacés par $\alpha^n, \beta^n, \gamma^n, \alpha'^n, \beta'^n, \gamma'^n$.

2° On généralise facilement les propositions précédentes pour le cas de plus de trois rapports égaux.

**Applications.** I. Si $a, b, c$, A, B, C sont les côtés et les angles d'un triangle rectiligne, on a :

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C},\quad \frac{b^2+c^2-a^2}{\cot A}=\frac{a^2+c^2-b^2}{\cot B}=\frac{a^2+b^2-c^2}{\cot C},$$

$$\frac{a(b^2+c^2-a^2)}{\cos A}=\frac{b(a^2+c^2-b^2)}{\cos B}=\frac{c(a^2+b^2-c^2)}{\cos C},$$

$$\frac{a^2(b^2+c^2-a^2)}{\sin 2A}=\frac{b^2(a^2+c^2-b^2)}{\sin 2B}=\frac{c^2(a^2+b^2-c^2)}{\sin 2C},\text{ etc.}$$

On peut, d'après cela, remplacer $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$ respectivement par

En particulier,

$$(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2+\cdots)(\alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2+\delta'^2+\cdots)$$
$$=(\alpha\alpha'+\beta\beta'+\gamma\gamma'+\delta\delta'+\cdots)^2.$$

Cette dernière formule peut trouver son application en géométrie et en trigonométrie.

---

## THÉORÈMES SUR LES COURBES ET LES SURFACES DU SECOND ORDRE;

par M. BARBARIN, professeur au lycée de Bordeaux.

1. *Si on connaît les pôles* $M_1$, $M_2$ *de deux sécantes* $D_1$, $D_2$ *coupant une conique aux points* $(A_1, B_1)$, $(A_2, B_2)$, *on peut obtenir aisément les équations des deux autres couples de sécantes* $(A_1A_2, B_1B_2)$, $(A_1B_2, A_2B_1)$, *ainsi que les coordonnées de leurs centres.*

Soient

$$f=a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{23}yz+2a_{13}xz=0$$

l'équation de la conique, et 2X, 2Y, 2Z les dérivées partielles de $f$ par rapport à $x$, $y$, $z$. Désignons par $(x_1, y_1, z_1)$, $(x_2, y_2, z_2)$ les coordonnées des points $M_1$, $M_2$ et par $X_1, Y_1, Z_1$, $X_2, Y_2, Z_2$ les valeurs de X, Y, Z, quand on remplace $x, y, z$ par $x_1, y_1, z_1$, ou par $x_2, y_2, z_2$. Les équations des sécantes $D_1$, $D_2$ seront

$$xX_1+yY_1+zZ_1=0, \quad xX_2+yY_2+zZ_2=0;$$

nous les représentons en abrégé par $f(01)=0$, $f(02)=0$. La fonction $f$ peut être aussi dénotée par $f(00)$; $f(11)$, $f(22)$ sont les résultats de substitution des coordonnées de $M_1$, $M_2$ à la place de $x$, $y$, $z$ dans $f$.

Cela étant admis, l'équation d'une conique quelconque passant par $A_1$, $A_2$, $B_1$, $B_2$ est

$$f(01)f(02)-\lambda f(00)=0. \qquad (1)$$

Si elle représente un système de deux droites, les coordonnées du centre de ce système annulent les dérivées partielles du premier membre de (1); on a donc, pour ces coordonnées,

$$\left.\begin{aligned} &X_1f(02)+X_2f(01)-2\lambda X=0;\\ &Y_1f(02)+Y_2f(01)-2\lambda Y=0;\\ &Z_1f(02)+Z_2f(01)-2\lambda Z=0. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Ajoutons ces égalités après multiplication par $x_1$, $y_1$, $z_1$ ou par $x_2$, $y_2$, $z_2$ ; nous aurons

$$\left.\begin{aligned} f(11)f(02) + [f(12) - 2\lambda]f(01) = 0; \\ f(22)f(01) + [f(12) - 2\lambda]f(02) = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Éliminant $f(02)$, $f(01)$ entre ces équations, on trouve

$$f(11)f(22) - [f(12) - 2\lambda]^2 = 0;$$

d'où deux valeurs de $\lambda$ :

$$\lambda_1 = \tfrac{1}{2}[f(12) + \sqrt{f(11)f(22)}], \quad \lambda_2 = \tfrac{1}{2}[f(12) - \sqrt{f(11)f(22)}].$$

Appelons H l'intersection des droites $D_1$, $D_2$ ; F et G les centres des couples $(A_1A_2, B_1B_2)$, $(A_1B_2, A_2B_1)$. Les coordonnées des points F, G vérifient les équations (2), et par suite, les équations (3), pour $\lambda = \lambda_1$ et $\lambda = \lambda_2$ ; les dernières se réduisent à

$$\sqrt{f(11)}\,f(02) - \sqrt{f(22)}\,f(01) = 0, \qquad (4)$$

$$\sqrt{f(11)}\,f(02) + \sqrt{f(22)}\,f(01) = 0; \qquad (5)$$

elles représentent, respectivement, les droites HF, HG.

Les points F, G sont situés sur la polaire du point H, donc sur la droite $M_1M_2$. On peut donc désigner les coordonnées de G par

$$mx_1 + nx_2, \quad my_1 + ny_2, \quad mz_1 + nz_2;$$

en portant ces expressions dans l'équation (4), on trouve

$$\sqrt{f(11)}\,[mf(12) + nf(22)] - \sqrt{f(22)}\,[mf(11) + nf(21)] = 0.$$

Par conséquent,

$$m = \sqrt{f(22)}, \quad n = \sqrt{f(11)}$$

et les coordonnées de G sont

$$x_2\sqrt{f(11)} + x_1\sqrt{f(22)}, \quad y_2\sqrt{f(11)} + y_1\sqrt{f(22)}, \quad z_1\sqrt{f(22)} + z_2\sqrt{f(11)}.$$

Celles de F s'obtiennent en changeant le signe de l'un des radicaux.

3. Supposons que $x$, $y$, $z$ représentent des coordonnées cartésiennes homogènes. Alors, si $M_1$, $M_2$ sont situés sur une conique homothétique et concentrique à la conique donnée, on a $f(11) = f(22)$, et l'on voit facilement, par les expressions de leurs coordonnées, que les points G, F sont, le premier au milieu de $M_1M_2$, le second à l'infini.

Réciproquement, *si une conique est circonscrite à un trapèze, les pôles*

*des côtés non parallèles sont sur une seconde conique homothétique et concentrique à la première.*

3. *Les points* $A_1$, $A_2$, $B_1$, $B_2$, $M_1$, $M_2$ *sont situés sur une même conique.* Car, pour faire passer la conique (1) par le point $M_1$, on doit poser

$$f(11)f(12) - \lambda f(11) = 0, \quad \text{ou} \quad \lambda = f(12);$$

mais on trouve la même valeur de $\lambda$ si l'on fait passer la courbe par le point $M_2$.

La même proposition peut se déduire des théorèmes de Pascal. En effet, les points d'intersection des côtés opposés de l'hexagone $A_1A_2M_2B_2B_1M_1$ sont en ligne droite sur la polaire FH du point G.

4. On peut étendre facilement ces considérations aux quadriques.

Soit $f = 0$ l'équation d'une surface du second ordre, en coordonnées homogènes $x, y, z, t$, et soient 2X, 2Y, 2Z, 2T les dérivées de $f$. Les plans polaires de deux points donnés $M_1$, $M_2$ coupent cette surface suivant deux coniques $C_1$, $C_2$, situées sur toute surface dont l'équation est

$$f(01)f(02) - \lambda f(00) = 0. \tag{1'}$$

Si celle-ci représente un cône, les coordonnées du sommet du cône vérifient les égalités

$$\left.\begin{aligned} X_1 f(02) + X_2 f(01) - 2\lambda X &= 0, \\ Y_1 f(02) + Y_2 f(01) - 2\lambda Y &= 0, \\ Z_1 f(02) + Z_2 f(01) - 2\lambda Z &= 0, \\ T_1 f(02) + T_2 f(01) - 2\lambda T &= 0; \end{aligned}\right\} \tag{2'}$$

de ces dernières, on déduit comme ci-dessus les relations (3), (4), (5), puis les coordonnées du sommet du cône.

Par conséquent, par les coniques $C_1$, $C_2$ on peut faire passer deux cônes, dont les sommets divisent harmoniquement la droite $M_1M_2$.

Les coniques $C_1$, $C_2$ et les points $M_1$, $M_2$ sont situés sur une même quadrique. Si $M_1$ et M sont sur une quadrique concentrique et homothétique à la quadrique donnée, les courbes $C_1$, $C_2$ sont situées sur un cône ayant pour sommet le milieu de $M_1M_2$, et sur un cylindre dont les génératrices sont parallèles à $M_1M_2$.

## NOTES MATHÉMATIQUES.

×4. *Sur le Théorème de Stewart.* Dans une intéressante notice, publiée dans les *Proceedings of the Edimburgh Mathematical Society*, vol. X, 1891-92, M. Mackay attribue le théorème de Stewart à Robert Simson. Voici un résumé de cette notice.

En 1746, Mathew Stewart, étant candidat à la chaire de mathématiques vacante à l'université d'Édimbourg par suite du décès de Maclaurin, publia son premier ouvrage, les *Some General Theorems of Considerable Use in the Higher Parts of Mathematics.* Dans la préface, il dit que les théorèmes contenus dans son livre sont entièrement nouveaux, à part un ou deux au plus, mais il ne spécifie pas quels sont ces deux théorèmes.

Voici ces deux propositions :

I. *Si l'on joint le sommet* A *d'un triangle à un point* D *du côté* BC, *et qu'on mène les droites* DE, DF *parallèles à* AC, AB *et rencontrant* AB, AC *en* E, F, *on a*

$$\overline{AD}^2 + BD \cdot CD = AB \cdot AE + AC \cdot AF. \qquad (1)$$

II. *Si l'on joint le sommet* A *d'un triangle* ABC *à un point* D *de la base, on a*

$$\overline{AB}^2 \cdot CD + \overline{AC}^2 \cdot BD = BC \cdot BD \cdot CD + \overline{AD}^2 \cdot BC. \qquad (2)$$

Stewart se sert de la première pour démontrer la seconde; celle-ci porte généralement le nom de *Théorème de Stewart.*

Dans le second livre (p. 156, lemme X) de ses *Loci Plani* publiés en 1749, Simson énonce le théorème suivant :

D *étant un point quelconque de la base* BC *d'un triangle* ABC, *on a*

$$\overline{AB}^2 \cdot CD + \overline{AC}^2 \cdot BD = \overline{BD}^2 \cdot CD + \overline{CD}^2 \cdot BD + \overline{AD}^2 \cdot BC. \qquad (3)$$

Les relations (2) et (3), on le voit sans peine, ne diffèrent pas essentiellement. Simson fait observer que l'égalité (3), quand BD = DC, rentre dans la proposition 122 du livre VII des *Collections* de Pappus. Dans l'appendice des *Loci Plani* (p. 221), il la démontre lorsque les points A, B, C, D sont en ligne droite et dit avoir trouvé ce cas particulier avant le lemme X. Il ajoute que d'autres démonstrations de ce cas lui avaient été communiquées dans le temps par ses anciens disciples,

James Moor et Mathew Stewart, qu'il avait engagés à s'en occuper; que Stewart avait donné une autre démonstration du dernier cas du lemme X dans les deux premières propositions de ses *Some General Theorems*.

Ces extraits des *Loci Plani* et de la préface de Stewart prouvent que la relation (2) appartient à Simson. Il y était parvenu probablement avant 1741; car c'est en cette année qu'il informa Stewart de son intention de publier les *Loci Plani*.

Le théorème de Stewart (ou plutôt de Simson) a été démontré en 1751 par Thomas Simpson dans les *Select Exercices for Young Proficients in the Mathematics;* en 1780, par Euler dans les *Acta Academiae Petropolitanae, Pars I, pp. 92-93;* en 1803, par Carnot, qui en fit ressortir l'utilité.

Chasles, dans l'*Aperçu historique*, en montra l'importance. Enfin, M. Clément Thiry lui a consacré une brochure spéciale (*Applications du Théorème de Stewart et Théorie du Barycentre;* 1891).

5. *Sur la polhodie.* La polhodie dont il a été question p. 15, est le lieu des points de contact d'un plan tangent à l'ellipsoïde assujetti à rester à une distance constante du centre de cette surface. Poinsot n'employait ce terme que dans le cas où l'ellipsoïde est un ellipsoïde d'inertie, c'est-à-dire tel que l'on ait entre les trois axes $2a$, $2b$, $2c$, les relations

$$a > b > c, \quad c^2(a^2 + b^2) > a^2b^2.$$

×6. *Résolution trigonométrique de l'équation* $x^2 + px + q = 0$ (d'après M. Bloume, professeur au lycée Janson-de-Sailly) (*).

1° Si $q > 0$, on pose $x = \sqrt{q}\,\operatorname{tg}\frac{a}{2}$; l'équation devient

$$q\operatorname{tg}^2\frac{a}{2} + p\sqrt{q}\operatorname{tg}\frac{a}{2} + q = 0, \quad \frac{\operatorname{tg}\frac{a}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{a}{2}} = \frac{\sqrt{q}}{-p}, \quad \sin a = \frac{2\sqrt{q}}{-p}.$$

La dernière égalité détermine deux valeurs $\alpha$ et $\pi - \alpha$ (plus généralement $\alpha + 2k\pi$ et $\pi - \alpha + 2k\pi$); on a ensuite

$$x' = \sqrt{q}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}, \quad x'' = \sqrt{q}\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}.$$

On vérifie aisément que $x' + x'' = -p$, $x'x'' = q$.

(*) Nous résumons ici un article qui a paru dans le *Journal de Vuibert*, 15 février 1893.

2° Soit $q < 0$; si l'on met le signe de $q$ en évidence et qu'on pose encore $x = \sqrt{q}\,\mathrm{tg}\,\frac{a}{2}$, l'équation $x^2 + px - q = 0$ se ramène à

$$\frac{\mathrm{tg}\,\frac{a}{2}}{1 - \mathrm{tg}^2\,\frac{a}{2}} = \frac{\sqrt{q}}{p}, \quad \mathrm{tg}\,a = \frac{2\sqrt{q}}{p}.$$

Si $\alpha$ et $\alpha + \pi$ sont les plus petites solutions de cette équation, on a

$$x' = \sqrt{q}\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}, \quad x'' = -\sqrt{q}\,\mathrm{cotg}\,\frac{\alpha}{2}.$$

---

## REVUE BIBLIOGRAPHIQUE (*).

***Mathematical Recreations and Problems of Past and Present Times***, by W. W. Rouse Ball, Fellow and Lecturer of Trinity College, Cambridge. Second Edition. London, Macmillan and Co, and New-York, 1892. Un volume cartonné de XII-241 pages in-12. Prix : 7 s/s sh.

L'auteur, à qui l'on doit déjà une histoire abrégée des mathématiques, une histoire des mathématiques à Cambridge et diverses monographies, a réuni dans son nouvel ouvrage un ensemble de questions curieuses ou intéressantes relatives aux mathématiques pures ou appliquées. Voici un aperçu du contenu de l'ouvrage.

1. *Questions d'arithmétique*. Questions curieuses. Les nombres parfaits. Les théorèmes de Fermat. 2. *Questions géométriques*. Paradoxes géométriques (voir un exemple, *Mathesis*, 1892, (2), I, pp. 161). Problème des cartes géographiques (**). Jeux divers. 3. *Questions de mécanique* (mouvement perpétuel, boomerang, etc.). 4. *Questions diverses* : le jeu des quinze; tour de Hanoï; anneaux chinois; problème des huit reines; problème des quinze écolières; problèmes divers relatifs à un jeu de cartes. 5. *Carrés magiques*. 6-7. *Questions unicursales*. Problèmes des ponts. Labyrinthes. Jeu de Hamilton. Le problème du cavalier au jeu d'échecs. 8. *Trois questions géométriques*. Duplication du cube. Trisection de l'angle. Quadrature du cercle. Ce chapitre contient de nombreux renseignements historiques. 9. *Astrologie*. 10. *Géométrie à plus de trois dimensions et géométrie non euclidienne* (insuffisant). 11. *Mesure du temps*. Calendriers divers; fête de Pâques. Cadrans

---

(*) Le temps et la place nous manquent à la fois pour analyser et apprécier en détail les nombreux ouvrages envoyés à la rédaction de *Mathesis*. Nous devons donc nous contenter d'en donner les titres et les sommaires, ou d'en indiquer la tendance générale. (*Rédaction.*)

(**) « Il suffit de quatre couleurs pour colorier, d'une manière différente, les subdivisions adjacentes d'une carte géographique, pourvu qu'elles se touchent suivant des lignes et non en des points, quelque nombreuses que soient ces subdivisions. » Ce curieux théorème empirique n'a jamais été démontré d'une manière rigoureuse.

solaires, horloges, montres. 12. *Hypothèses sur la constitution de la matière.* Matière continue; hypothèse atomique ancienne; dynamisme de Boscowich; tourbillons de W. Thomson. 13. *Index.*

---

*Zeittafeln zur Geschichte der Mathematik, Physik und Astronomie bis zum Jahre 1500, mit Hinweis auf die Quellen-Literatur* von Dr. Felix Müller, Professor am K. Luisengymnasium zu Berlin, Mitglied der K. Leopoldinischen Academie. Leipzig, B. G. Teubner (In-8° de IV-104 p.). Prix : 2,40 marcs.

Excellent recueil qui sera le bien venu auprès de tous ceux qui s'intéressent à l'histoire des mathématiques, de la physique et de l'astronomie. C'est une espèce de table chronologique des matières contenues dans les meilleurs manuels de l'histoire de ces trois sciences, ceux de Cantor, de Heller et de Wolf, avec l'indication des principaux mémoires ou articles publiés sur chacun des auteurs cités. Chaque paragraphe contient d'abord une date principale, puis une biographie sommaire du géomètre, physicien, ou astronome cité, ensuite l'indication de ses principaux travaux, enfin la bibliographie y relative.

Un juge très compétent, M. Cantor, a fait ressortir l'utilité des Tables chronologiques de M. F. Müller, et en a signalé les deux qualités principales : elles sont exactes et les données qu'elles contiennent sont suffisamment complètes. En les parcourant, il n'y a rencontré que cinq erreurs peu importantes.

---

*Recueil de problèmes de mathématiques*, par C.-A. Laisant, docteur ès sciences, ancien élève de l'École Polytechnique. Paris, Gauthier-Villars et fils. Tome I. *Arithmétique; Algèbre élémentaire; Trigonométrie*, 1893. In-8°, VIII-86 pages. Prix : fr. 2-50. Tome V. *Géométrie analytique à trois dimensions (et Géométrie supérieure)*, 1893. Un vol. in-8°, X-95 pages. Prix : fr. 2-50.

Nous avons fait ressortir, à propos du tome IV, les grands services que le Recueil de M. Laisant est appelé à rendre aux élèves, aux professeurs et généralement à tous ceux qui cultivent avec ardeur les mathématiques. Les questions proposées par les journaux périodiques sont intéressantes, non seulement pour l'enseignement, mais aussi pour la science pure; la plupart offrent des difficultés sérieuses. M. Laisant reproduit les énoncés et indique où l'on en peut trouver les solutions. Pour les problèmes non résolus, le journal qui les a proposés publiera les solutions que les lecteurs adresseraient à la Rédaction où à la librairie Gauthier-Villars et fils. *Mathesis* accueillera les solutions des questions proposées par la *N. C. M.*; elle insérera prochainement celles des questions 104, 121, 129, 338, 376, 414, 423, 538.

Le tome I renferme 431 questions, dont 32 se rapportent à l'arithmétique, 138 à l'algèbre élémentaire, 161 à la trigonométrie (rectiligne ou sphérique).

Le tome V du recueil donne les énoncés de 334 questions se rapportant aux figures rectilignes (23), aux figures sphériques (21), aux courbes et surfaces du second ordre (112), aux lieux géométriques (89), aux enveloppes (20), aux courbes et surfaces quelconques (69). (J. N.).

---

*Géométrie descriptive pour l'enseignement secondaire moderne*, par M. E. Lebon, agrégé de l'université, professeur de mathématiques au lycée Charlemagne. Paris, Delalain, 1892. — Premier volume, classe de seconde, 5e édition (VIII-136 pages in-8°, avec 178 figures dans le texte) Prix : 3 fr. — Deuxième volume, classe de première (sciences), 4e édition (VIII-320 pages in-8°, avec 277 figures dans le texte et 3 planches gravées hors texte, dont l'une en chromolithographie représente les signes et teintes conventionnels). Prix : 7 fr.

Sommaire du second volume. — *Géométrie descriptive* (130 pages). — 1. Méthode de changement de plan de projection. — 2. Méthode de rotation. — 3. Résolution de l'angle trièdre. — 4. Ombres des polyèdres. — 5. Intersection de deux polyèdres entre eux. — 6. Lignes courbes. — 7. Surfaces courbes. — 8. Contours apparents des surfaces courbes. — 9. Plans tangents au cylindre et au cône. — 10. Généralités sur les sections planes du cylindre et du cône. — 11. Exemples de section plane du cylindre. — 12. Exemples de section plane du cône. — 13. Plans tangents à la sphère. — 14. Section plane de la sphère. — 15. Sphère inscrite et sphère circonscrite. — 16. Intersection d'une droite et d'une surface. — 17. Ombres du cône, du cylindre et de la sphère.

*Géométrie cotée* (32 pages). — 1. Plans cotés. — 2. Surfaces topographiques.

*Levé des plans* (64 pages). — 1. Échelles et instruments de topographie. — 2. Méthodes de levé des plans. — 3. Planimétrie ou arpentage. — 4. Nivellement.

*Perspective conique linéaire* (48 pages). — 1. Définitions et principes. — 2. Perspective des figures géométrales. — 3. Perspective d'une figure de l'espace. — 4. Méthode de la corde de l'arc. — 5. Construction des ombres.

*Perspective cavalière* (9 pages). — Définitions, principes et exemples. Construction des ombres en perspective cavalière.

*Problèmes gradués à résoudre* (187 questions). — Géométrie descriptive (77). — Géométrie cotée (10). — Levé des plans (27). — Perspective conique linéaire (9). — Épures de récapitulation pour les classes de Seconde et de Première (64).

L'auteur fait usage de la ligne de terre.

---

## SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES(*).

### Question 754.

(Voir *Mathesis*, (2), II, p. 32).

*Pour que l'équation*

$$A_0 z^4 + 4 A_1 z^3 + 6 A_2 z^2 + 4 A_3 z + A_4 = 0$$

*puisse prendre la forme*

$$\alpha (x + \beta)^4 + \alpha' (x + \beta')^4 = 0,$$

---

(*) La question 798 (voir p. 54) a été également résolue par MM. Delville et Droz-Farny ; la question 757, par M. Denys ; la question 762, par M. Déprez, avec une remarque reproduisant en partie une question résolue dans la *N. C. M.* t, I, pp. 124 et 196.

*il faut que*

$$\begin{vmatrix} A_0 & A_1 & A_2 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ A_2 & A_3 & A_4 \end{vmatrix} = 0.$$

$x+\beta$, $x+\beta'$ *sont les facteurs linéaires de*

$$\begin{vmatrix} 1 & -x & x^2 \\ A_0 & A_1 & A_2 \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix}.$$

***Déduire de ce qui précède une méthode de résolution de l'équation générale du quatrième degré.***

*Solution par* M. Cl. Servais. 1° Posons $z = x + a$ et identifions le premier membre de l'équation transformée avec le développement de l'expression

$$\alpha(x+\beta)^4 + \alpha'(x+\beta')^4,$$

nous aurons

$$A_0 = \alpha + \alpha', \quad A_1 + aA_0 = \alpha\beta + \alpha'\beta',$$
$$A_2 + 2aA_1 + a^2A_0 = \alpha\beta^2 + \alpha'\beta'^2,$$
$$A_3 + 3A_2a + 3a^2A_1 + a^3A_0 = \alpha\beta^3 + \alpha'\beta'^3,$$
$$A_4 + 4aA_3 + 6a^2A_2 + 4a^3A_1 + a^4A_0 = \alpha\beta^4 + \alpha'\beta'^4.$$

On déduit successivement de ces égalités

$$A_0 = \alpha + \alpha', \quad A_1 = \alpha(\beta - a) + \alpha'(\beta' - a),$$
$$A_2 = \alpha(\beta - a)^2 + \alpha'(\beta' - a)^2, \quad A_3 = \alpha(\beta - a)^3 + \alpha'(\beta' - a)^3,$$
$$A_4 = \alpha(\beta - a)^4 + \alpha'(\beta' - a)^4.$$

Posons

$$\beta - a = u, \quad \beta' - a = v;$$

les dernières égalités peuvent s'écrire

$$A_0 = \alpha + \alpha', \tag{1}$$
$$A_1 = \alpha u + \alpha' v, \tag{2}$$
$$A_2 = \alpha u^2 + \alpha' v^2, \tag{3}$$
$$A_3 = \alpha u^3 + \alpha' v^3, \tag{4}$$
$$A_4 = \alpha u^4 + \alpha' v^4. \tag{5}$$

L'élimination de $\alpha$ et $\alpha'$ entre les équations des systèmes [(1), (2), (3)], [(2), (3), (4)], [(3), (4), (5)] conduit aux équations

$$A_2 - A_1(u+v) + A_0uv = 0, \quad A_3 - A_2(u+v) + A_1uv = 0,$$
$$A_4 - A_3(u+v) + A_2uv = 0.$$

Elles seront compatibles si

$$\begin{vmatrix} A_0 & A_1 & A_2 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ A_2 & A_3 & A_4 \end{vmatrix} = 0; \qquad (6)$$

et les quantités $-u$ et $-v$ seront les racines de l'équation

$$(A_0A_2 - A_1^2)z^2 + (A_0A_3 - A_1A_2)z + A_1A_3 - A_2^2 = 0. \qquad (7)$$

Le premier membre de cette équation est donc égal à

$$(A_0A_2 - A_1^2)(z - a + \beta)(z - a + \beta')$$

ou, en tenant compte de la relation $z = x + a$,

$$(A_0A_2 - A_1^2)(x + \beta)(x + \beta').$$

2° Soit l'équation générale

$$f = A_0z^4 + 4A_1z^3 + 6A_2z^2 + 4A_3z + A_4 = 0,$$

on pourra considérer cette équation comme résolue si on parvient à la ramener à la forme

$$\alpha(x + \beta)^4 + \alpha'(x + \beta')^4 + \alpha''(x + \beta)^2(x + \beta')^2 = 0.$$

Le Hessien H de la fonction $f$ sera alors de la forme

$$\gamma(x + \beta)^4 + \gamma'(x + \beta')^4 + \gamma''(x + \beta)^2(x + \beta')^2,$$

et parmi les fonctions $\lambda f + H$, il y en aura au moins une qui aura pour expression

$$\delta(x + \beta)^4 + \delta'(x + \beta')^4.$$

On déterminera la valeur de $\lambda$ correspondant à cette fonction en égalant à zéro le déterminant (6) des coefficients. L'équation ainsi obtenue sera du troisième degré en $\lambda$; $\lambda$ étant déterminé, les facteurs linéaires $x + \beta$, $x + \beta'$ seront donnés par l'équation (7) relative à la fonction $\lambda f + H$.

M. Emmerich a résolu la même question en identifiant $A_0x^4 + 4A_1x^3 + \cdots$ avec $\alpha(x + \beta)^4 + \alpha'(x + \beta')^4$, et fait observer que le déterminant (6) étant un invariant, aucune transformation linéaire ne peut ramener l'équation proposée à la nouvelle forme, à moins que ce déterminant ne soit nul.

## ×Question 775.

(Voir *Mathesis*, (2), II, p. 176.)

***Mettre le nombre*** $x^{10} - 5^5 y^{10}$, ***où*** $x$ ***et*** $y$ ***sont des nombres entiers positifs, sous la forme d'un produit de trois facteurs rationnels.*** (Éd. Lucas.)

***Solution par*** M. E. Fauquembergue. De l'identité

$$a^5 - b^5 = (a - b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4),$$

on déduit

$$x^{10} - 5^5 = (x^2 - 5)(x^8 + 5x^6 + 25x^4 + 125x^2 + 625);$$

et, par la méthode des coefficients indéterminés, on trouve aisément :

$$x^8 + 5x^6 + 25x^4 + 125x^2 + 625$$
$$= (x^4 + 5x^3 + 15x^2 + 25x + 25)(x^4 - 5x^3 + 15x^2 - 25x + 25).$$

Il en résulte l'identité

$$x^{10} - 5^5 y^{10} = (x^2 - 5y^2)(x^4 + 5x^3y + 15x^2y^2 + 25xy^3 + 25y^4)$$
$$(x^4 - 5x^3y + 15x^2y^2 - 25xy^3 + 25y^4).$$

---

## ×Question 776.

(Voir *Mathesis*, (2), II, p. 176.)

***Les parallèles menées par un point de l'ellipse de Steiner aux médianes du triangle, rencontrent les côtés opposés sur une droite. Étudier l'enveloppe de cette droite, lorsque le point se déplace sur l'ellipse.*** (E. Cesáro.)

***Solution par*** A. Droz Farny. Considérons un triangle équilatéral inscrit dans une circonférence. Les parallèles aux médianes de ce triangle par un point quelconque P de la circonférence, coupent les côtés opposés en trois points situés sur la ligne de Simson du point P. L'enveloppe de cette droite est l'hypocycloïde de Steiner. Projetons la figure orthogonalement sur un plan, le triangle devient quelconque, la circonférence devient l'ellipse de Steiner et la courbe demandée est une quartique, projection orthogonale d'une hypocycloïde de Steiner.

M. Déprez a traité très élégamment la même question par le calcul et la généralise en ces termes : *Trouver le lieu d'un point* P *tel, que les parallèles menées par* P *à trois directions fixes rencontrent respectivement les côtés d'un triangle donné* ABC *en trois points d'une même droite et chercher l'enveloppe de cette droite.*

Le défaut d'espace nous empêche de reproduire les développements de M. Déprez, et nous renvoyons à *Mathesis*, (1) II, p. 106.

## Question 781.

(Voir *Mathesis*, (2) II, p. 215)

***Par l'extrémité*** B ***du diamètre de courbure*** AB ***au point*** A ***d'une hyperbole, on mène sur une asymptote une perpendiculaire, qui coupe en*** K ***la tangente au point*** A. ***Soit*** N ***le point où la normale*** AB ***rencontre la seconde fois l'hyperbole. Démontrer que la droite*** NK ***et la seconde asymptote sont également inclinées sur la normale*** AB. (Cl. Servais.)

***Solution par*** M. A. Droz Farny. Prenons pour axes de coordonnées la tangente et la normale au point A. L'équation de la courbe sera (voir ***Mathesis***, (2) II, p. 177)

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2fy = 0.$$

Soient $\rho$ le rayon de courbure et $n$ la corde normale ; on trouve :

$$\rho = -\frac{f}{a}, \quad n = -\frac{2f}{b}.$$

Les coefficients angulaires des asymptotes sont les racines de l'équation

$$m^2 + \frac{2h}{b}m + \frac{a}{b} = 0.$$

En représentant par $\alpha$ et $\beta$ les angles de ces droites avec la tangente, on a

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = -\frac{2h}{b}, \quad \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta = \frac{a}{b}.$$

La droite BK a pour équation

$$y + \frac{2f}{a} = -\frac{x}{\operatorname{tg}\alpha} \quad \text{ou} \quad y + \frac{2f}{a} = -\frac{b}{a}\operatorname{tg}\beta \cdot x.$$

Pour $y = 0$, on en déduit

$$\mathrm{AK} = -\frac{2f}{b\operatorname{tg}\beta}.$$

En représentant par $\gamma$ l'angle que forme NK avec la tangente, on a

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{\mathrm{AN}}{\mathrm{AK}} = \frac{-\frac{2f}{b}}{\frac{-2f}{b\operatorname{tg}\beta}} = \operatorname{tg}\beta,$$

ce qui démontre la proposition.

*Solution par* M. MANDART. Soit O le symétrique du point A par rapport à B, (C) le cercle décrit sur AO comme diamètre. Les parallèles aux asymptotes menées par le point A rencontrent le cercle de courbure en deux points P et Q, tels que la droite PQ est la transformée de l'hyperbole, le point A et le cercle (C) étant les éléments principaux de la transformation (Voir, *Mathesis*, t. VIII, p. 28).

Joignons NK ; la question reviendra à démontrer que cette droite et la ligne AQ forment des angles égaux avec AB. Or l'angle QAB = QPB.

Il restera donc à prouver la similitude des triangles BKN et BPN′, N′ étant le point commun aux droites AB et PQ. Ce point est le correspondant du point N, donc

$$(AONN') = -1, \quad \text{ou} \quad \overline{BA}^2 = BN.BN'.$$

Mais

$$\overline{BA}^2 = BP.BK;$$

donc

$$\frac{BN'}{BP} = \frac{BK}{BN}.$$

Les triangles BKN et BPN′ ayant un angle commun compris entre les côtés proportionnels sont semblables et l'angle BPN′ = BAQ = KNA.

NOTE. M. Déprez a donné une solution analytique de la même question et il signale le théorème suivant :

*Par l'extrémité* B *du diamètre de courbure* AB *au point* A *d'une parabole, on abaisse sur l'axe une perpendiculaire, qui coupe en* K *la tangente menée en* A ; *soit* N *le second point de rencontre de la normale* AB *avec la courbe. La droite* NK *et l'axe de la parabole font avec* AK *deux angles égaux.*

Si l'on connaît le point N, ce théorème permet de trouver le diamètre de courbure AB.

---

### Question 795.

(Voir *Mathesis*, (2), II, p. 264.)

*Si a est supérieur à* (— 1) *on a :*

$$\int_0^1 \frac{x^a(1+x-2x^{a+1})}{1-x^2}\,dx = \text{log. nép. } 2. \quad \text{(E. CATALAN.)}$$

*Solution par* M. P. DELVILLE. On a, en supposant $a$ entier,

$$\int \frac{x^a(1+x-2x^{a+1})}{1-x^2}\,dx = \int \frac{x^a(1+x)}{1-x^2}\,dx + \int \frac{2x^{2a+1}}{1-x^2}\,dx.$$

Or

$$\int\frac{x^a(1+x)}{1-x^2}dx=\int\frac{x^a}{1-x}dx=-\int\left(x^{a-1}+x^{a-2}+\cdots+x+1+\frac{1}{x-1}\right)dx$$
$$=-\left[\frac{x^a}{a}+\frac{x^{a-1}}{a-1}+\cdots+\frac{x^2}{2}+x+l(x-1)\right].$$

Nous avons aussi

$$-\int\frac{2x^{2a+1}}{1-x^2}dx=\int 2\frac{x^{2a+1}}{x^2-1}dx=\int 2\left(x^{2a-1}+x^{2a-2}+\cdots+x^3+x+\frac{xdx}{x^2-1}\right)$$
$$=2\left\{\frac{x^{2a}}{2a}+\frac{x^{2a-2}}{2a-2}+\cdot\quad+\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}l(x^2-1)\right\}$$
$$=\left\{\frac{x^{2a}}{a}+\frac{x^{2(a-1)}}{a-1}+\cdots+\frac{x^4}{2}+x^2+l(x^2-1)\right\}.$$

On a donc

$$\int\frac{x^a(1+x-2x^{a+1})}{1-x^2}dx$$
$$=\left\{\frac{x^{2a}-x^a}{a}+\frac{x^{2(a-1)}-x^{a-1}}{a-1}+\cdots+x^2-x+l(x^2-1)-l(x-1)\right\}$$
$$=\frac{x^a(x^a-1)}{a}+\frac{x^{a-1}(x^{a-1}-1)}{a-1}+\cdots+\frac{x(x-1)}{1}+l\frac{x^2-1}{x-1}$$
$$=\frac{x^a(x^a-1)}{a}+\frac{x^{a-1}(x^{a-1}-1)}{a-1}+\cdots+\frac{x(x-1)}{1}+l(x+1)$$

et, par suite,

$$\int_0^1\frac{x^a(1+x-2x^{a+1})}{1-x^2}dx=\log 2.$$

*Solution par* M. H. Mandart. Si $\lim\varepsilon=0$, $\lim\eta=1$, on a

$$\int_0^1\frac{x^a(1+x-2x^{a+1})}{1-x^2}=\lim\int_\varepsilon^\eta\left[\frac{x^adx}{1-x}-\frac{2x^{2a+1}dx}{1-x^2}\right].$$

En posant $1-x=y$ dans la première intégrale, $1-x^2=z$ dans la on trouve

$$\int_\varepsilon^\eta\frac{x^adx}{1-x}=-\int_{1-\varepsilon}^{1-\eta}(1-y)^a\frac{dy}{y};\quad\int_\varepsilon^\eta\frac{2x^{2a+1}dx}{1-x^2}=-\int_{1-\varepsilon^2}^{1-\eta^2}(1-z)^a\frac{dz}{z}.$$

On a ensuite

$$(1-y)^a\frac{1}{y}=\frac{1}{y}-\frac{a}{1}+\frac{a(a-1)}{1.2}y-\frac{a(a-1)(a-2)}{1.2.3}y^2+\text{etc.},$$

$$(1-z)^a\frac{1}{z}=\frac{1}{z}-\frac{a}{1}+\frac{a(a-1)}{1.2}z-\frac{a(a-1)(a-2)}{1.2.3}z^2+\text{etc.}$$

Ces deux séries sont convergentes et intégrables si leurs termes vont en décroissant en valeur absolue. Pour cela, il suffit que l'on ait

$$-\frac{a-n+1}{n}z<1,\quad -\frac{a-n+1}{n}y<1,$$

c'est-à-dire

$$z-\frac{a+1}{n}z<1,\quad y-\frac{a+1}{n}y<1.$$

Comme $z$ et $y$ sont inférieurs à l'unité $u$, ces conditions sont vérifiées dans l'hypothèse $a+1>0$. Les deux intégrales deviennent donc

$$-\int_{1-\varepsilon}^{1-\eta}\left[\frac{1}{y}-\frac{a}{1}+\frac{a(a-1)}{1.2}y-\cdots\right]dy+\int_{1-\varepsilon^2}^{1-\eta^2}\left[\frac{1}{z}-\frac{a}{1}+\frac{a(a-1)}{1.2}z-\right]dz$$

$$=-\int_{1-\varepsilon}^{1-\eta}\frac{dy}{y}+\int_{1-\varepsilon^2}^{1-\eta^2}\frac{dz}{z}+\mathrm{R}=\log\left(\frac{1-\eta^2}{1-\varepsilon^2}\right)-\log\left(\frac{1-\eta}{1-\varepsilon}\right)+\mathrm{R}$$

$$=\log\left(\frac{1+\eta}{1+\varepsilon}\right)+\mathrm{R},$$

R désignant une expression qui a évidemment zéro pour limite, quand $\varepsilon$ tend vers zéro, et $\eta$ vers l'unité. On a donc, pour la valeur de l'intégrale donnée,

$$\lim\log\frac{1+\eta}{1+\varepsilon}=\log 2.$$

*Autre solution.* On a

$$\int_\varepsilon^\eta\frac{x^a dx}{1-x}-\int_\varepsilon^\eta\frac{2x^{2a+1}dx}{1-x^2}=\int_\varepsilon^\eta\frac{x^a dx}{1-x}-\int_{\varepsilon^2}^{\eta^2}\frac{t^a dt}{1-t}$$

$$=\int_\varepsilon^{\eta^2}\frac{x^a dx}{1-x}+\int_{\eta^2}^\eta\frac{x^a dx}{1-x}-\int_{\varepsilon^2}^\varepsilon\frac{t^a dt}{1-t}-\int_\varepsilon^{\eta^2}\frac{t^a dt}{1-t}$$

$$=\int_{\eta^2}^\eta\frac{x^a dx}{1-x}-\int_{\varepsilon^2}^\varepsilon\frac{t^a dt}{1-t}.$$

Or, quand $x$ varie de $\eta^2$ à $\eta$, et $t$ de $\varepsilon^2$ à $\varepsilon$,

$$\eta^{2a} < x^a < \eta^a; \quad \frac{1}{1-\varepsilon^2} < \frac{1}{1-t} < \frac{1}{1-\varepsilon};$$

$$\eta^{2a}\frac{dx}{1-x} < \frac{x^a dx}{1-x} < \eta^a \frac{dx}{1-x}; \quad \frac{t^a dt}{1-\varepsilon^2} < \frac{t^a dt}{1-t} < \frac{t^a dt}{1-\varepsilon};$$

$$\eta^{2a}\int_{\eta^2}^{\eta}\frac{dx}{1-x} < \int_{\eta^2}^{\eta}\frac{x^a dx}{1-x} < \eta^a\int_{\eta^2}^{\eta}\frac{dx}{1-x};$$

$$\frac{1}{1-\varepsilon^2}\int_{\varepsilon^2}^{\varepsilon} t^a dt < \int_{\varepsilon^2}^{\varepsilon}\frac{t^a dt}{1-t} < \frac{1}{1-\varepsilon}\int_{\varepsilon^2}^{\varepsilon} t^a dt.$$

D'ailleurs

$$\int_{\eta^2}^{\eta}\frac{dx}{1-x} = \log\left(\frac{1-\eta^2}{1-\eta}\right) = \log(1+\eta), \quad \int_{\varepsilon^2}^{\varepsilon} t^a dt = \frac{\varepsilon^{a+1}-\varepsilon^{2a+2}}{a+1}.$$

Donc

$$\int_{\eta^2}^{\eta}\frac{x^a dx}{1-x} = \mathrm{M}\log(1+\eta), \quad \int_{\varepsilon^2}^{\varepsilon}\frac{t^a dt}{1-t} = m\left\{\frac{\varepsilon^{a+1}-\varepsilon^{2a+2}}{a+1}\right\},$$

M étant intermédiaire entre $\eta^2$ et $\eta$, $m$ entre $(1-\varepsilon)^{-1}$ et $(1-\varepsilon^2)^{-1}$. Si $\varepsilon$ tend vers 0 et $\eta$ vers l'unité, les deux intégrales ont respectivement pour limites log 2 et 0, ce qui démontre le théorème.

L'intégrale donnée appartient à la catégorie des *intégrales frullaniennes* et le procédé employé ici pour en déterminer la valeur est dû à Schaar. Voir notre *Cours d'Analyse infinitésimale de l'Université de Gand*; seconde année, p. 159-160. (P. M.)

---

## Question CCCCXI.

(*N. C. M.*, t. IV, p. 303 et p. 357.)

***Les circonférences ayant pour diamètres les segments déterminés, sur les axes, par la normale et par la tangente en*** M, ***à une ellipse, se coupent en un second point*** M'. ***Le rayon de courbure en*** M ***est vu, du point*** M', ***sous un angle droit.*** (Mennesson.)

***Solution par*** M. E. N. Barisien. Si $\varphi$ désigne l'angle d'anomalie

excentrique en M, les équations des deux circonférences (*) sont

$$x^2 + y^2 - \frac{c^2 x}{a}\cos\varphi + \frac{c^2 y}{b}\sin\varphi = 0, \tag{1}$$

$$x^2 + y^2 - \frac{ax}{\cos\varphi} - \frac{by}{\sin\varphi} = 0. \tag{2}$$

En retranchant ces deux équations l'une de l'autre, on a pour l'équation de l'axe radical des deux circonférences :

$$bx\sin\varphi + ay\cos\varphi = 0. \tag{3}$$

En résolvant (1) et (3), on trouve pour les coordonnées du point M' :

$$x = \frac{ac^2\cos\varphi}{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi} \qquad y = -\frac{bc^2\sin\varphi}{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}. \tag{4}$$

Or, les coordonnées de M sont

$$x_1 = a\cos\varphi, \quad y_1 = b\sin\varphi; \tag{5}$$

et celles du centre de courbure C sont

$$\xi = \frac{c^2}{a}\cos^3\varphi, \quad \eta = -\frac{c^2}{b}\sin^3\varphi. \tag{6}$$

Le coefficient angulaire de la droite MM' a pour expression

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{b\sin\varphi}{a\cos\varphi}\left[\frac{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi + c^2}{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi - c^2}\right].$$

On trouve aussi, pour le coefficient angulaire de M'C,

$$\frac{\eta - y}{\xi - x} = \frac{a\sin\varphi}{b\cos\varphi}\left[\frac{b^2(1-\sin^4\varphi) - a^2\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{b^2\sin^2\varphi\cos^2\varphi - a^2(1-\cos^4\varphi)}\right]$$

$$= -\frac{a\cos\varphi}{b\sin\varphi}\left[\frac{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi - c^2}{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi + c^2}\right].$$

On a bien

$$\left(\frac{y_1 - y}{x_1 - x}\right)\cdot\left(\frac{\eta - y}{\xi - x}\right) = -1.$$

L'angle MM'C est donc droit.

---

(*) M. Barisien substitue ici aux segments déterminés, sur les axes, par la normale et la tangente, les segments déterminés par les axes sur la normale et sur la tangente. Mais les deux circonférences de M. Mennesson et celles de M. Barisien passent par un même point. (J. N.)

**Remarque.** Cette propriété permet de construire facilement le centre de courbure en M.

On prend les milieux $\omega$ et $\omega'$ des segments de la tangente et de la normale interceptés par les axes; puis on prend le symétrique M′ du centre O de l'ellipse, par rapport à la droite $\omega\omega'$ : on élève en M′ une perpendiculaire à MM′, qui rencontre la normale en M au point C, lequel est le centre de courbure relatif au point M.

***Solution géométrique.*** Soient N, N′ les points où la normale en M coupe les axes AA′, BB′ de l'ellipse; T, T′ ceux où la tangente en M les rencontre. Considérons une seconde normale $mnn'$, qui coupe AA′, BB′ en $n$, $n'$. On sait que

$$\frac{MN}{MN'} = \frac{mn}{mn'} = \frac{b^2}{a^2}.$$

Par conséquent, les droites MN, $mn$ et les droites M$m$, N$n$, N′$n'$ qui interceptent des segments proportionnels sur MN et $mn$, sont tangentes à une même parabole. Lorsque $m$ se rapproche indéfiniment de M, le point d'intersection de MN avec $mn$ a pour limite le centre de courbure C en M; donc la normale MN, la tangente TT′ et les axes sont des tangentes à une même parabole (P) qui touche MN en C.

O et M étant les sommets de deux angles droits circonscrits à (P), OM est la directrice de (P); le foyer M′ est à l'intersection des circonférences circonscrites aux triangles MNT, ONN′, MN′T′, OTT′ formés par trois tangentes de (P). Le segment MC d'une tangente compris entre la directrice et son point de contact est vu du foyer M′ sous un angle droit. (C. Q. F. D.)

Voici quelques remarques intéressantes.

1° OT, MN′ étant deux hauteurs du triangle N′TT′ T′N est la troisième hauteur; M′ est le point de rencontre de T′N avec TN′.

2° Le lieu de M′ est une courbe inverse de l'ellipse proposée par rapport à son centre. En effet, si l'on élimine $\varphi$ entre les équations (4), on trouve

$$(x^2+y^2)^2 = c^4\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right), \quad \text{ou} \quad \rho^2 = c^4\left(\frac{\cos^2\omega}{a^2}+\frac{\sin^2\omega}{b^2}\right).$$

3° La droite CM′, perpendiculaire MM′, rencontre TT′ en un point U, qui est le point de contact de TT′ avec la parabole (P). U est le centre de courbure de l'hyperbole homofocale avec l'ellipse donnée et passant par M.

4° Comme M. Mennesson l'a fait observer, son théorème conduit facilement aux solutions des problèmes suivants :

Trouver les axes d'une ellipse, connaissant un point M, le cercle osculateur en ce point et soit le centre O, soit l'un des axes. (J. N.)

---

## QUESTIONS D'EXAMEN.

**550.** On donne un cercle de centre O et de rayon $r$; sur un rayon OA comme diamètre, on décrit un cercle de centre O′ et de rayon $\frac{1}{2}r$. Déterminer sur un rayon OB perpendiculaire au rayon OA le centre O″ d'un troisième cercle tangent aux deux autres. Faire voir que le quatrième sommet O‴ du rectangle construit sur OO′, OO″ est le centre d'un quatrième cercle tangent aux trois premiers.

(*Baccalauréat*, Poitiers, 1892.)

Le cercle O″ a pour rayon $x = \frac{1}{3}r$; car le triangle OO′O″ donne

$$\left(x + \frac{r}{2}\right)^2 = \frac{r^2}{4} + (r - x)^2.$$

**551.** On donne deux circonférences O, O′ et un point P; mener aux deux circonférences deux tangentes parallèles, telles que le rapport des distances du point P aux deux tangentes soit égal à un rapport donné $\frac{m}{n}$.

Cette question, proposée dans le J. M., 1881 et résolue dans le numéro de février 1893 de J. M. E (p. 36), admet une solution très-simple. Soient S le centre de similitude des deux cercles, et Q, Q′ les intersections de la droite SP avec les tangentes demandées. On a

$$SQ : SQ' = R : R', \quad PQ : PQ' = m : n.$$

Les droites QO, Q′O′ sont parallèles. Menons PA parallèle à QO et rencontrant OO′ en A; nous aurons

$$AO : AO' = m : n.$$

Cette proportion sert à déterminer le point A. Ce point étant connu, on trace OQ, OQ′ parallèles à PA, et par Q, Q′, on mène des tangentes. (J. N.)

---

## QUESTIONS PROPOSÉES.

**819.** Étant donnés un cercle O et un point A sur la circonférence, on mène une corde quelconque AB, que l'on prolonge de BL = AB.

1° Trouver l'enveloppe de la circonférence M décrite sur BL comme

diamètre. 2° Donner une construction géométrique des points P, R où la circonférence M touche son enveloppe. 3° Chercher le lieu du point d'intersection N des tangentes menées en ces points P, R. 4° Déterminer l'enveloppe de la ligne MN. 5° Trouver l'enveloppe de l'axe radical de la circonférence M avec celle que décrit son centre. (MANDART.)

×**330.** Démontrer que $x-2$ est facteur de

$$\begin{vmatrix} x & \frac{l}{m}+\frac{m}{l} & \frac{n}{l}+\frac{l}{n} \\ \frac{l}{m}+\frac{m}{l} & x & \frac{m}{n}+\frac{n}{m} \\ \frac{n}{l}+\frac{l}{n} & \frac{m}{n}+\frac{n}{m} & x \end{vmatrix}$$

et trouver les autres facteurs.

(*Collège d'Aberystwyth*, examens de décembre 1892.)

×**331.** Discuter la fonction

$$y=\frac{\operatorname{tg}^5 x}{\operatorname{tg} 3x},$$

$x$ variant d'une manière continue de $-\infty$ à $+\infty$.

×**332.** Saient AB, CD deux diamètres rectangulaires d'une circonférence. On prend les arcs ACB', BCA' égaux au diamètre AB, puis les arcs A'CB'', B'CA'' égaux à la corde A'B''; puis les arcs A''CB''', B'''CA''' égaux à la corde A''B''; et ainsi de suite. Démontrer que la quantité

$$AB-A'B'+A''B''-A'''B'''+\cdots$$

a pour limite le quart de la circonférence donnée. (L. DE LANTSHEERE.)

**333.** Étant donnés deux axes $Ox$, $Oy$, on prend sur une perpendiculaire élevée à $Ox$ en O les segments $OM=OM'=l$, et sur une perpendiculaire élevée à $Oy$ en O les segments $ON=ON'=l$. On marque sur $Ox$ un point A et sur $Oy$ un point B tels que le produit $OA\cdot OB=l^2$.

Les points A, B étant supposés variables, trouver les lieux décrits par les points de rencontre des droites

(NB, MA), (N'B, M'A), (NB, M'A), (NA, MB), (N'A, M'B).

(LABENNE.)

***824.** Inscrire dans un cercle donné un triangle isoscèle tel que la somme des distances du centre du cercle aux trois côtés du triangle soit égale à une longueur donnée $m$.

Discuter le problème et indiquer si le centre du cercle se trouve à l'intérieur ou à l'extérieur du triangle correspondant à une solution déterminée.

On prendra pour inconnue la distance du centre aux deux côtés égaux.

(*Baccalauréat*, Rennes 1892.)

**825.** La formule (*) $N = 1 + x + x^2$ donne les nombres premiers 3, 7, 13, 31, 43, 73, 157, 193... En donne-t-elle une infinité ?

(E. CATALAN.)

**826.** Démontrer la formule

$$\frac{q}{1-q} - \frac{q^2}{1-q^2} - \frac{q^3}{1-q^3} + \frac{q^4}{1-q^4} - \frac{q^5}{1-q^5} + \frac{q^6}{1-q^6} - \frac{q^7}{1-q^7} - \frac{q^8}{1-q^8} + \frac{q^{10}}{1-q^{10}} + \cdots$$
$$= q + q^4 + q^9 + q^{16} + q^{25} + \cdots \text{(**)}.$$

(BASCHWITZ.)

Dans le premier membre, la fraction $\frac{q^a}{1-q^a}$ est prise avec le signe + ou avec le signe −, selon que $a$ est le produit d'un nombre *pair* ou d'un nombre *impair* de facteur premiers. Il y a exception pour le premier terme.

**827.** On joint un point M d'une ellipse à un des sommets A du grand axe. Du point P, pôle de MA par rapport à l'ellipse, on abaisse une perpendiculaire PQ sur la parallèle au grand axe passant par M, et une perpendiculaire PR sur la parallèle au petit axe passant par le point M', symétrique de M par rapport au centre. Le rectangle des segments PQ et PR est équivalent à celui formé par l'ordonnée et l'abscisse du point M, relatives aux axes. (E. N. BARBIER.)

---

**Rectification.** Page 10, les lettres O et I désignent le même point, le centre du cercle inscrit au triangle ABC.

---

(*) Dans cette formule, on peut supposer $x$ *non-carré*. (E. CATALAN.)

(**) Cette formule est peut être la plus remarquable que l'on ait rencontrée dans la théorie des *Séries elliptiques*. On peut la démontrer d'une manière fort simple.

(E. CATALAN.)

## SUR L'HYPERBOLE DE FEUERBACH(*).

**1.** Sur les médiatrices A'O, B'O, C'O du triangle ABC, prenons trois longueurs égales,

$$A'P_a = B'P_b = C'P_c = \lambda,$$

toutes trois vers O ou dans le sens opposé, et traçons le triangle $P_aP_bP_c$.

Les perpendiculaires abaissées de $P_a, P_b, P_c$ sur BC, CA, AB concourant en un même point O, les perpendiculaires abaissées de A, B, C sur les côtés correspondants du triangle $P_aP_bP_c$ concourent également en un même point P. Nous allons étudier le lieu décrit par P lorsque $\lambda$ varie.

On a vu (*Mathesis*, (2), III, 10) que les côtés du triangle $P_aP_bP_c$ enveloppent trois paraboles $\pi_a$, $\pi_b$, $\pi_c$ ayant pour directrices les bissectrices A'I', B'I', C'I' du triangle A'B'C' et pour foyers les projections de O sur les bissectrices AI, BI, CI du triangle ABC. Si l'on mène par un même point des parallèles aux côtés du triangle $P_aP_bP_c$, ces parallèles se correspondent dans trois faisceaux qui sont projectifs avec les ponctuelles décrites par $P_a$, $P_b$, $P_c$(**) et, par suite, projectifs entre eux. Il en résulte que les droites AP, BP, CP sont des rayons homologues de trois faisceaux projectifs; leur point d'intersection P décrit donc une conique $\varepsilon$ passant par A, B, C. A $\lambda = 0$ correspond l'orthocentre H de ABC; lorsque $\lambda$ augmente indéfiniment, les triangles $OP_bP_c$, $OP_cP_a$, $OP_aP_b$ tendent à devenir isoscèles, et les droites AP, BP, CP ont pour limites les bissectrices de ABC. Par conséquent, $\varepsilon$ est l'hyperbole équilatère passant par A, B, C, I.

**2.** Cherchons les coordonnées de P. Les coordonnées normales $y$, $z$ de P sont entre elles comme sin PAC, sin PAB; les angles PAC,

---

(*) Cet article est rédigé, en grande partie, d'après une note manuscrite de M. Mandart. L'hyperbole dont il est ici question a été signalée par M. Lemoine (*Ass. fr. pour l'Av. des Sciences, Congrès de Paris*, 1889, p. 203); et par M. Boutin (*J. M. S.*, 1890, pp. 104 et 124). Nous en avions également commencé l'étude à la suite de la lecture de l'article de M. Fuhrmann *Sur un nouveau cercle associé au triangle* (*Mathesis*, t. X, pp. 105-111). (J. N)

(**) Lorsque $P_bP_c$ roule sur la parabole $\pi_a$, elle marque sur la tangente OA' et sur la droite de l'infini des ponctuelles projectives, etc.

PAB ayant leurs côtés perpendiculaires à ceux des angles $OP_bP_c$, $OP_cP_b$, on a

$$\frac{y}{z} = \frac{\sin OP_bP_c}{\sin OP_cP_b} = \frac{OP_c}{OP_b} = \frac{R\cos C - \lambda}{R\cos B - \lambda}.$$

On peut donc poser

$$x = \frac{\rho}{R\cos A - \lambda}, \quad y = \frac{\rho}{R\cos B - \lambda}, \quad z = \frac{\rho}{R\cos C - \lambda}, \qquad (1)$$

$\rho$ étant un facteur de proportionnalité.

Si l'on élimine $\lambda$, $\rho$ entre les trois relations (1), on trouve pour le lieu de P :

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{x} & \frac{1}{y} & \frac{1}{z} \\ \cos A & \cos B & \cos C \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$\frac{\cos B - \cos C}{x} + \frac{\cos C - \cos A}{y} + \frac{\cos A - \cos B}{z} = 0, \qquad (2)$$

ou encore

$$\frac{(b-c)(p-a)}{x} + \frac{(c-a)(p-b)}{y} + \frac{(a-b)(p-c)}{z} = 0.$$

Toute conique circonscrite au triangle ABC peut être regardée comme la transformée inverse d'une droite. Les points H, I ayant pour inverses O, I, *l'hyperbole* $\varepsilon$ *est la transformée inverse de la droite* OI. Cette propriété résulte aussi immédiatement de l'équation (2).

**3.** Soient $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ les points où le cercle inscrit au triangle ABC touche les trois côtés. Prenons sur $I\alpha$, $I\beta$, $I\gamma$ trois distances égales

$$IQ_a = IQ_b = IQ_c = \mu.$$

Lorsque $\mu$ varie, les droites $AQ_a$, $AQ_b$, $AQ_c$ se coupent en un même point Q, situé sur l'hyperbole $\varepsilon$. En effet, les points $Q_b$, $Q_c$ décrivent des ponctuelles égales ; donc les droites $BQ_b$, $CQ_c$ se correspondent dans deux faisceaux projectifs et leur point d'intersection décrit une conique passant par les centres B, C des deux faisceaux, par I ($\mu = 0$), par H ($\mu = \infty$) et par A ($\mu = -r \sec A$ ; $Q_b$ et $Q_c$ sont à l'intersection de AB avec $I\beta$, et de AC avec $I\gamma$). Le point de rencontre de $AQ_a$, $BQ_b$ décrit une conique passant par les mêmes points A, B, C, H, I ; donc $AQ_a$, $BQ_b$, $CQ_c$ concourent

en un même point Q, et le lieu de Q est l'hyperbole trouvée ci-dessus.

Cherchons les coordonnées normales $x$, $y$, $z$ de Q. Si $x'$, $y'$, $z'$ sont celles de $Q_a$, on trouve, en projetant le contour $Q_aI\beta$ sur $y'$, et $Q_aI\gamma$ sur $z'$ :

$$y' = r + \mu \cos C, \quad z' = r + \mu \cos B.$$

Comme $y : z = y' : z'$, on peut poser

$$x = \frac{\rho'}{\mu \cos A + r}, \quad y = \frac{\rho'}{\mu \cos B + r}, \quad z = \frac{\rho'}{\mu \cos C + r}, \qquad (3)$$

valeurs qu'on ramène aux formules (1) en faisant

$$\rho = \frac{R\rho'}{\mu}, \quad \lambda = -\frac{rR}{\mu}.$$

A l'hypothèse $\mu = r$ correspond le *point de Gergonne*, intersection des droites $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ ; l'hypothèse $\mu = -r$ donne le *point de Nagel* $\nu$, intersection des droites joignant A, B, C aux secondes extrémités $\alpha_1$, $\beta_1$, $\gamma_1$ des diamètres $\alpha I$, $\beta I$, $\gamma I$ du cercle inscrit(*). Les valeurs $\mu = \pm r$ correspondent à $\lambda = \mp R$. Si l'on prend A'B'C' pour triangle de référence et qu'on le désigne par ABC, on a donc le théorème suivant :

*Sur les hauteurs* HA, HB, HC *d'un triangle* ABC, *on prend les longueurs* $AR_a$, $BR_b$, $CR_c$ *et, dans le sens opposé, les longueurs* $AR'_a$, $BR'_b$, $CR'_c$ *égales au diamètre du cercle circonscrit. Les côtés du triangle* $R_aR_bR_c$ *sont respectivement perpendiculaires aux droites joignant* A, B, C *aux points de contact des côtés de* ABC *avec le cercle inscrit ; les côtés du triangle* $R'_aR'_bR'_c$ *sont perpendiculaires aux droites joignant* A, B, C *aux points de contact des côtés avec les cercles exinscrits correspondants*(**).

---

(*) La droite $A\alpha_1$ rencontre BC au point de contact $\alpha'$ de BC avec le cercle exinscrit $I_a$ ; car A est le centre de similitude externe des cercles I, $I_a$, dont $I\alpha_1$, $I_a\alpha'$, sont des rayons parallèles.

(**) M. Boutin signale encore quelques autres autres points remarquables de l'hyperbole ABCI :

1° Le point $J_3$, qui a pour coordonnées normales $\cot g \frac{1}{2}A$, $\cot g \frac{1}{2}B$, $\cot g \frac{1}{2}C$, est le point de Lemoine du triangle $I_aI_bI_c$ ; il correspond à

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{2R} + \frac{1}{r} \quad \text{ou} \quad \lambda = -\left(R + \frac{1}{2}r\right);$$

2° Un point $\psi$, ayant pour coordonnées normales $[1 : (\cos B + \cos C)]_3$ ... et correspondant à

$$\frac{1}{\mu} + \frac{1}{r} + \frac{1}{R} = 0 \quad \text{ou} \quad \lambda = R + r.$$

**4.** Les asymptotes de l'hyperbole équilatère ABCI peuvent se trouver par différents procédés.

1° La droite OI rencontre le cercle ABC en deux points T, T'. Les inverses des points T, T' sont à l'infini ; comme ils sont aussi sur l'hyperbole, les asymptotes sont parallèles aux isogonales des droites AT, AT'.

On démontre facilement que l'isogonale de AT est perpendiculaire à la droite de Simson de T ; de même l'isogonale de AT' est perpendiculaire à la droite de Simson de T'. Comme ces deux droites de Simson sont des droites réciproques par rapport aux côtés de ABC (c'est-à-dire rencontrant chaque côté en deux points symétriques par rapport à son milieu), elles sont les asymptotes d'une hyperbole circonscrite à ABC ; cette courbe se confond nécessairement avec l'hyperbole équilatère ABCI.

2° Exprimons que le point P (ou Q) est à l'infini (ou sur la droite $ax + by + cz = 0$) ; nous aurons

$$\frac{\sin A}{R\cos A - \lambda} + \frac{\sin B}{R\cos B - \lambda} + \frac{\sin C}{R\cos C - \lambda} = 0, \qquad (4)$$

$$\frac{\sin A}{\mu\cos A + r} + \frac{\sin B}{\mu\cos B + r} + \frac{\sin C}{\mu\cos C + r} = 0, \qquad (4')$$

ou

$$\lambda^2 - \lambda R + \tfrac{1}{2}Rr = 0, \quad \mu^2 + 2\mu R + 2Rr = 0.$$

Par conséquent,

$$\lambda = \tfrac{1}{2}(R \pm \sqrt{R^2 - 2Rr}), \quad \mu = -(R \pm \sqrt{R^2 - 2Rr});$$

ou plus simplement, si T, T' sont les extrémités du diamètre OI de la circonférence ABC (on sait que $OI = \sqrt{R^2 - 2Rr}$),

$$\lambda = \tfrac{1}{2}IT \quad \text{ou} \quad \tfrac{1}{2}IT', \quad \mu = -IT' \quad \text{ou} \quad -IT.$$

Ainsi : *Quand on prend sur* A'O, B'O, C'O *les distances*

$$A'L_a = B'L_b = C'L_c = \tfrac{1}{2}IT, \quad A'L'_a = B'L'_b = C'L'_c = \tfrac{1}{2}IT',$$

*les points* $L_a$, $L_b$, $L_c$ *et* $L'_a$, $L'_b$, $L'_c$ *sont situés sur deux droites* $l$, $l'$ *qui sont parallèles aux asymptotes de l'hyperbole équilatère* ABCI. *La circonférence décrite du centre* I *avec le rayon* IT' *coupe les droites* $I\alpha$, $I\beta$, $I\gamma$ *en des couples de points* $U_a$ *et* $U'_a$, $U_b$ *et* $U'_b$, $U_c$ *et* $U'_c$, *et la circonférence décrite du centre* I *avec le rayon* IT *coupe les mêmes droites en des couples de points* $W_a$ *et* $W'_a$, $W_b$ *et* $W'_b$, $W_c$ *et* $W'_c$ : *si* $U_a$, $U_b$, $U_c$, $W_a$, $W_b$, $W_c$ *sont les points situés par rapport à* I *du côté opposé à* $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, *les droites*

$AU_a$, $BU_b$, $CU_c$ *sont parallèles à une asymptote de l'hyperbole, et les droites* $AW_a$, $BW_b$, $CW_c$ *sont parallèles à l'autre.*

**5.** Les points O, I ayant pour coordonnées normales absolues

$$R\cos A,\quad R\cos B,\quad R\cos C, \text{ et } \quad r,\quad r,\quad r,$$

le point situé à l'infini sur la droite OI a des coordonnées proportionnelles à

$$R\cos A - r,\quad R\cos B - r,\quad R\cos C - r,$$

et l'inverse V de ce point a pour coordonnées

$$\frac{1}{R\cos A - r},\quad \frac{1}{R\cos B - r},\quad \frac{1}{R\cos C - r}, \tag{5}$$

ou

$$\frac{1}{\cos B + \cos C - 1},\quad \frac{1}{\cos C + \cos A - 1},\quad \frac{1}{\cos A + \cos B - 1}.$$

V est le point de rencontre de l'hyperbole ABCI avec le cercle ABC; car la droite de l'infini et le cercle ABC sont des lignes inverses.

En comparant les expressions (1) et (5), on voit que ce point V correspond à

$$\lambda = r,\quad \mu = -R.$$

On a donc le théorème suivant :

*Si, sur les droites* A'O, B'O, C'O, *on prend les longueurs*

$$A'V_a = B'V_b = C'V_c = r,$$

*les perpendiculaires abaissées de* A, B, C *sur les côtés correspondants du triangle* $V_aV_bV_c$ *concourent en un même point* V *du cercle* ABC; *ce point appartient aussi à l'hyperbole équilatère* ABCI.

La circonférence décrite sur OI comme diamètre passe par les points $V_a$, $V_b$, $V_c$; en comparant les angles du triangle $V_aV_bV_c$ à ceux du faisceau (O, A'B'C'), on voit que *le triangle* $V_aV_bV_c$ *est inversement semblable à* ABC.

Pour obtenir le point V, on peut aussi prendre sur les droites $\alpha$I, $\beta$I, $\gamma$I, à partir de I, trois longueurs égales à R et joindre leurs extrémités à A, B, C; les trois droites ainsi obtenues concourent en V.

**6.** Le milieu F de la droite HV est le centre de l'hyperbole ABCI. Car, H étant le centre de similitude interne du cercle des neuf points et du cercle ABC et le rapport de similitude étant 1 : 2, F est situé sur le

premier cercle et, par suite, est le centre d'une hyperbole équilatère passant par A, B, C, V.

A, B, C, V étant les quatre points où un cercle coupe l'hyperbole ABCI, les axes de cette conique sont parallèles aux bissectrices des angles formés par les deux côtés opposés du quadrangle ABCV.

D'après ce qu'on a déjà vu, F est l'intersection des droites de Simson des points T, T′ où la droite OI rencontre la circonférence ABC.

Soit V′ le symétrique de V par rapport à O. Dans le triangle HVV′, deux médianes sont HO, V′F ; on en conclut que V′F passe par le centre de gravité G de ABC et que V′G = 2GF ; donc F *est le complémentaire de* V′. De plus, l'équation de OV est

$$\Sigma (\cos B - \cos C)(1 - \cos A)(\cos B + \cos C - 1)\,x = 0;$$

on voit aisément qu'elle est vérifiée par les coordonnées $(1 - \cos A)^{-1}, \ldots$ du point de Nagel. Donc OV *passe par le point de Nagel.* Si O′ est le centre du cercle des neuf points de ABC, O′F est parallèle à OV et est la complémentaire de la droite OV, et par suite passe par I, le complémentaire de $\nu$. On déduit de là que F est le point de contact du cercle des neuf points de ABC avec le cercle inscrit. A cause de cette propriété, nous proposons la dénomination *d'hyperbole de Feuerbach* pour la courbe que nous étudions ici.

Les asymptotes de la courbe sont les droites de Simson des extrémités T, T′ du diamètre OI du cercle ABC. Elles passent par le centre F et par les milieux $T_1$, $T_1'$ des droites HT, HT′. Soient $t$, $t'$ les points où elles rencontrent OI ; $T_1T_1'$ passe par le milieu O′ de HO, et $O'F = O'T_1 = O'T_1'$ ; on en conclut $IF = It = It'$, donc $t$, $t'$ sont les points où OI coupe le cercle inscrit à ABC.

Pour avoir les coordonnées du centre F, nous appliquons la règle bien connue : l'équation de la courbe étant

$$\Sigma (\cos B - \cos C)\,yz = 0,$$

nous écrivons que les dérivées partielles du premier membre sont proportionnelles à $a$, $b$, $c$.

En résolvant les équations ainsi obtenues, on trouve que les coordonnées normales de F sont

$$\sin^2 \tfrac{1}{2}(B - C), \quad \sin^2 \tfrac{1}{2}(C - A), \quad \sin^2 \tfrac{1}{2}(A - B).$$

7. Soient $P_1, P_2, P_3$ les points où une même droite rencontre l'hyperbole de Feuerbach et la droite OI, et soient

$$\frac{1}{R\cos A-\lambda_1},\quad \frac{1}{R\cos B-\lambda_1},\quad \frac{1}{R\cos C-\lambda_1},\quad \text{ou}\quad \frac{1}{\mu_1\cos A+r},\ldots$$

$$\frac{1}{R\cos A-\lambda_2},\quad \frac{1}{R\cos B-\lambda_2},\quad \frac{1}{R\cos C-\lambda_2},\quad \text{ou}\quad \frac{1}{\mu_2\cos A+r},\ldots$$

$$R\cos A-\lambda_3,\quad R\cos B-\lambda_3,\quad R\cos C-\lambda_3,\quad \text{ou}\quad \mu_3\cos A+r,\ldots$$

leurs coordonnées normales. En exprimant que le déterminant formé de ces coordonnées est nul, on trouve, après suppression du facteur $\lambda_1-\lambda_2$,

$$\Sigma(R\cos A-\lambda_1)(R\cos A-\lambda_2)(R\cos A-\lambda_3)(\cos B-\cos C)=0;$$

et en développant :

$$R^3\Sigma\cos^3 A(\cos B-\cos C)-R^2\Sigma\cos^2 A(\cos B-\cos C)\Sigma\lambda_1$$
$$+\Sigma R\cos A(\cos B-\cos C)\Sigma\lambda_1\lambda_2-\lambda_1\lambda_2\lambda_3\Sigma(\cos B-\cos C)=0.$$

Or

$$\Sigma\cos^3 A(\cos B-\cos C)=(\cos A-\cos B)(\cos B-\cos C)(\cos A-\cos C)\Sigma\cos A,$$
$$\Sigma\cos^2 A(\cos B-\cos C)=(\cos A-\cos B)(\cos B-\cos C)(\cos A-\cos C),$$
$$\Sigma\cos A(\cos B-\cos C)=0,\quad \Sigma(\cos B-\cos C)=0.$$

Donc la relation entre $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ se réduit à

$$\Sigma\lambda_1=R\Sigma\cos A=OA'+OB'+OC'=R+r; \qquad (6)$$

on la transforme aisément en celle-ci

$$\Sigma\frac{1}{\mu_1}=-\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{R}\right),$$

car

$$\Sigma\cos A=1+\frac{r}{R}.$$

Cette relation remarquable est due à M. Boutin (*). Si l'on y suppose $\lambda_1=-\lambda_2$, $\lambda_3$ a une valeur constante; on en déduit le théorème suivant :

*Un cercle de centre* I *rencontre les droites* $\alpha$I, $\beta$I, $\gamma$I *aux couples de points* $J_a$ *et* $J'_a$, $J_b$ *et* $J'_b$, $J_c$ *et* $J'_c$; *soient* $J_a$, $J_b$, $J_c$ *les points situés par rapport à* I *du même côté que* $\alpha$, $\beta$, $\gamma$. *Les droites* $AJ_a$, $BJ_b$, $CJ_c$ *concou-*

(*) Pour les conséquences à tirer de l'équation (6), nous renvoyons le lecteur à l'article de M. M'Cay (*Mathesis*, t. VII, pp. 208-220).

*rent en un même point* J ; *les droites* $AJ'_a$, $BJ'_b$, $CJ'_c$, *en un même point* J'. *La droite* JJ' *passe par un point fixe* (*) *de la droite* OI.

Plus généralement, si la somme $\lambda_1 + \lambda_2$ a une valeur constante, la droite $P_1P_2$ passe par un point fixe de OI.

On peut encore généraliser davantage : *si l'on considère sur* $I\alpha$, $I\beta$, $I\gamma$ *des couples de points* $Q_a$ *et* $Q'_a$, $Q_b$ *et* $Q'_b$, $Q_c$ *et* $Q'_c$ *formant trois involutions égales* ($IQ_a = IQ_b = IQ_c$, $IQ'_a = IQ'_b = IQ'_c$), *les droites* $AQ_a$, $BQ_b$, $CQ_c$ *et* $AQ'_a$, $BQ'_b$, $CQ'_c$ *concourent respectivement en deux points* Q, Q' *de l'hyperbole de Feuerbach : la droite* QQ' *passe par un point fixe.* En effet, les droites $AQ_a$ et $AQ'_a$ étant des rayons conjugués d'une involution, les points Q, Q' marquent sur l'hyperbole une involution.

**8.** Si l'on transforme par inversion triangulaire les droites $OI_a$, $OI_b$, $OI_c$, on obtient trois autres hyperboles équilatères circonscrites au triangle ABC et ayant pour centres les points de contact du cercle des neuf points avec les cercles exinscrits $I_a$, $I_b$, $I_c$. Ces courbes jouissent de propriétés analogues à celles de l'hyperbole ABCI.

**9.** Prenons, comme précédemment, sur les médiatrices A'O, B'O, C'O, trois longueurs égales,

$$A'P_a = B'P_b = C'P_c = \lambda,$$

et soit P le point de concours des perpendiculaires abaissées de A, B, C sur les côtés correspondants du triangle $P_aP_bP_c$. L'aire du triangle $P_aP_bP_c$ a pour expression

$$\frac{1}{2}\Sigma(R\cos A - \lambda)(R\cos B - \lambda)\sin C = \frac{S}{2Rr}\left(\frac{Rr}{2} - R\lambda + \lambda^2\right);$$

elle passe par un minimum (négatif) pour $\lambda = \frac{R}{2}$, $\mu = -2r$.

Deux triangles $P_aP_bP_c$ qui correspondent à deux valeurs de $\lambda$ ayant pour somme R, sont équivalents. La droite qui joint les points correspondants de l'hyperbole de Feuerbach est constamment parallèle à OI (§ 7).

**10.** Nous avons désigné par V (§ 5) le point de rencontre de l'hyperbole de Feuerbach avec la circonférence ABC, par V' le symétrique de V par rapport à O. V étant l'inverse du point à l'infini sur OI, V' est l'inverse du point à l'infini sur la direction perpendiculaire à OI ou sur

(*) C'est le point $\psi$, situé à l'intersection de OI avec la droite joignant le point de Gergonne et le point de Nagel (cas particuliers des points J, J').

la polaire de I par rapport au cercle ABC. Cette polaire a pour équation

$$(b+c)x+(c+a)y+(a+b)z=0,$$

ou

$$2p(x+y+z)-(ax+by+cz)=0;$$

on voit qu'elle est parallèle à la droite $x+y+z=0$, axe d'homologie des triangles ABC, $I_aI_bI_c$. Par suite, V′ appartient à la transformée par inversion triangulaire de cet axe, ou à l'ellipse ayant pour équation

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0. \qquad (7)$$

Cette conique touche les côtés du triangle $I_aI_bI_c$ aux points A, B, C et a pour centre le point de Lemoine de $I_aI_bI_c$, point qui a pour coordonnées

$$p-a,\quad p-b,\quad p-c \quad \text{ou} \quad \operatorname{cotg}\frac{A}{2},\quad \operatorname{cotg}\frac{B}{2},\quad \operatorname{cotg}\frac{C}{2}$$

et appartient à l'hyperbole de Feuerbach.

Les axes de l'ellipse (7) sont parallèles aux bissectrices des angles formés par deux côtés opposés du quadrangle cyclique inscrit ABCV′; ces bissectrices formant l'angle de 45° avec celles des angles formés par les côtés opposés du quadrangle ABCV, inscrit à l'hyperbole de Feuerbach, on voit que les axes de l'ellipse (7) sont parallèles aux asymptotes de l'hyperbole.

Les coordonnées de V′ sont

$$\frac{1}{b-c},\quad \frac{1}{c-a},\quad \frac{1}{a-b}.$$

---

## ×PROPRIÉTÉS DE DEUX TRIANGLES;

par M. J. Wastrels, professeur à l'Athenée de Hasselt.

Soient S la surface d'un triangle; $a$, $b$, $c$ ses côtés; $h_a$, $h_b$, $h_c$ les hauteurs abaissées sur ces côtés; A, B, C les angles opposés aux côtés $a$, $b$, $c$; $r$, le rayon du cercle inscrit; R, le rayon du cercle circonscrit.

Soient S′ la surface d'un second triangle ayant pour côtés

$$a'=b+c,\quad b'=c+a,\quad c'=a+b;$$

$\rho'_a$, $\rho'_b$, $\rho'_c$ les rayons des cercles exinscrits à ce triangle; A′, B′, C′ les angles opposés respectivement aux côtés $a'$, $b'$, $c'$; $r'$ le rayon du cercle inscrit.

On a :

1° $$r' = \sqrt{2Rr};$$

2° $$\frac{\rho'_a}{h_a} = \frac{\rho'_b}{h_b} = \frac{\rho'_c}{h_c} = \frac{r'}{r} = \frac{S'}{2S};$$

3° $$\frac{\sin A}{\cot \frac{1}{2} A'} = \frac{\sin B}{\cot \frac{1}{2} B'} = \frac{\sin C}{\cot \frac{1}{2} C'};$$

4° $$\frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(A + B)}{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(A - B)} = \frac{\sin \frac{1}{2}(A' + B')}{\sin \frac{1}{2}(B' - A')}.$$

*Démonstration.* Si l'on pose

$$2p' = a' + b' + c', \quad 2p = a + b + c,$$

on a

$$p' = 2p, \quad p' - a' = a, \quad p' - b' = b, \quad p' - c' = c.$$

De là, on déduit

$$r' = \sqrt{\frac{(p' - a')(p' - b')(p' - c')}{p'}} = \sqrt{\frac{abc}{2p}} = \sqrt{2Rr}.$$

Les égalités (2°) résultent des relations suivantes :

$$S' = \rho'_a(p' - a') = \rho'_b(p' - b') = \rho'_c(p' - c') = p'r' = 2pr',$$
$$2S = h_a \times a = h_b \times b = h_c \times c = 2pr.$$

Pour établir les égalités (3°), il suffit de remarquer que chaque rapport vaut $\frac{r'}{2R}$.

Pour arriver à (4°), on observe qu'on peut écrire

$$\frac{\sin A + \sin B}{\sin A - \sin B} = \frac{\cot \frac{1}{2} A' + \cot \frac{1}{2} B'}{\cot \frac{1}{2} A' - \cot \frac{1}{2} B'} = \frac{\sin \frac{1}{2}(A' + B')}{\sin \frac{1}{2}(B' - A')}.$$

---

## BIBLIOGRAPHIE.

*Récréations mathématiques*, par M. Éd. Lucas. Tome III. Un vol. in-8° de VII-200 pages et 79 figures dans le texte. — Paris, Gauthier-Villars et fils. 1893. Prix : fr. 7-50.

Les *Récréations mathématiques* d'Ed. Lucas formaient jusqu'à présent deux volumes qui ont paru en 1882 et en 1883, et ont été annoncés immédiatement dans ce journal (t. II, 181-183, t III, 54-55, 202-203). Depuis, le premier volume était parvenu à une nouvelle édition, signalée aussi dans *Mathesis* (1891 (2), I, 45-46).

Ces deux volumes ne représentaient d'ailleurs qu'une partie de l'œuvre de vulgarisation à laquelle Éd. Lucas a travaillé avec tant d'ardeur et d'ingéniosité, et où

il a su déployer ce talent pédagogique si apprécié, qui lui a permis de rendre attrayantes les démonstrations de propriétés arithmétiques, sujet qui comporte par lui-même une grande sécheresse.

La prédilection témoignée par Éd. Lucas pour ce que nous pourrions appeler les mathématiques récréatives, se trouve confirmée par ce fait que l'auteur avait depuis longtemps préparé les matériaux non seulement d'un troisième volume, mais également d'un quatrième, dont la publication ne tardera pas, sans doute, à suivre celle du volume qui vient de paraître.

Ce volume comprend sept *récréations* dont nous donnons ci-après le résumé.

**Le Calcul sur les doigts.** Ce chapitre est en partie rédigé d'après une conférence faite à Paris en 1885. Le lecteur pourra également en juger par un passage de la *Théorie des Nombres*, reproduit dans *Mathesis* (X, 243).

**Le Calcul et les machines à calculer.** Reproduction textuelle de la brillante conférence d'Éd. Lucas au Congrès de Blois en 1884.

**Le jeu du caméléon et le jeu des jonctions de points.** Le jeu du caméléon est une variante du taquin, étudié dans le II^me^ volume. Le jeu des jonctions de points n'est donné ici qu'à titre de marche à suivre.

**Le jeu militaire et la Prise de la Bastille.** Étude raisonnée d'une sorte de jeu de marelle, et exposition des règles qui assurent le gain de la partie.

**La patte d'oie et le fer à cheval.** Discussion du jeu de trois dames contre une, sur l'échiquier ordinaire de 64 cases.

**Le jeu américain et les amusements par les jetons.** Étude de différentes combinaisons qui se ramènent à des types très simples.

**L'étoile nationale et les jeux de rouge et noire.** Ce nouveau jeu, inventé récemment par M. Arnous de Rivière, se prête à des combinaisons suffisamment variées pour exciter l'attention des joueurs, en évitant l'inconvénient du jeu du taquin, où le hasard des données initiales aboutit, généralement une fois sur deux, à une impossibilité.

M. A. de Rivière est également l'inventeur des jeux de rouge et noire, exposés dans le même chapitre et dont la variété est aussi indéfinie que celle de la Roulette. La détermination des probabilités de gain correspondant à différentes combinaisons de ces jeux a fait l'objet d'une étude très approfondie de M. le colonel Ch. Moreau. Elle est résumée en 19 graphiques.

Ici se termine l'exposé des matières du volume, dont l'intérêt, comme on le voit, ne le cède en rien à celui des précédents.

La mort prématurée d'Éd. Lucas avait fait craindre une interruption dans la publication de son œuvre scientifique, mais le zèle éclairé de ses collègues de la Société mathématique, MM. Delannoy, Laisant et Lemoine, a pourvu à l'accomplissement de cette tâche, leur créant ainsi de nouveaux titres à la reconnaissance du public mathématique.

Enfin, MM. Gauthier-Villars et fils, éditeurs, ont assuré à l'exécution typographique de cet ouvrage l'élégance et la perfection que l'on connaît. (H. BROCARD.)

*Revue semestrielle des publications mathématiques*, rédigée sous les auspices de la société mathématique d'Amsterdam par Schoute (Groningue), Korteweg (Amsterdam), Kluyver (Leyde), Kapteyn (Utrecht) et Zeeman (Delft) avec la collaboration de MM. Van Aller, De Boer, Cardinaal, Coelingh, Escher, Mantel, P. Molenbroek, Van Mourik, Paraira, Rahusen, Schouten, Tesch, Versluys, De Vries et M^lle^ Wijthoff. Tome I, Première partie, Amsterdam, Versluys, 1893. (In-8°, 104 pages) (*).

La Revue semestrielle constituera un répertoire très utile à tous ceux qui désirent rester au courant des progrès des mathématiques. Elle donnera des comptes rendus très sommaires des mémoires publiés dans les principaux journaux scientifiques; les titres des travaux analysés seront accompagnés d'une ou de plusieurs notations, renvoyant au système de classification adopté par le Congrès international de bibliographie des sciences mathématiques. Elle paraîtra en général le premier janvier et le premier juillet, la première livraison s'occupant des travaux parus du premier mars au premier octobre de l'année précédente; la seconde de ceux des six mois suivants; de cette façon, il n'y a jamais un long retard entre la publication d'un mémoire et son analyse. Chaque livraison sera terminée par une table des matières très méthodique et une table des auteurs, ce qui facilitera beaucoup les recherches. La rédaction du journal se fait en français; toutefois, pour les mémoires écrits en anglais ou en allemand, les comptes rendus se serviront de la langue de l'auteur.

Les mathématiciens hollandais sont probablement les seuls qui puissent ainsi entreprendre la publication d'un recueil scientifique en trois langues dont aucune n'est la langue maternelle des rédacteurs.

Dans le premier numéro, plus de cent vingt Recueils ont été examinés; ce nombre augmentera sans doute dans la suite.

Le plan de la Revue semestrielle est parfaitement conçu, et la compétence des rédacteurs et des collaborateurs est bien connue. Dans ces conditions, le succès est assuré. (P. M. et J. N.)

## NOTES MATHÉMATIQUES.

**7.** *Sur l'hyperbole équilatère.* — Soient $Ox$, $Oy$ les axes d'une hyperbole équilatère, A et A′ les extrémités de l'axe transverse. L'équation $x^2 - y^2 = a^2$, ou $x^2 = y^2 + a^2$, suggère la construction suivante :

*On joint un point quelconque* Q *de* $Oy$ *au sommet* A, *et l'on prend, sur*

(*) Prix de l'abonnement annuel (payable d'avance) 4 florins ou 8 fr. 50. On s'abonne par l'envoi d'un mandat postal à l'adresse de M. Schouten, Amsterdam, Prinsengracht, 264.

*une parallèle à Ox par* Q, *les longueurs* QM = QM′ = QA ; *les points* M, M′ *appartiennent à l'hyperbole.*

Il en résulte ce théorème :

*La circonférence qui passe par les sommets* A, A′ *et par un point quelconque* M *d'une hyperbole équilatère a son centre sur la parallèle à* AA′ *par* M, *et, par suite, sa tangente en* M *est perpendiculaire à* AA′.

Supposons maintenant que l'on construise, dans un plan perpendiculaire à Oy, une circonférence Δ ayant pour diamètre AA′, et considérons le cône qui a pour base Δ, pour sommet un point quelconque M de l'hyperbole. Le plan d'une section antiparallèle du cône est perpendiculaire au plan MAA′ et sa trace sur ce dernier plan doit former un quadrilatère inscriptible avec MA, MA′, AA′; cette trace, d'après le théorème énoncé ci-dessus, est perpendiculaire à AA′. De là, on déduit cette élégante proposition de Steiner (*Œuvres complètes*, t. I, p. 11) :

*Étant donnée une circonférence* Δ, *le lieu des points de vue tels que la perspective de* Δ *sur un plan perpendiculaire à celui de* Δ *soit également une circonférence, est l'hyperboloïde de révolution dont* Δ *est la circonférence de gorge.* (J. N.)

---

## SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

### Question 765.

(Voir *Mathesis*, (2), II, p. 104).

*Au point* P *d'une courbe* Δ *on mène l'ordonnée* PB *et la tangente* PA *rencontrant l'axe* OX *en* A, *la perpendiculaire élevée en* A *sur* PA *coupe* PB *en* M. *Déterminer la courbe* Δ *par la condition que la courbe* (M) *soit symétrique de* Δ *par rapport à l'origine.* (H. Brocard.)

*Solution par* M. Joachimescu. Soit : $y = f(x)$ l'équation de la courbe Δ. L'équation de la tangente en P étant

$$Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x),$$

celle de la perpendiculaire en A sur PA sera

$$Y = -\left(\frac{dx}{dy}\right)\left[X - x + y\frac{dx}{dy}\right].$$

Les coordonnées du point M seront donc :

$$X = x, \quad Y = -y\left(\frac{dx}{dy}\right)^2.$$

L'équation de la courbe (M) sera :

$$Y = -\frac{f(X)}{f'^2(X)}.$$

La symétrique de la courbe donnée par rapport à l'origine a pour équation

$$Y = -f(-X);$$

on doit donc avoir, pour toutes les valeurs de X,

$$f(-X) = \frac{f(X)}{f'^2(X)}; \tag{1}$$

changeant X en $-X$ et multipliant les deux égalités membre à membre, on obtient

$$f'^2(X)\,f'^2(-X) = 1.$$

L'équation $\varphi(x)\,\varphi(-x) = 1$ étant vérifiée par $\varphi(x) = a^x$, nous prenons

$$f'^2(x) = a^x, \quad f'(x) = \pm (\sqrt{a})^x = \pm b^x, \quad f(x) = \pm \frac{b^x}{\log b} + c,$$

$b$ étant une constante arbitraire et $c$ une quantité qu'on détermine au moyen de l'identité (1). On trouve $c = 0$; donc la courbe ayant pour équation $y = \pm \frac{b^x}{\log b}$ satisfait au problème proposé.

*Solution par* M. Ghuys. De la relation (1), où l'on écrit $x$ au lieu de X, savoir :

$$f(-x) = \frac{f(x)}{f'^2(x)}, \tag{2}$$

on déduit

$$-f'(-x) = \frac{f'^3(x) - 2f(x)f'(x)f''(x)}{f'^4(x)},$$

et, à cause de $f'(x)f'(-x) = \pm 1$, en éliminant $f'(-x)$,

$$\frac{\pm 1}{f'x} = \frac{f'^3(x) - 2f(x)f'(x)f''(x)}{f'^4(x)}.$$

On tire de là, en remplaçant $f(x)$ par $y$, l'équation différentielle

$$\pm \frac{1}{y'} = \frac{y'^3 - 2yy'y''}{y'^4},$$

ou $yy'' = 0$, $y'^2 = yy''$. La première équation ne conduit à rien, l'autre donne

$$\frac{y}{y'} = \frac{y'}{y''}, \quad y' = my, \quad y = Ce^{mx},$$

et en substituant dans l'équation (2), on trouve $C = \pm \frac{1}{m}$.

M. R. H. Van Dorsten a aussi résolu la question par un procédé au fond identique au précédent. Il pose $u^2 = f(x) : f(-x)$ et détermine la valeur de $u$.

---

## Question 779.

(Voir *Mathesis*, (2), II, p. 215.)

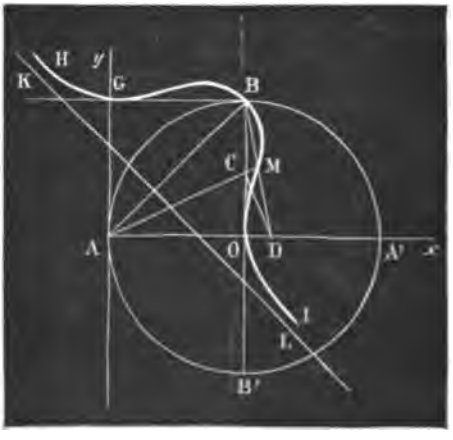
*Soient* AA', BB' *deux diamètres rectangulaires d'un cercle* O. *Une sécante quelconque menée par* A *coupe* BB' *en* C, *la perpendiculaire élevée en* C *sur* AC *rencontre* AA' *en* D. *Trouver le lieu géométrique du point* M, *intersection de* AC *avec* BD.

*En déduire la construction d'un angle dont la tangente soit le carré de la tangente d'un angle donné.* (H. Brocard.)

*Solution par* M. Fraipont (Liége). Prenons pour axes de coordonnées le diamètre AA' et la tangente A$y$. Si $a$ désigne le rayon OA et si $\omega$, $\varphi$ sont les angles OAC, OBD, on a

$$OD = OC \operatorname{tg} \omega = AC \operatorname{tg}^2 \omega,$$
$$OD = OB \operatorname{tg} \varphi;$$

par conséquent $\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg}^2 \omega$. Il est donc facile de construire un angle dont la tangente est égale au carré de la tangente d'un angle donné.




La droite BD passe par le point B $(a, a)$ et a pour coefficient angulaire $-\operatorname{cotg}^2 \omega$; elle a donc pour équation

$$y - a = -\operatorname{cotg}^2 \omega \, (x - a).$$

Si l'on élimine $\omega$ entre cette équation et celle de la droite AC, on trouve pour le lieu de M

$$x^5 + y^5 = a(x^2 + y^2). \tag{1}$$

En coordonnées polaires, on a

$$\rho = \frac{a}{\cos^5\omega + \sin^5\omega}. \tag{2}$$

L'origine A est un point isolé; les tangentes en ce point sont les droites isotropes. La droite AB est un axe de symétrie, car l'équation (1) n'est pas altérée par le changement de $x$ en $y$ et de $y$ en $x$. Une asymptote a pour équation $y = \frac{2}{3}a - x$. Un point d'ordonnée maximum correspond à $x = \frac{2}{3}a$; un point d'ordonnée minimum, à $x = 0$, $y = a$.

Si l'équation d'une courbe est $\rho = [1 : \varphi(\omega)]$, un point d'inflexion satisfait à l'égalité $\varphi(\omega) + \varphi''(\omega) = 0$; en prenant $a\varphi(\omega) = (\cos^5\omega + \sin^5\omega)$, on trouve

$$(\cos\omega + \sin\omega)\ (1 - 2\sin 2\omega) = 0.$$

La solution $\cos\omega + \sin\omega = 0$ donne le point à l'infini sur l'asymptote; la solution proprement dite est $\sin 2\omega = \frac{1}{2}$, d'où $\omega = 15°$ ou $75°$.

Ont résolu la même question Mad. Prime, MM. Morel (Creusot), Denys, Droz, Decamps, Déprez et Mandart.

M. Droz démontre géométriquement que le lieu de M est du troisième ordre : Toute droite BD menée par B contient trois points du lieu, à savoir le point B qui correspond à $\omega = 45°$, et deux points M, M' que l'on obtient en joignant le point A aux points C, C' où la circonférence décrite sur AD comme diamètre coupe BB'. L'existence de l'asymptote se reconnaît immédiatement : si la sécante AC coïncide avec AB', BD se confond avec BA'.

---

### × Question 794.

(Voir *Mathesis*, (2), II, p. 264).

*Si* $A + B + C + D = 2n\pi$, *démontrer la relation*

$$8\cos^4 A - 28\cos^2 A\cos^2 B + 48\cos^2 A\cos^2 B\cos^2 C$$
$$= 4\cos A\cos B\cos C\cos D\,(8\cos^2 A - 2). \quad \text{(Grebnstreet.)}$$

*Solution par* M. Van Dorsten. Comme $A, B, C + D$ sont trois angles dont la somme est égale à $2n\pi$, on a, d'après un théorème connu,

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2(C + D) = 1 + 2\cos A\cos B\cos(C + D).$$

Cette relation donne, si l'on développe $\cos(C+D)$,

$$\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C\cos^2 D+(1-\cos^2 C)(1-\cos^2 D)-1$$
$$-2\cos A\cos B\cos C\cos D=2\sin C\sin D(\cos C\cos D-\cos A\cos B).$$

Élevons les deux membres de cette égalité au carré et remplaçons

$$\sin^2 C,\quad \sin^2 D \quad \text{par} \quad 1-\cos^2 C,\quad 1-\cos^2 D, \text{ etc.}$$

*Solution par* M. Catania. On a

$$\cos(A+B)=\cos(C+D),$$

d'où

$$\cos A\cos B-\cos C\cos D=\sin A\sin B-\sin C\sin D$$
$$=\sqrt{(1-\cos^2 A)(1-\cos^2 B)}-\sqrt{(1-\cos^2 C)(1-\cos^2 D)}.$$

Élevons les deux membres de cette égalité au carré; nous aurons

$$\Sigma\cos^2 A-2=2\sqrt{(1-\cos^2 A)(1-\cos^2 B)(1-\cos^2 C)(1-\cos^2 D)}.$$

Ensuite

$$(\Sigma\cos^2 A-2)^2=$$
$$4(1-\Sigma\cos^2 A+\Sigma\cos^2 A\cos^2 B-\Sigma\cos^2 A\cos^2 B\cos^2 C$$
$$+\cos^2 A\cos^2 B\cos^2 C\cos^2 D), \text{ etc.}$$

---

## × Question 796.

(Voir *Mathesis*, (2) II, p. 264.)

*Résoudre le système*

$$xy(x+y)=ab(a+b),$$
$$yz(y+z)=bc(b+c),$$
$$zx(z+x)=ca(c+a). \qquad \text{(Laisant.)}$$

*Solution par* M. Mandart. Une solution évidente est $x=a$, $y=b$, $z=c$. Pour en trouver d'autres, posons

$$x+y+z=u,\quad xyz=v;$$

Le système prendra la forme

$$\frac{v(u-z)}{z}=ab(a+b),\quad \frac{v(u-x)}{x}=bc(b+c),\ \cdots;$$

on en déduit

$$z=\frac{vu}{ab(a+b)+v},\quad x=\frac{vu}{bc(b+c)+v},\quad y=\frac{vu}{ca(c+a)+v}. \qquad (1)$$

Si l'on fait la somme de ces valeurs, on obtient l'équation

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{ab(a+b)+v} + \frac{1}{bc(b+c)+v} + \frac{1}{ca(c+a)+v}, \qquad (2)$$

qui sert à déterminer $v$. Rendue entière, elle devient

$$2v^3 + v^2 \Sigma ab\,(a+b) - a^2b^2c^2\,(a+b)\,(b+c)\,(c+a) = 0.$$

On sait qu'elle admet la racine $v = abc$; on peut le vérifier en observant que

$$(a+b)\,(b+c)\,(c+a) = \Sigma ab\,(a+b) + 2abc.$$

Les deux autres valeurs de $v$ sont racines de l'équation

$$2v^2 + v\,(a+b)\,(b+c)\,(c+a) + abc\,(a+b)\,(b+c)\,(c+a) = 0.$$

Si l'on multiplie les égalités (1) membre à membre, on trouve

$$u^5 = \frac{[ab(a+b)+v]\,[bc(b+c)+v]\,[ca(c+a)+v]}{v^2}.$$

Le numérateur de la dernière fraction, eu égard à l'égalité (2), est égal à

$$\Sigma v\,[bc(b+c)+v]\,[ca(c+a)+v],$$

de sorte qu'on peut écrire

$$u^5 = \frac{v^2 + 2v\Sigma ab\,(a+b) + abc\Sigma a\,(a+b)\,(a+c)}{v}.$$

Ont résolu la même question MM. Brocard, Delville, Decamps.

---

## Question CCCCXIV.

(N. C. M., t. IV, p. 303; Laisant IV, n° 153, p. 41.)

*Trouver la relation qui existe entre la longueur d'une corde de l'ellipse, les rayons vecteurs*(*) *des deux extrémités et les distances des deux foyers à cette corde. — En déduire que le produit des distances des deux foyers à une tangente à l'ellipse est constant.* (Éd. Lucas.)

*Solution par* M. Barisien. Soit $M_1M_2$ la corde de l'ellipse de longueur

---

(*) M. Barisien prend les demi-diamètres $OM_1$, $OM_2$; la relation qu'on demande est alors *déterminée*. La longueur de la corde $M_1M_2$ et les rayons vecteurs $M_1F$, $M_1F'$, $M_2F$, $M_2F'$ déterminent complètement le quadrilatère $M_1M_2FF'$ et, par suite, chacune des distances de $M_1M_2$ à F ou à F'. (J. N.)

*l*. Désignons par $r_1$, $r_2$ les rayons vecteurs joignant le centre O aux points $M_1$, $M_2$, et par $\delta$, $\delta_1$ les distances des foyers F, F′ à la corde $M_1M_2$.

L'ellipse étant rapportée à son centre et à ses axes, si $y = mx + p$ est l'équation de la corde $M_1M_2$, et si $(x_1, y_1)$ $(x_2, y_2)$ sont les coordonnées des deux points $M_1$, $M_2$, on a

$$l^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = (x_1 - x_2)^2 (1 + m^2).$$

Or, l'équation qui donne les abscisses de $M_1$ et $M_2$ est

$$x^2 (a^2m + b^2) + 2a^2mpx + a^2 (p^2 - b^2) = 0.$$

Par conséquent,

$$x_1 + x_2 = -\frac{2a^2mp}{a^2m^2 + b^2}, \quad x_1x_2 = \frac{a^2(p^2 - b^2)}{a^2m^2 + b^2};$$

$$(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = \frac{4a^2b^2 (a^2m^2 + b^2 - p^2)}{(a^2m^2 + b^2)^2}.$$

Donc

$$l^2 = \frac{4a^2b^2 (1 + m^2) (a^2m^2 + b^2 - p^2)}{(a^2m^2 + b^2)^2}. \qquad (1)$$

D'autre part,

$$\delta = \frac{p + mc}{\sqrt{1 + m^2}}, \quad \delta_1 = \frac{p - mc}{\sqrt{1 + m^2}}.$$

Par conséquent, on a

$$\delta\delta_1 (1 + m^2) = p^2 - m^2c^2.$$

Cette relation peut s'écrire

$$a^2m^2 + b^2 - p^2 = (b^2 - \delta\delta_1) (1 + m^2). \qquad (2)$$

L'égalité (1) devient, en tenant compte de (2),

$$l = 2ab \left(\frac{1 + m^2}{a^2m^2 + b^2}\right) \sqrt{b^2 - \delta\delta_1}. \qquad (3)$$

Exprimons maintenant de deux façons différentes l'aire du triangle $OM_1M_2$.

Soient P la projection de O sur $M_1M_2$ et $\alpha$ l'angle $M_1OM_2$. On a

$$OP \times M_1M_2 = r_1r_2 \sin \alpha.$$

Mais

$$OP = \frac{p}{\sqrt{1 + m^2}}.$$

Donc

$$\frac{p^2 l^2}{1+m^2} = r_1^2 r_2^2 \sin^2 \alpha. \tag{4}$$

Or,

$$l^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2 r_1 r_2 \cos \alpha. \tag{5}$$

En éliminant $\alpha$ entre (4) et (5), on trouve

$$\frac{4 p^2 l^2}{1+m^2} = 4 r_1^2 r_2^2 - (r_1^2 + r_2^2 - l^2)^2. \tag{6}$$

Pour avoir la relation entre $l$, $r_1$, $r_2$, $\delta$ et $\delta_1$, remarquons que l'égalité (2) peut prendre la forme

$$\frac{a^2 m^2 + b^2}{1+m^2} - \frac{p^2}{1+m^2} = b^2 - \delta\delta_1. \tag{7}$$

Or les équations (3) et (6) donnent les valeurs de $\frac{a^2 m^2 + b^2}{1+m^2}$ et $\frac{p^2}{1+m^2}$, qui, portées dans (7), fournissent immédiatement la relation demandée :

$$8abl\sqrt{b^2 - \delta\delta_1} + (r_1^2 + r_2^2 - l^2)^2 - 4 r_1^2 r_2^2 = 4 l^2 (b^2 - \delta\delta_1). \tag{8}$$

Lorsque $l = 0$, c'est-à-dire lorsque la corde est tangente, on a aussi $r_1 = r_2$, et l'équation (8) est identiquement satisfaite.

La relation (3) montre que, dans ce cas, $\delta\delta_1 = b^2$. On retrouve ainsi une propriété connue.

---

## Question DXXXVIII.

(N. C. M., VI, p. 142, 228 et 263; Laisant, IV, n° 282).

*Démontrer que la surface de révolution, représentée par les équations*

$$x = \cos u \cos 2v,$$
$$y = \cos u \sin 2v,$$
$$z = \sin u (\cos v - \cos u \sin v),$$

*n'a qu'une seule face; c'est-à-dire qu'en cheminant sur cette surface, d'une manière continue, on peut, d'un point quelconque, aller à un autre point quelconque.* (R. Hoppe).

*Solution par* M. E. Genty. Si $\xi$, $\eta$ et $\zeta$ sont les orienteurs des axes, $\rho$ le vecteur d'un point de la surface, on aura

$$\rho = \cos u \cos 2v.\xi + \cos u \sin 2v.\eta + \sin u (\cos v - \cos u \sin v)\zeta,$$

et par suite

$$d\rho = \alpha du + \beta dv,$$

en posant

$$\alpha = -\sin u \cos 2v.\xi - \sin u \sin 2v.\eta + [\cos u (\cos v - \cos u \sin v) + \sin u \sin v]\zeta.$$

$$\beta = -2 \cos u \sin 2v.\zeta + 2 \cos u \cos 2v.\eta - \sin u (\sin v + \cos u \cos v)\zeta.$$

Si partant d'un point $(u, v)$ nous faisons croître $u$ et $v$ d'une manière continue jusqu'à ce que $u$ prenne la valeur $2\pi - u$ et $v$ la valeur $\pi + v$, nous reviendrons au point de départ après avoir cheminé d'une manière continue sur la surface. Or, pour ces nouvelles valeurs des paramètres, $\alpha$ et $\beta$ conservent les mêmes modules, mais $\alpha$ change de signe; donc la normale change elle-même de direction, ce qui démontre la proposition.

Note. M. Cremona a fait remarquer (N. C. M., VI, 263) que la surface est engendrée par la révolution autour d'un axe, d'une courbe *variable* de forme; ce n'est donc pas une surface *de révolution* dans le sens ordinaire du mot.

---

## QUESTIONS D'EXAMEN.

**551**[2]. On donne deux circonférences O, O′ et un point P; mener aux deux circonférences deux tangentes parallèles telles que le rapport des distances du point P aux deux tangentes soit égal à un rapport donné $(m : n)$.

*Seconde solution* (voir p. 78). Le J. M. E., dans son n° de mars, p. 67, indique une autre solution, très simple, de ce problème dont l'énoncé est emprunté au petit ouvrage si suggestif de M. Petersen (*Méthodes et théories*, etc., question 139).

Soient $t$, $t'$ les deux tangentes cherchées. Transformons la circonférence O′ et la tangente $t'$ par homothétie, en prenant pour centre le point donné P, pour rapport de similitude $\frac{m}{n}$; la droite $t'$ a pour transformée $t$, la circonférence O′ une circonférence O″ facile à construire. Le problème revient maintenant à mener une tangente commune aux cercles O, O″.

Telle est la solution indiquée par Petersen et retrouvée par M. Ancellin, élève à l'école supérieure d'Amiens.

**552.** On divise la base AB d'un triangle isoscèle CAB en trois parties égales aux points D, E. Si $\alpha$, $x$ désignent les angles ACB, DCE, on a

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{1}{3}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2},\quad \cos x=\frac{4+5\cos\alpha}{5+4\cos\alpha}.$$ (BELLACHI.)

**553.** Soient AEFB, AHIC les carrés construits sur les côtés AB, AC de l'angle droit d'un triangle rectangle ABC; O le point d'intersection des droites BI, CF; AOD la perpendiculaire abaissée de H sur BC. Démontrer les relations

$$\frac{1}{AO}=\frac{1}{AD}+\frac{1}{BC},\quad AB.FC.IO=AC.FO.IB,\quad \frac{IO}{OB}=\frac{(AB+AC)\,AC}{\overline{AB}^2},$$

$$\frac{FO}{OC}=\frac{(AB+AC)\,AB}{AC^2}.$$ (H. VAN AUBEL.)

**554.** Résoudre le système

$$(m-2)x-(m+1)y=3,\quad \frac{x-y}{3}=\frac{(m+2)(m-1)}{(m-2)(m+1)}.$$

Déterminer les limites entre lesquelles $m$ doit être compris pour que $x$ et $y$ soient tous les deux positifs, ou tous les deux négatifs, ou l'un positif et l'autre négatif. *(Certificat d'aptitude à l'enseignement secondaire des jeunes filles, 1892.)*

**555.** Dans un triangle sphérique ABC, l'arc de grand cercle MN qui passe par les milieux M et N des côtés AB et AC détermine sur le troisième côté BC deux points D et E également distants des extrémités B et C de ce côté, de sorte que BD = CE.

**556.** Pour quelles valeurs entières de $n$, l'expression

$$\frac{(n+5)(n+6)}{6n}$$

se réduit-elle à un nombre entier? (BELLACHI.)

L'expression se ramène à

$$\frac{1}{6}\left(n+11+\frac{30}{n}\right);$$

$n$ doit diviser 30, et $n+\frac{30}{n}$ doit être un multiple de 6 plus 1. Donc $n=1, 30, 3, 10$.

**557.** Trouver les côtés d'un triangle isoscèle, connaissant sa surface et la surface totale du cône qu'engendre le périmètre du triangle en tournant autour de la hauteur. Discussion.

(*Baccalauréat*, Montpellier, 1892.)

**558.** Un cône et un cylindre de même hauteur donnée $h$ ont même volume et même surface totale. Trouver les rayons.

(*Baccalauréat*, Nancy, 1892.)

**559.** Dans quel système de numération le nombre $(3457)_{10}$ est-il représenté par 4761?

**560.** Calculer à un millième près le côté du polygone régulier de 24 côtés inscrit dans une circonférence de rayon égal à l'unité.

(*Baccalauréat*, Poitiers, 1892.)

---

## QUESTIONS PROPOSÉES.

***828.** Dans une pile de boulets rectangulaire, quel est le nombre des points de contact de deux boulets? (E. Lemoine.)

**829.** En chaque point M d'une ellipse donnée, on construit le centre de courbure $\mu$ de l'hyperbole homofocale qui passe en M. Trouver le lieu géométrique du point $\mu$. (J. Neuberg.)

**830.** On donne un angle $xOy$ et un point H. Deux droites rectangulaires quelconques, menées par H, coupent $Ox$ en P, P′ et $Oy$ en Q, Q′. On demande de trouver :

1° l'enveloppe de la droite joignant les milieux P″, Q″ des segments PP′, QQ′;

2° le lieu du second point d'intersection des circonférences PHP′, QHQ′;

3° l'enveloppe de la droite joignant les milieux R, R′ des droites PQ, P′Q″;

4° le lieu du milieu de la droite RR′. (J. Neuberg.)

**831.** Si $a$, $b$ sont des nombres entiers, et si $x$, $y$ vérifient la condition $x+y=m$, la quantité

$$m^{b-1}\frac{x^a}{a}-C_{b-1,1}m^{b-2}\frac{x^{a+1}}{a+1}+C_{b-1,2}m^{b-3}\frac{x^{a+2}}{a+2}-\cdots\pm\frac{x^{a+b-1}}{a+b-1}$$
$$+m^{a-1}\frac{y^b}{b}-C_{a-1,1}m^{a-2}\frac{y^{b+1}}{b+1}+\cdots\pm\frac{y^{a+b-1}}{a+b-1}$$

est indépendante de $x$ et de $y$.

Quand $m=1$, la proposition est presque évidente. (E. Catalan.)

***822.** Des équations

$$\sqrt{l \sin A} + \sqrt{m \sin B} + \sqrt{n \sin C} = 0,$$
$$-\frac{\cos^2 \frac{1}{2} A}{l} + \frac{\sin^2 \frac{1}{2} B}{m} + \frac{\sin^2 \frac{1}{2} C}{n} = 0,$$

déduire

$$l \cos^2 \tfrac{1}{2} A = m \sin^2 \tfrac{1}{2} B + n \sin^2 \tfrac{1}{2} C. \qquad \text{(A. C.)}$$

**823.** On considère les extrémités A et B de deux demi-diamètres conjugués quelconques d'une ellipse de centre O. Sur la normale en A, on porte deux longueurs AM = AM′ = OB. On projette le point A sur OM en P, et sur OM′ en P′. On projette de même le point B sur OM en Q et sur OM′ en Q′. Chacun des lieux de P, P′, Q, Q′ est une courbe du sixième ordre. Montrer que la somme des aires de ces quatre courbes est double de l'aire de la podaire du centre de l'ellipse. (E. N. Barisien.)

**824.** En un point M quelconque d'une ellipse donnée, on mène la tangente qui rencontre les axes en T et T′, ainsi que la normale qui rencontre les axes en N et N′. Montrer que : 1° les cercles décrits sur TT′ et NN′ comme diamètres sont orthogonaux ; 2° le point de rencontre de ces cercles, autre que le centre de l'ellipse, a pour lieu géométrique la podaire du centre d'une ellipse ; 3° le cercle de diamètre NN′ enveloppe la podaire du centre d'une ellipse ; 4° la ligne des centres des deux cercles enveloppe une ellipse. (E. N. Barisien.)

***825.** Éliminer $xyz$ entre les équations

$$yz(1-2x) = \alpha^2(1-x), \quad zx(1-2y) = \beta^2(1-y),$$
$$xy(1-2z) = \gamma^2(1-z), \quad x+y+z = 1. \qquad \text{(D. Besso.)}$$

**826.** On donne un point P dans le plan du triangle ABC. Si l'on fait tourner les droites AP, BP, CP autour de A, B, C d'un même angle $\varphi$ et dans un même sens, elles forment un triangle A′B′C′, dont les sommets décrivent des circonférences lorsque $\varphi$ varie, qui reste toujours semblable à lui-même et dans lequel P est toujours son propre homologue. Comment faut-il choisir le point P pour qu'il soit l'orthocentre de A′B′C′, le point de Lemoine, un des points de Brocard, le centre du cercle circonscrit, le centre du cercle inscrit, etc.? Calculer les côtés de A′B′C′ en fonction des éléments du quadrangle ABCP et de l'angle $\varphi$. (Deprez.)

## SUR L'ÉQUATION $(x^2+y^2+z^2)(x'^2+y'^2+z'^2)=u^2+v^2+w^2$ ;

par E. CATALAN (*).

I. Si, dans la célèbre identité d'Euler (**), on suppose $d=0$, $d'=0$, elle se réduit à

$$(a^2+b^2+c^2)(a'^2+b'^2+c'^2)=(aa'+bb'+cc')^2+(ab'-ba')^2+(bc'-cb')^2+(ca'-ac')^2;$$

ou, par un changement de notation, à

$$(x^2+y^2+z^2)(x'^2+y'^2+z'^2)=\mathrm{P}=(xx'+yy'+zz')^2+(xy'-yx')^2+(yz'-zy')^2+(zx'-xz')^2.$$

II. 1° Soient

$$\frac{x}{x'}\gtrless\frac{y}{y'},\quad \frac{y}{y'}\gtrless\frac{z}{z'},\quad \frac{z}{z'}\gtrless\frac{x}{x'}:$$

P *est une somme de quatre carrés.*

2° Soient

$$\frac{x}{x'}=\frac{y}{y'}\gtrless\frac{z}{z'}:$$

P *est une somme de trois carrés.*

3° Soient

$$\frac{x}{x'}=\frac{y}{y'}=\frac{z}{z'}:$$

P *est carré.*

Par conséquent :

*Si deux des rapports*

$$\frac{x}{x'},\quad \frac{y}{y'},\quad \frac{z}{z'},$$

*sont égaux entre eux, et différents du troisième, le produit* P *est, certai-*

---

(*) A l'occasion de la question suivante proposée par M. De Rocquigny (*Mathesis*, 1892, p. (136) : *Si dans l'identité*

$$(a^2+\lambda b^2)(a'^2+\lambda b'^2)=(aa'+\lambda bb')^2+\lambda(ab'-ba')^2,$$

*on remplace* $\lambda$ *par* $c^2+d^2$, *on a une solution de l'équation*

$$(x^2+y^2+z^2)(x'^2+y'^2+z'^2)=u^2+v^2+w^2.$$

(**) *Nouvelles Annales*, 1874, p. 519.

*nement, la somme de trois carrés;* et l'on a une solution de la question proposée (*).

Néanmoins, on ne peut affirmer que ces conditions, *suffisantes*, soient *nécessaires*. Car, dans certains cas, la somme de trois carrés peut être : un carré ; une somme de deux carrés ; une somme de quatre carrés.

Exemples :

$$4+4+1=9,\quad 169+16+9=169+25,\quad 25+4+1=16+9+4+1;$$

$$a^2(ab+c^2)^2+b^2(ab+c^2)^2+c^2(ab-a^2-b^2)^2=$$
$$9a^2b^2c^2+(b^2-c^2)^2a^2+(c^2-a^2)^2b^2+(a^2-b^2)^2c^2;\ \text{etc.}$$

Remarque : La méthode précédente ne donne pas toutes les solutions de l'équation proposée. Ainsi, l'on n'en peut déduire l'identité

$$(9+4+1)(1+1+1)=25+16+1.$$

Liége, 2 avril 1893.

---

## SUR LES DEUX PARABOLES CIRCONSCRITES A UN QUADRANGLE DONNÉ ;

par M. Kluyver, professeur à l'Université de Leyde.

Par les sommets A, B, C, D d'un quadrangle complet, on peut faire passer deux paraboles $P_1$ et $P_2$, réelles ou imaginaires. Nous allons voir comment les paramètres $p_1$ et $p_2$ de ces courbes et l'angle $\varphi$ de leurs axes dépendent du quadrangle donné.

I. Représentons les deux courbes par

$$y^2=2p_1x,\quad ax^2+by^2+c+2fy+2gx+2hxy=0,\quad (ab-h^2=0).$$

Appelons $(x_1, y_1),\dots (x_4, y_4)$ les coordonnées des sommets A, B, C, D, et posons

$$\Sigma y_1=s_1,\quad \Sigma y_1y_2=s_2,\quad \Sigma y_1y_2y_3=s_3,\quad y_1y_2y_3y_4=s_4.$$

La parabole $P_2$ étant circonscrite au quadrangle, il faut qu'on ait

$$as_1=4hp_1,\quad as_2=4p_1^2b+4p_1g,\quad as_3=-8p_1^2f,\quad as_4=4p_1^2c;$$

on peut donc mettre l'équation de $P_2$ sous la forme

$$(4p_1x-s_1y)^2+4s_4-4s_3y+2p_1(4s_2-s_1^2)x=0\dots \qquad (1)$$

---

(*) On peut consulter, relativement à ce sujet : *Sur quelques décompositions en carrés* (Rome, 1887), *Congrès de Rouen* (1883, p. 98) ; etc.

Un calcul connu donne l'équation de l'axe de $P_2$ ; on trouve

$$(s_1^2 + 16p_1^2)(4p_1x - s_1y) + (-4p_1^2s_1^2 + 2s_1s_2 + 16p_1^2s_2) = 0.$$

De là on conclut

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{p_1}{\frac{1}{4}s_1}, \qquad (2)$$

où $\varphi$ est l'angle que l'axe de $P_1$ doit décrire dans le sens positif, pour que sa direction coïncide avec celle de l'axe de $P_2$.

Remarquons que $\frac{1}{4}s_1$ représente en grandeur absolue la distance $h_1$ du centre de gravité G (intersection des droites joignant les milieux des côtés opposés) à l'axe de $P_1$ ; donc

$$\pm \operatorname{tg}\varphi = \frac{p_2}{h_2} = \frac{p_1}{h_1}.$$

Par suite : « Les distances du point G aux axes des paraboles sont proportionnelles aux paramètres ».

Si l'on a $\varphi = 90^0$, il faut que $h_1$ et $h_2$ soient nuls ; le quadrangle est alors inscriptible, les axes de $P_1$ et $P_2$ se coupent en G (théorème connu).

II. Posons maintenant

$$BCD = I_1, \quad CAD = I_2, \quad ABD = I_3, \quad CBA = I_4,$$

ce qui entraîne

$$I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 0.$$

Nous aurons

$$2I_1 = y_2(x_3 - x_4) + y_3(x_4 - x_2) + y_4(x_2 - x_3) =$$
$$-\frac{1}{2p_1}(y_3 - y_4)(y_2 - y_4)(y_2 - y_3),$$

et en vertu des expressions analogues pour $I_2$, $I_3$, $I_4$,

$$I_1I_2I_3I_4 = \frac{1}{256p_1^4}\{(y_1-y_2)(y_2-y_3)(y_3-y_1)(y_1-y_4)(y_2-y_4)(y_3-y_4)\}^2 =$$
$$\frac{1}{256p_1^4}K^2.$$

Dans la relation identique

$$-4\begin{vmatrix} 1, & x_1, & y_1, & x_1^2+y_1^2 \\ 1, & x_2, & y_2, & x_2^2+y_2^2 \\ 1, & x_3, & y_3, & x_3^2+y_3^2 \\ 1, & x_4, & y_4, & x_4^2+y_4^2 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} 0, & (12)^2, & (13)^2, & (14)^2 \\ (21)^2, & 0, & (23)^2, & (24)^2 \\ (31)^2, & (32)^2, & 0, & (34)^2 \\ (41)^2, & (42)^2, & (43)^2, & 0 \end{vmatrix} = \Delta,$$

où les distances AB, etc., sont désignées par (12), etc., nous substituons $x_1 = \frac{y_1^2}{2p_1}$, etc. Cela donne, après quelques réductions,

$$\Delta = -\frac{s_1^2 K^2}{16 p_1^6};$$

la relation (2) peut donc être transformée en celle-ci :

$$\operatorname{tg}^2 \varphi = \frac{16 p_1^2}{s_1^2} = -\frac{256 I_1 I_2 I_3 I_4}{\Delta}, \qquad (3)$$

première relation, par laquelle l'angle $\varphi$ est exprimé par les seules données du quadrangle.

III. Il est naturel d'exprimer $\varphi$ par les angles de la figure. Supposons que A, B, C, D soient les sommets consécutifs d'un quadrangle convexe ordinaire ABCD avec les côtés AB $= a$, BC $= b$, CD $= c$, DA $= d$ et les diagonales BD $= f$, AC $= g$. Nous aurons alors

$$-\Delta = 4a^2c^2b^2d^2 - (a^2c^2 + b^2d^2 - f^2g^2)^2 =$$
$$-4a^2b^2c^2d^2 \sin(A + C) \sin(B + D) \ (*),$$

$I_1 = \frac{1}{2} bc \sin C$, $I_2 = -\frac{1}{2} dc \sin D$, $I_3 = \frac{1}{2} ad \sin A$, $I_4 = -\frac{1}{2} ab \sin B$, et par là

$$\operatorname{tg}^2 \varphi = -\frac{4 \sin A \sin B \sin C \sin D}{\sin(A + C) \sin(B + D)}, \qquad (4)$$

équation symétrique, d'où nous concluons que l'angle $\varphi$ dépend seulement des angles A, B, C, D. On devait s'y attendre, puisque la construction graphique des directions des axes n'exige que la connaissance des directions de deux couples de côtés opposés.

IV. On peut remplacer l'équation (4) par d'autres assez remarquables. Nous allons en signaler encore deux des plus simples. Considérons les cercles BCD, CAD, ABD, CBA, dont nous désignons les centres par $A_1$, $B_1$, $C_1$, $D_1$. Le quadrangle ABCD étant convexe, les centres $A_1$, $B_1$, $C_1$, $D_1$ seront les sommets consécutifs d'un quadrangle convexe $A_1B_1C_1D_1$. La trigonométrie ordinaire donne

$$A_1C_1 = \pm \tfrac{1}{2} f (\cot A + \cot C), \quad B_1D_1 = \mp \tfrac{1}{2} g (\cot B + \cot D),$$

(*) La première expression de $-\Delta$ est le développement du déterminant trouvé ci-dessus; elle représente 16 fois le carré de l'aire du triangle dont les côtés ont pour mesure les produits $ac, bd, fg$; l'angle compris entre les premiers côtés étant égal à A + C ou $\pi$ − A − C, la seconde expression de $\Delta$ s'obtient facilement.

d'où il suit

$$\frac{ABCD}{A_1B_1C_1D_1} = \frac{fg}{A_1C_1 \times B_1D_1} = -\frac{4}{(\cot A + \cot C)(\cot B + \cot D)} = -\frac{4 \sin A \sin B \sin C \sin D}{\sin (A + C) \sin (B + D)},$$

$$\frac{ABCD}{A_1B_1C_1D_1} = \operatorname{tg}^2 \varphi. \tag{5}$$

Comme cas particulier, on a le théorème suivant : « *Lorsque l'aire d'un quadrangle convexe* ABCD *est égale à celle du quadrangle convexe* $A_1B_1C_1D_1$, *qui a pour sommets les centres des cercles* BCD, CAD, ABD, CBA, *les axes des deux paraboles circonscrites à* ABCD *font un angle de 45°*, et réciproquement.

V. D'autres expressions sont obtenues, si l'on fait intervenir les rayons $R_1, \ldots R_4$ des cercles BCD, ..., CBA, et les rayons $R'_1, \ldots, R'_4$ des cercles $B_1C_1D_1, \ldots C_1B_1A_1$, dont nous appelons les centres $A_2, B_2, C_2, D_2$.

On vérifiera sans difficulté les relations suivantes :

$$R_1R'_1 = R_2R'_2 = R_3R'_3 = R_4R'_4 = \cot\varphi \sqrt{R_1R_2R_3R_4} = \operatorname{tg}\varphi \sqrt{R'_1R'_2R'_3R'_4}.$$

D'ailleurs, on démontrera que les quadrangles ABCD et $A_1B_1C_1D_1$, quoique n'ayant pas les angles égaux, ont pourtant le même angle $\varphi$. Il en résulte

$$\frac{A_1B_1C_1D_1}{A_2B_2C_2D_2} = \operatorname{tg}^2 \varphi ;$$

par suite,

$$\frac{ABCD}{A_2B_2C_2D_2} = \operatorname{tg}^4 \varphi .$$

Or les deux figures ABCD et $A_2B_2C_2D_2$ étant semblables, leur rapport de similitude est égal à $\operatorname{tg}^2 \varphi$; conséquemment on peut écrire

$$\frac{BC}{B_2C_2} = \frac{CA}{C_2A_2} = \frac{AB}{A_2B_2} = \cdots = \operatorname{tg}^2 \varphi. \tag{6}$$

VI. Passons maintenant à l'évaluation des paramètres $p_1$ et $p_2$.

De l'équation (1) on déduit par les méthodes ordinaires

$$p_2^2 = \frac{p_1^2 (8s_2 + s_1^2 - 4s_1s_2)^2}{(16p_1^2 + s_1^2)^3}. \tag{7}$$

On pourrait en conclure (en désignant par I l'aire du quadrangle convexe ordinaire ABCD) la relation très symétrique

$$p_1p_2 = \pm\frac{I}{16}\sin^5\varphi\sqrt{\frac{\sin(A+B)\sin(B+C)\sin(C+D)\sin(D+A)}{\sin A\sin B\sin C\sin D}}, \quad (8)$$

mais nous n'insistons pas sur la démonstration, parce que nous avons en vue des formules moins compliquées.

Pour les obtenir, il est nécessaire de chercher les coordonnées des points $A_1, B_1, C_1, D_1$ et de leur centre de gravité $G_1$. Le cercle ABC, représenté par

$$x^2 + y^2 - 2\alpha_1 x - 2\beta_1 y + c = 0,$$

coupe la parabole $P_1$ en quatre points dont les ordonnées sont $y_1, y_2, y_3, -(y_1+y_2+y_3)$. Il n'y a donc aucune difficulté à calculer les coordonnées $\alpha_4, \beta_4$ de son centre. On trouve

$$4p_1\alpha_4 = 4p_1^2 + s_1^2 - s_2 - s_1y_4,$$
$$8p_1^2\beta_4 = s_3 - s_1s_2 + s_1^2y_4 - s_1y_4^2.$$

Un changement des indices donnera les coordonnées des points $A_4, B_4, C_4$, puis celles du centre de gravité $G_4$ $(x_0', y_0')$. Il viendra

$$16p_1x_0' = 4p_1\Sigma\alpha = 16p_1^2 + 3s_1^2 - 4s_2, \quad 16p_1^2y_0' = 4p_1^2\Sigma\beta = 2s_3 - s_1s_2.$$

D'autre part, les coordonnées du point G sont déterminées par

$$16p_1x_0 = 2s_1^2 - 4s_2, \quad 16p_1^2y_0 = 4p_1^2s_1.$$

On en déduit

$$y_0' = y_0 + \frac{2s_3 - 4p_1^2s_1 - s_1s_2}{16p_1^2} = y_0 + \frac{p_1(8s_3 + s_1^2 - 4s_1s_2) - s_1(16p_1^2 + s_1^2)}{64p_1^3},$$

$$x_0' = x_0 + \frac{16p_1^2 + s_1^2}{16p_1}.$$

En tenant compte de l'équation (7), qui donne

$$(8s_3 + s_1^2 - 4s_1s_2) = \frac{p^2}{p_1}(16p_1^2 + s_1^2)^{\frac{3}{2}},$$

et de la relation

$$s_1 = 4p_1\cos\varphi,$$

on trouve facilement

$$x_0' = x_0 + \frac{p_1}{\sin^2\varphi}, \quad y_0' = y_0 + \frac{p_2 - p_1\cos\varphi}{\sin^3\varphi}.$$

De là, on tire

$$(y_0' - y_0)^2 + (x_0' - x_0)^2 = GG_1^2 = \frac{1}{\sin^6 \varphi}(p_2^2 + p_1^2 - 2p_1p_2 \cos \varphi). \quad (9)$$

Telle est la première équation, qui peut servir à définir les paramètres. Nous allons en indiquer une seconde ayant presque la même forme.

Pour cela il nous faut chercher les coordonnées $(\xi, \eta)$ du centre E de l'hyperbole équilatère circonscrite au quadrangle. Cette hyperbole pourra être représentée par

$$16p_1^2x^2 - 16p_1^2y^2 + 4s_4 - 4s_2y + 2p_1x(3s_2 + 16p_1^2) - 8p_1s_1xy = 0,$$

puisque l'équation doit être de la forme

$$k(y^2 - 2p_1x) + (4p_1x - s_1y)^2 + 4s_4 - 4s_2y + 2p_1x(4s_2 - s_1^2) = 0.$$

On en tire, eu égard à l'équation (7), pour les coordonnées du centre

$$\xi = x_0 - \frac{p_2 \cos \varphi + p_1}{\sin^2 \varphi}, \quad \eta = y_0 - \frac{p_2}{\sin \varphi},$$

ce qui donne

$$(\xi - x_0)^2 + (\eta - y_0)^2 = EG^2 = \frac{1}{\sin^4 \varphi}(p_1^2 + p_2^2 + 2p_1p_2 \cos \varphi). \quad (10)$$

Les équations (9) et (10) font connaître les valeurs des paramètres $p_1$ et $p_2$.

Nous ajoutons aux relations précédentes encore la suivante :

$$\operatorname{tg} G_1GE = \frac{p_2^2 - p_1^2}{p_2^2 + p_1^2} \cot \varphi, \quad (11)$$

qui est intéressante, puisqu'elle permet de voir si les deux paraboles circonscrites sont ou ne sont pas égales.

En effet, cette formule donne lieu à l'énoncé suivant : « Un quadrangle complet non inscriptible ABCD étant donné, on considère : 1° le point G, centre de gravité des sommets ; 2° le point $G_1$, centre de gravité des centres des cercles BCD, CAD, ABD, CBA ; 3° le point E, centre de l'hyperbole équilatère circonscrite, point d'intersection des quatre cercles de neuf points (ou bien le point E′ intersection des quatre cercles qui passent par les milieux de trois côtés ayant une extrémité commune) (*). Si les points G, $G_1$ et E (ou bien E′) sont en ligne droite, les deux para-

(*) Voir « *Mathesis*, 1891, sur les quadrangles complets, par M. J. Neuberg, p. 190. »

boles circonscrites au quadrangle seront égales, et dans ce cas la droite $G_1GE$ sera la bissectrice de l'angle $\varphi$ des axes. »

On démontrera facilement la dernière partie de cet énoncé. Pour le quadrangle inscriptible, il y a des modifications. Les axes de $P_1$ et de $P_2$ seront perpendiculaires, leur intersection sera le point G. Le point $G_1$ devient le centre M du cercle circonscrit, et sera constamment, quelle que soit la valeur du rapport $\frac{p_2}{p_1}$, le symétrique de E par rapport à G. La construction des axes se simplifie. Il suffit de mener par G deux droites parallèles aux bissectrices de l'angle que font entre eux deux côtés opposés du quadrangle. On aura maintenant $p_1 = p_2$, si la droite GM fait des angles de 45° avec les axes.

Enfin j'indique encore une formule qui fournit le demi-axe $\rho$ de l'hyperbole équilatère circonscrite en fonction des paramètres $p_1$ et $p_2$. Si $\alpha, \beta, \gamma$ sont les trois angles des trois paires de côtés opposés, on a

$$\pm \rho^2 = 8 p_1 p_2 \cot\alpha \cot\beta \cot\gamma.$$

Quoiqu'elle subsiste quand les paraboles sont imaginaires, elle n'est pas d'usage pratique, parce qu'il sera toujours plus commode de calculer d'abord $\rho^2$ et ensuite $p_1$ et $p_2$.

---

## ×QUESTIONS D'ARITHMOLOGIE,

par M. DE ROCQUIGNY.

1. Le nombre $1 \pm n + n^2$ est la somme de deux triangulaires.

En effet, il est égal à

$$\frac{(n \mp 1)\, n}{2} + \frac{(n \pm 1)(n \pm 2)}{2}.$$

2. Les nombres

$$n^2 + n^3 + n^4, \quad 1 + n + n^2 + n^3 + n^4, \quad 1 + n + n^3 + n^4,$$

sont des sommes de trois triangulaires.

En effet, ils sont égaux à

$$\frac{(n^2+n)(n^2+n \mp 1)}{2} + \frac{n(n \pm 1)}{2} + \frac{n^2(n^2 \pm 1)}{2},$$

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2} + \frac{(n^2+n)(n^2+n-1)}{2} + \frac{n^2(n^2+1)}{2},$$

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2} + \frac{(n^2+n)(n^2+n-1)}{2} + \frac{n^2(n^2-1)}{2}.$$

La même proposition s'applique aux nombres

$$n^3 - n^2 + n^1, \quad 1 - n + n^2 - n^3 + n^4, \quad 1 - n - n^2 + n^4;$$

car il suffit de remplacer $n$ par $-n$.

**3.** Tout bicarré entier est, de deux manières différentes, la somme de deux triangulaires, et aussi une somme de quatre triangulaires.

Car

$$n^4 = \frac{n^2(n^2+1)}{2} + \frac{n^2(n^2-1)}{2} = \frac{(n^2-n)(n^2-n-1)}{2} + \frac{(n^2+n)(n^2+n-1)}{2}$$

$$= \frac{n^2(n^2-1)}{2} + \frac{n^2(n^2-1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2}.$$

**4.** Aucun nombre triangulaire ne peut être une puissance exacte de 2.

**5.** Il n'y a pas de cube parfait dans la suite des nombres triangulaires.

**6.** Le nombre $b^2(a^2 \pm a + 1)$ est la somme de trois triangulaires. En effet,

$$b^2(a^2 \pm a + 1) = \frac{ab(ab \mp 1)}{2} + \frac{(ab \pm b)(ab \pm b \pm 1)}{2} + \frac{b(b-1)}{2}. \quad (1)$$

Ainsi, les nombres

$$3b^2, \quad 7b^2, \quad 13b^2, \quad 21b^2, \quad 31b^2, \quad 43b^2, \quad 57b^2, \quad \ldots$$

sont chacun la somme de trois triangulaires.

**7.** Toute puissance impaire des nombres 3, 7, 13, 21, ... est la somme de trois triangulaires.

En effet, si $n = a^2 \pm a + 1$, l'égalité (1) donne

$$n^{2p+1} = n^{2p}(a^2 \pm a + 1) = \frac{an^p(an^p \mp 1)}{2} + \frac{(an^p \pm n^p)(an^p \pm n^p \pm 1)}{2} +$$

$$\frac{n^p(n^p-1)}{2}.$$

**8.** Les nombres

$$a^{2n} + a^{2n+1} + a^{2n+2}, \quad a^{2n} - a^{2n+1} + a^{2n+2}$$

sont chacun une somme de trois triangulaires.

Cette propriété résulte encore de l'égalité (1): on remplace $b$ par $a^n$.

**9.** Les nombres

$$\frac{a^{2n+1}-1}{a-1}, \quad \frac{a^{2n+1}+1}{a+1}$$

peuvent se développer chacun en une somme de $n+1$ nombres triangulaires. On a

$$1+a+a^2+\cdots+a^{2n-1}+a^{2n}=$$
$$\frac{(a+1)(a+2)}{2}+\frac{(a^2+a)(a^2+a-1)}{2}+\frac{(a^4+a^2)(a^4+a^2+1)}{2}+\cdots+$$
$$\frac{(a^n+a^{n-1})(a^n+a^{n-1}\pm 1)}{2}+\frac{a^n(a^n\mp 1)}{2}.$$

Cette égalité peut se déduire du n° 9.

**10.** On a une solution de l'équation

$$(x^2+y^2-z^2)(x'^2+y'^2-z'^2)=(x''^2+y''^2-z''^2)$$

en prenant

$$x=a-2b,\quad y=2a-b,\quad z=2a-2b,$$
$$x'=a'-2b',\quad y'=2a'-b',\quad z'=2a'-2b',$$
$$x''=aa'\pm bb'-2(ab'\mp a'b),\ y''=2(aa'\pm bb')-(ab'\mp a'b),$$
$$z''=2(aa'\pm bb')-2(ab'\mp a'b)$$

**11.** Tout cube entier est la somme d'un cube, d'un carré et d'un triangulaire.

$$(a+1)^3=a^3+a^2+\frac{(2a+1)(2a+2)}{2},$$

**12.** La différence de deux cubes entiers consécutifs est 1° la somme de trois triangulaires; 2° la demi-somme de trois carrés.

En effet,

$$(a+1)^3-a^3=\frac{(2a+1)(2a+2)}{2}+\frac{a(a-1)}{2}+\frac{a(a+1)}{2}$$
$$=\frac{a^2+(a+1)^2+(2a+1)^2}{2}.$$

**13.** Les nombres $a^2+b^2\pm a$, $a^2+b^2\pm b$ sont chacun la somme de deux triangulaires

$$a^2+b^2\pm a=\frac{(a+b)(a+b+1)}{2}+\frac{(a-b)(a-b\pm 1)}{2}.$$

## BIBLIOGRAPHIE ET REVUE BIBLIOGRAPHIQUE.

**Traité de Mécanique**, à l'usage des élèves de mathématiques élémentaires, des aspirants au baccalauréat de l'enseignement classique (2e série) et au baccalauréat de l'enseignement moderne (3e série) et des candidats à l'institut agronomique, par E. Carvallo, examinateur d'admission à l'École Polytechnique. Paris, Nony, 1893. (In-8°, de III- 154 pages. Prix : fr. 2,50).

Ce livre est écrit spécialement pour la classe de mathématiques élémentaires. Il se compose de deux parties : la partie principale, écrite en gros caractères, traite, en 80 pages, les questions explicitement énoncées dans le programme du baccalauréat; la deuxième partie, imprimée en petits caractères, est formée de compléments intercalés dans le texte.

Une introduction (en petit texte) expose quelques notions de géométrie analytique : Règle des signes des segments appartenant à une même droite, théorie des projections, définition des coordonnées cartésiennes.

Le chapitre I traite de la composition des forces agissant sur un même point et de l'équilibre du point matériel libre; il est terminé par 32 exercices. La règle du parallélogramme des forces est établie au moyen d'un lemme sur des forces égales agissant suivant les côtés d'un losange, à partir de deux sommets opposés.

Le chapitre II contient la composition des forces égales, la théorie des centres de gravité et 66 exercices. L'auteur établit l'existence du centre des forces parallèles en décomposant chaque force suivant deux autres dont les lignes d'action passent par deux points fixes situés sur une parallèle à la direction des forces; cette méthode, qui est peut-être nouvelle, conduit immédiatement à un théorème dû à Leibniz. Dans le petit texte, on donne la théorie analytique de la composition des forces parallèles. La théorie du centre de gravité est exposée avec beaucoup de soin, et renferme un grand nombre d'applications bien développées; les théorèmes de Guldin forment l'objet d'un paragraphe spécial.

Le chapitre III expose la composition des forces appliquées à un corps solide, la théorie des couples, les condition d'équilibre de forces agissant sur un corps libre ou gêné par des obstacles; ces questions sont traitées avec tous les développements géométriques ou analytiques qu'on peut désirer; 30 exercices sont proposés à la fin du chapitre.

Dans le quatrième et dernier chapitre, l'auteur étudie les machines simples: Plan incliné, levier, balances (de précision, de Roberval, romaine, de Quintenz), poulies (mouffles et palans), treuil; 26 exercices terminent cette étude.

Le traité de Mécanique de M. Carvallo se recommande par la clarté et la rigueur, la nouveauté des méthodes, et le choix judicieux des exercices dont les uns sont des applications immédiates des résultats de la théorie et dont les autres, complétant souvent la théorie ou l'exposant sous un jour nouveau, sont très propres à développer le raisonnement mécanique. La lecture de cet ouvrage constitue une excellente préparation à l'étude de la mécanique rationnelle : les élèves de nos Universités belges pourraient le consulter avec beaucoup de fruit. (J. N.)

**L'hyperespace à ($n$-1) dimensions. Propriétés métriques de la corrélation générale,** par G. FONTENÉ, agrégé des sciences mathématiques, professeur au collège Rollin. Paris, Gauthier-Villars et Fils, 1892 (XVIII-133 p. gr. in-8°). Prix : 5 francs.

Le titre de cet ouvrage en indique suffisamment l'objet pour ceux qui se sont occupés de la géométrie non euclidienne considérée comme un chapitre de la théorie des coniques. M. Fontené, au lieu de définir les pseudo-distances et les pseudo-angles par rapport à une quadrique double d'une correspondance par polaires réciproques, observe qu'on peut les définir par rapport aux quadriques des points et des plans doubles d'une corrélation générale et étendre ces notions à un espace analytique à (n — 1) dimensions. Il étudie surtout les propriétés métriques de cette corrélation générale. L'objet de son travail ne rentre pas assez dans le cadre du programme de *Mathesis* pour qu'il soit utile d'en dire davantage.

---

**Éléments de la théorie des fonctions elliptiques,** par JULES TANNERY, Sous-Directeur des Études scientifiques à l'École Normale supérieure, et JULES MOLK, Professeur à la faculté des Sciences de Nancy. Paris, Gauthier-Villars et fils, 1893. Tome I : *Introduction. Calcul différentiel* (1re Partie) ; 1893. (X-246 p. gr. in-8°). Prix : fr. 7,50.

Le sujet traité dans l'ouvrage considérable (il aura quatre volumes) dont MM. J. Tannery et Molk viennent de commencer la publication, est en dehors des sujets abordés ordinairement dans *Mathesis*. Nous nous contentons donc d'en donner la table des matières.

INTRODUCTION. — Chap. I. *Des séries et produits infinis à termes constants.* Séries et produits infinis à simple entrée. Séries à double entrée. Produits infinis à double entrée. — Chap. II. *Des séries et des produits infinis dont les termes dépendent d'une variable.* Définitions et premières propositions. Séries entières en $x$. Séries de séries entières. Continuation des fonctions. Application aux équations différentielles linéaires. — Chap. III. *Fonctions transcendantes entières.* Fonctions exponentielles et circulaires. Théorèmes de M. Weierstrass et de M. Mittag-Leffler. — CALCUL DIFFÉRENTIEL (1re Partie). Chap. I. *Considérations générales sur les fonctions périodiques.* — Chap. II. *La fonction $\sigma u$ et les fonctions qui en dérivent.* Les trois fonctions $\sigma u$, $\zeta u$, $pu$. L'argument augmente de $2\omega_\alpha$. Premières relations entre les fonctions $\sigma u$, $\zeta u$, $pu$, $p'u$. Représentation de $\sigma u$ par un produit infini à simple entrée. Les cofonctions $\sigma_1 u$, $\sigma_2 u$, $\sigma_3 u$. Transformation linéaire des fonctions $\sigma$. Substitution aux périodes primitives de périodes équivalentes. Transformation d'ordre quelconque des fonctions $\sigma$. Substitution aux périodes primitives de périodes nouvelles liées linéairement aux anciennes.

---

## LE CENTENAIRE DE LOBATCHEFSKY (*).

Le 10/22 octobre 1893 est le centième anniversaire de la naissance de l'illustre géomètre russe Nicolas Ivanovitch Lobatchefsky.

Lobatchefsky appartient incontestablement au nombre des savants du XIX^me^ siècle qui ont ouvert de nouvelles voies à la science. On peut dire de lui, avec Clifford, qu'il est « le Copernic de la géométrie. »

Depuis qu'Euclide a fondé l'édifice immortel de la géométrie sur un petit nombre de définitions, d'axiomes et de postulats, la vérité ou plutôt l'harmonie logique de ces bases de la géométrie n'a été l'objet d'aucun doute. Jusqu'à Lobatchefsky, les efforts des savants de tous les pays et de toutes les époques ont tendu uniquement à réduire au minimum le nombre de ces axiomes et postulats; ainsi, on a fait une foule de tentatives pour déduire le postulatum d'Euclide sur la rencontre de la perpendiculaire et de l'oblique à une même droite des autres définitions, axiomes et postulats; la vérité de ce postulatum, même dans le domaine de la géométrie physique, ne semblait pas douteuse.

Lobatchefsky fut le premier qui découvrit la vraie nature logique du postulatum d'Euclide; il arriva à la conviction qu'admettre cette proposition équivaut à admettre certaines propriétés de notre espace, qui ne peuvent être vérifiées qu'au moyen de l'expérience ou de l'observation; il montra la possibilité d'une géométrie indépendante de ce postulatum d'Euclide. Lobatchefsky a réalisé sa pensée dans une série de mémoires avec l'esprit de suite et l'exactitude « d'un vrai géomètre, » comme le disait Gauss, en 1846.

Mais cette approbation de l'illustre mathématicien de Gœttingue a passé inaperçue et il a fallu attendre encore un quart de siècle pour que le grand mérite scientifique et philosophique des travaux de Lobatchefsky fût unanimement reconnu. Cette juste appréciation des recherches du savant professeur russe fut le résultat des études persévérantes de plusieurs géomètres éminents de notre époque, qui ont montré que la géométrie plane de Lobatchefsky est équivalente à la géométrie euclidienne sur une surface à courbure constante et négative, et que sa géométrie solide introduit dans la science la notion nouvelle d'un espace ayant une courbure.

La géométrie de Lobatchefsky et, en général, la géométrie non euclidienne forme une nouvelle branche des mathématiques possédant déjà une riche littérature à laquelle se rattachent les recherches sur les hyperespaces. Celles-ci, tout en jetant une vive lumière sur plusieurs questions de géométrie, sont un auxiliaire qu'on ne peut remplacer que difficilement dans maintes questions difficiles d'analyse.

A la haute valeur scientifique des découvertes de Lobatchefsky correspond leur importance philosophique qui n'est pas moins grande; d'une part, elles permettent d'étudier plus à fond les propriétés de l'espace; d'autre part, elles jettent une vive lumière sur la question de l'origine de nos axiomes géométriques et ont, en conséquence, une grande valeur pour la théorie de la connaissance.

---

(*) Extrait de la circulaire du comité, modifiée par nous. Lobatchefsky est mort le 12/24 février 1856. (P. M.

***

L'Université Impériale de Kasan a eu la gloire d'avoir Lobatchefsky au nombre de ses élèves et de ses membres; Lobatchefsky y a rempli les fonctions de professeur de 1812 à 1846 et celles de recteur de 1827 à 1846. Ce n'est pas seulement comme savant et comme professeur que Lobatchefsky est cher à l'Université de Kasan. L'histoire de la vie et des travaux de Lobatchefsky, dit son biographe, est inséparablement liée à celle de notre Université; il a été le premier de ses élèves qui devint professeur. C'est à lui qu'elle doit la construction de ses principaux batiments et l'organisation de sa bibliothèque.

La Société physico-mathématique de Kasan ne pouvait se dispenser de célébrer dignement l'anniversaire du jour de la naissance du grand mathématicien russe Ayant obtenu l'auguste autorisation d'ouvrir une souscription pour réunir un fonds portant le nom de Lobatchefsky, elle s'adresse maintenant aux savants de tous les pays, aux nombreux amis de la science en les priant de vouloir bien prendre part à cette souscription.

Selon que la somme rassemblée sera plus ou moins élevée, la Société fondera un prix « Lobatchefsky » pour les travaux mathématiques (spécialement pour ceux qui ont trait à la géométrie non euclidienne), ou bien elle érigera un buste de Lobatchefsky dans l'édifice de l'Université.

Si son appel trouve l'accueil qu'elle a le droit d'attendre, la Société physico-mathématique tâchera de réaliser les deux buts, et l'université de Kasan sera embellie par l'image de l'homme qui l'a fait briller d'une gloire immortelle, et les jeunes savants qui consacreront leurs labeurs à la science aimée de Lobatcheffsky trouveront secours et encouragement dans le prix qui portera son nom (*).

A. Vassilief, *Président*, T. Souvorof, *vice-président de la Société Physico-mathématique, professeurs de mathématiques à l'Université de Kasan.*

---

## SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES(**).

### Question 788.

(Voir *Mathesis*, (2), II, p. 240).

*Soient* A, B, C, D *quatre points d'une circonférence. Les perpendiculaires élevées en* A *et* B *sur la corde* AB, *et les perpendiculaires élevées en* C *et* D *sur la corde* CD *forment un parallélogramme. La même construction étant appliquée aux cordes* AC *et* BD *ou aux cordes* AD *et* BC *donne deux autres parallélogrammes. Démontrer que les trois parallélo-*

---

(*) On prie d'envoyer les souscriptions à l'adresse suivante : Kasan, *Société Physico-mathématique*, ou à M. P. Mansion, professeur à l'Université de Gand.

(**) Nous avions oublié de mentionner antérieurement une bonne solution de la question 794, par M. Déprez.

*grammes ont pour centre commun le centre du cercle* ABCD *et que leurs diagonales sont perpendiculaires aux côtés du triangle qui a pour sommets les points de concours des couples de cordes* AB *et* CD, AC *et* BD, AD *et* BC. (A. C.)

*Solution par* M. P. Delville (Liége). 1° Soient(*) M, P les points de rencontre des perpendiculaires élevées en A et D sur AD avec la perpendiculaire élevée en B sur BC, et soient N, Q leurs points de rencontre avec la perpendiculaire menée en C sur BC. Les droites MN, QP étant symétriques par rapport à la perpendiculaire élevée au milieu de AD, elles le sont aussi par rapport au centre O du cercle ABCD; les droites MP, NQ étant, pour une raison analogue, symétriques par rapport à O, O est le centre du parallélogramme MNPQ.

2° Appelons R le point de concours des cordes AD et BC, S celui des cordes BD et AC. Les circonférences décrites sur RP et RN comme diamètres passent respectivement par D et B, A et C. Ces circonférences et la circonférence ABCD ont donc pour axes radicaux DB et AC; par suite, les deux premières ont pour axe radical la droite RS. Cet axe est perpendiculaire à la ligne des centres, et celle-ci est parallèle à NP; donc RS est perpendiculaire à NP.

*Solution par* MM. Droz Farny, Catania *et* Déprez. Soient A', B', C', D' les points diamétralement opposés à A, B, C, D, et soient T, S, R les points de concours des couples de cordes AB et CD, AC et BD, AD et BC. On sait que le triangle RST est autopolaire (conjugué) par rapport au cercle donné; donc le centre O de ce cercle est l'orthocentre du triangle.

Cela posé, l'un des parallélogrammes a pour côtés opposés AD' et DA', BC' et CB'; soient M, Q les sommets (AD', BC'), (DA', CB'). Si l'on applique le théorème de Pascal, d'une part à l'hexagone ABC'CDA', d'autre part à l'hexagone BAD'DCB', on trouve que les points T, P, O sont en ligne droite de même que les points T,N,O. Donc les points N, T, P, O sont sur une même droite, hauteur du triangle RST.

Remarques. Une projection centrale conduit à la proposition suivante:

Soient A, B, C, D quatre points d'une section conique, les droites qui les joignent à un point quelconque O rencontrent la courbe en quatre nouveaux points A', B', C', D'. Les droites AD' et CB' se coupent en un point L, les droites BC' et DA' se rencontrent en un point L'; les points

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

L, L' sont en ligne droite avec le point O, et avec les points de rencontre des cordes AB et CD, A'B' et C'D'.

Un théorème analogue s'applique aux coniques sphériques.

(H. Déprez).

M. Bellens (Anvers) a donné une bonne solution de la même question.

Voici une autre démonstration de la première partie.

Si les perpendiculaires élevées en A sur AB et en D sur DC se coupent en L, et que les perpendiculaires élevées en B sur AB et en C sur CD se rencontrent en L', il est facile de voir que les perpendiculaires élevées sur AB et sur DC en deux points divisant AB et DC dans un même rapport concourent sur la droite LL'. Or, les perpendiculaires élevées aux milieux de AB et DC, puis celles abaissées du point de rencontre des cordes AC, BD sur AB, DC sont dans ce cas; donc, etc. (J. N.)

---

## Question 793.

(Voir *Mathesis*, (2), II, p. 240).

*Quelles sont les courbes dont le cercle de courbure passe par un point fixe.* (H. Mandart.)

Soient O le point fixe, M un point de l'une des courbes cherchées, MN le diamètre du cercle de courbure en M. Si l'on prend le point fixe O pour origine d'un système de coordonnées polaires $r$ et $\theta$, ON et MN seront respectivement la sous-normale et la normale polaires. Par suite, les courbes cherchées sont celles dont la normale polaire est double du rayon de courbure. On a donc, pour l'équation différentielle de ces courbes,

$$\sqrt{r^2+r'^2} = \pm 2\frac{(r^2+r'^2)\sqrt{r^2+r'^2}}{r^2+2r'^2-rr''},$$

ou encore, successivement,

$$2r^2+2r'^2 = \pm(r^2+2r'^2-rr''),\ r^2+rr''=0,\text{ et } 3r^2+4r'^2-rr'',$$

$$r+r''=0,\text{ et } 3\left(1+\frac{r'^2}{r^2}\right)=\frac{rr''-r'^2}{r^2}=\mathrm{D}\frac{r'}{r}.$$

L'intégrale générale de la première de ces équations est

$$r = \mathrm{A}\cos(\theta+\mathrm{B});$$

cette équation représente tous les cercles passant par le point donné.

Cette solution était connue d'avance. L'autre équation peut s'écrire

$$3\,d\theta = \frac{d\left(\frac{r'}{r}\right)}{1+\frac{r'^2}{r^2}},$$

laquelle étant intégrée donne

$$3(\theta + B) = \text{arc tang}\frac{r'}{r}, \quad \frac{r'}{r} = \text{tang } 3(\theta + B),$$

puis, par une seconde intégration,

$$r^3 = \frac{A}{\cos 3(\theta + B)},$$

A et B désignant deux constantes arbitraires.

Cette équation représente des courbes semblables à l'inverse de la rosace à trois feuilles

$$r^2 = \cos 3\theta,$$

par rapport à l'origine. (P. M.)

Autres solutions par MM. H. Brocard et H. Lembourg.

---

## ×Question 797.

(Voir *Mathesis*, (2) II, p. 264.)

***Si dans un polygone inscrit d'un nombre pair de côtés, le produit des côtés de rang pair est égal au produit des côtés de rang impair, on peut inscrire une couronne de cercles tangents, consécutifs et tangents au cercle circonscrit aux sommets du polygone, quel que soit le premier cercle.***

(Ed. Lucas).

*Solution par* M. Sollertinsky. Soit $A_1A_2 \ldots A_{2n}$ le polygone donné. Puisque l'égalité

$$\frac{A_1A_2 \cdot A_3A_4 \ldots A_{2n-1}A_{2n}}{A_2A_3 \cdot A_4A_5 \ldots A_{2n}A_1} = 1 \qquad (1)$$

ne change pas dans l'inversion, on pourrait simplifier la démonstration en prenant un point quelconque de la circonférence donnée O pour centre d'inversion. Mais voici une démonstration directe.

Soit $O_1$ le centre d'un cercle quelconque tangent en $A_1$ à O; on construit successivement les cercles $O_2$, $O_3$ ..., $O_{2n}$ de manière que

chacun d'eux soit tangent au précédent et au cercle donné au sommet correspondant du polygone donné. Il nous reste à démontrer que le dernier cercle $O_{2n}$ touche aussi le premier $O_1$.

Pour fixer les idées, nous supposerons que les cercles O, $O_1$ se touchent extérieurement. On sait que les points $A_k$, $A_{k+1}$ sont alors les points de contact du cercle inscrit au triangle $OO_kO_{k+1}$. Par suite, R, $R_k$, $R_{k+1}$ désignant les rayons des cercles,

$$\sin\frac{O}{2} = \sqrt{\frac{R_k \cdot R_{k+1}}{(R+R_k)(R+R_{k+1})}};$$

d'où

$$A_kA_{k+1} = 2R\sqrt{\frac{R_k \cdot R_{k+1}}{(R+R_k)(R+R_{k+1})}}.$$

On déduit donc, de la relation (1),

$$A_1A_{2n} = 2R\sqrt{\frac{R_1R_{2n}}{(R+R_1)(R+R_{2n})}};$$

d'où

$$\sin\frac{A_1OA_{2n}}{2} = \sqrt{\frac{R_1R_{2n}}{(R+R_1)(R+R_{2n})}}.$$

La supposition que le cercle inscrit au triangle $O_1OO_{2n}$ touche les côtés $OO_1$, $OO_{2n}$ aux points $\alpha_1$, $\alpha_{2n}$ nous conduirait à l'égalité

$$R_1R_{2n} = O_1\alpha \cdot O_{2n}\alpha_{2n};$$

celle-ci est impossible, car les facteurs de l'un de ces produits sont d'une même quantité plus grands que ceux de l'autre. Les points $\alpha_1$, $\alpha_{2n}$ coïncident donc avec $A_1$, $A_{2n}$, et, par suite, le cercle $O_{2n}$ touche le cercle $O_1$.

La même question a été résolue par MM. Soons (Tirlemont), J. Wasteels (Hasselt) et Déprez (Mons).

---

## ×Question 807.

(Voir *Mathesis*, (2), III, p. 32.)

*On a*

$$\frac{1+x}{1-x}x + \frac{1+x^2}{1-x^2}x^4 + \frac{1+x^3}{1-x^3}x^9 + \cdots + \frac{1+x^n}{1-x^n}x^{n^2} =$$

$$\frac{x}{1-x}(1+x^n) + \frac{x^2}{1-x^2}(1+x^{2n}) + \cdots + \frac{x^n}{1-x^n}(1+x^{n^2}).$$

(Baschwitz.)

*Solution par* M. Sollertinsky. Nous représentons cette identité par

$$\Sigma_1^n \frac{1+x^p}{1-x^p} x^{p^2} = \Sigma_1^n \frac{x^p}{1-x^p}(1+x^{np}), \qquad (1)$$

le signe sommatoire s'étendant aux valeurs entières successives de $p$.

Le second membre peut être transformé ainsi :

$$\Sigma_1^n \frac{x^p}{1-x^p}(1+x^{np}) = \Sigma_1^n \frac{x^p}{1-x^p}[1+x^{(n+1)p}-x^{(n+1)p}+x^{np}] =$$

$$\Sigma_1^n \frac{x^p}{1-x^p}[1+x^{(n+1)p}] + \Sigma_1^n x^{(n+1)p};$$

le dernier terme étant égal à

$$x^{n+1}[1+x^{n+1}+x^{2(n+1)}+\cdots+x^{(n-1)(n+1)}] = x^{n+1}\frac{1-x^{n(n+1)}}{1-x^{n+1}} =$$

$$\frac{x^{n+1}}{1-x^{n+1}}[1+x^{(n+1)^2}] - \frac{1+x^{n+1}}{1-x^{n+1}}x^{(n+1)^2},$$

on a

$$\Sigma_1^n \frac{x^p}{1-x^p}(1+x^{np}) = \Sigma_1^{n+1} \frac{x^p}{1-x^p}[1+x^{(n+1)p}] - \frac{1+x^{n+1}}{1-x^{n+1}}x^{(n+1)^2}. \qquad (2)$$

Cela posé, si la formule est vraie pour une certaine valeur de $n$, et qu'on y remplace le second membre par la valeur (2), on obtient, après transposition du dernier terme, la formule (1) avec le changement de $n$ en $(n+1)$; or l'identité proposée se vérifie immédiatement pour $n=1$; donc elle est générale.

---

## ×Question 812.

(Voir *Mathesis*, (2), t. III, p. 56.)

*Soient* A, B, C *les angles d'un triangle*, $\omega$ *l'angle de Brocard. Démontrer que les différences*

$\sin^4 A - \sin^2 B \sin^2 C$, $\sin^4 B - \sin^2 C \sin^2 A$, $\sin^4 C - \sin^2 A \sin^2 B$

*sont proportionnelles aux quantités*

$\cot g\, 2\omega - \cot g\, A$, $\cot g\, 2\omega - \cot g\, B$, $\cot g^2 2\omega - \cot g\, C$.

*Solution par* MM. H. Brocard et Droz Farny. On a, par des formules

connues (voir N. C. M. 1879; A. F., Alger, 1881 et Rouen, 1883; J. S. 1883 et 1885 etc. etc.)

$$\operatorname{cotg} 2\omega = \frac{\Sigma a^4}{4S.\Sigma a^2}, \quad \operatorname{cotg} A = \frac{\Sigma a^2 - 2a^2}{4S},$$

S désignant la surface du triangle. On en déduit;

$$\operatorname{cotg} 2\omega - \operatorname{cotg} A = \frac{a^4 - b^2c^2}{2S\Sigma a^2};$$

ce qui établit la proposition.

*Solution par* MM. W. J. Greenstreet, M. A. Deprez, Droz Farny, Quint *et* M^lle de Haas. On a

$$\cot 2\omega - \cot A = \frac{\cot^2\omega - 1}{2\cot\omega} - \cot A = \frac{(\Sigma \cot A)^2 - 1}{2\Sigma \cot A} - \cot A$$

$$= \frac{(\cot B + \cot C)^2 - \operatorname{coséc}^2 A}{2\Sigma \cot A} = \frac{\sin^4 A - \sin^2 B \sin^2 C}{2\Sigma \cot A \prod \sin^2 A}, \text{ etc.}$$

---

## Question CIV.

(N. C. M., II, p 159, 174; Laisant IV, n° 571, p. 143).

*Soit* M *un point quelconque d'une courbe plane* (C), *soit* P *le point de la podaire de* (C) *qui correspond à* M, O *étant le pôle, soit enfin* $\varepsilon$ *l'angle de contingence de* (C) *et* $d\sigma$ *l'élément de la podaire. On a* $d\sigma = OM.\varepsilon$.

(Catalan).

*Solution par un Abonné.* Cette question est presque classique, et c'est sans doute pour cela qu'aucune solution n'en a été publiée. En voici une qui est tout à fait élémentaire.

Soient M, M′ deux points voisins de la courbe, $M_1$ le point de rencontre des tangentes en M, M′ et P, P′ les points correspondants de la podaire. Les quatre points $M_1$, P, P′, O sont sur une même circonférence de diamètre $OM_1$. Dans le triangle $M_1PP'$, on a

$$\frac{PP'}{\sin PM_1P'} = \frac{M_1P}{\sin PP'M_1} = \frac{M_1P}{\sin POM_1} = OM_1.$$

Si l'on suppose que M′ se rapproche indéfiniment de M, la limite du premier membre est $\frac{d\sigma}{\varepsilon}$; celle de $OM_1$ est OM. Donc $d\sigma = OM.\varepsilon$.

Comparez Catalan, *Mélanges mathématiques*, CXLIX.

---

## Question CCCXXXVIII.

(*N. C. M.*, IV, 125; LAISANT, IV, n° 718, *p.* 184.)

***Une ellipse dont les axes sont connus, tourne dans son plan autour de son centre. Dans chacune de ses positions, on lui mène des tangentes aux points où elle est coupée par deux droites rectangulaires fixes, menées par ce centre. Quel est le lieu du point de rencontre de ces tangentes? On considère en outre, les cordes de contact ainsi déterminées dans l'ellipse, et l'on demande le lieu de leurs intersections successives*** (Concours académique de Lille, 1875).

***Solution par*** M. BARISIEN. 1° Prenons les deux droites rectangulaires fixes comme axes de coordonnées, et soient $a$ et $b$ les longueurs des demi-axes de l'ellipse. L'équation de cette ellipse est

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 1,$$

avec les conditions

$$a^2 + b^2 = \frac{A + C}{AC - B^2}, \quad a^2b^2 = \frac{1}{AC - B^2}. \tag{1}$$

Les tangentes aux points de rencontre de l'ellipse avec les axes de coordonnées ont pour équations

$$Ax + By = \sqrt{A}, \quad Bx + Cy = \sqrt{C}. \tag{2}$$

Le lieu du point de rencontre de ces tangentes s'obtiendra en éliminant A, B et C entre les équations (1) et (2). En résolvant les dernières par rapport à $x$ et à $y$, on trouve

$$x(\sqrt{AC} + B) = \sqrt{C}, \quad y(\sqrt{AC} + B) = \sqrt{A}, \tag{3}$$

d'où

$$\frac{x}{y} = \frac{\sqrt{C}}{\sqrt{A}}.$$

Mais, des égalités (1), on tire

$$AC - B^2 = \frac{1}{a^2b^2}, \quad A + C = \frac{a^2 + b^2}{a^2b^2}.$$

Donc

$$\frac{A}{y^2} = \frac{C}{x^2} = \frac{A + C}{x^2 + y^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2b^2(x^2 + y^2)}.$$

Par suite,

$$A = \frac{y^2(a^2+b^2)}{a^2b^2(x^2+y^2)}, \quad C = \frac{x^2(a^2+b^2)}{a^2b^2(x^2+y^2)}. \tag{4}$$

De la première équation (3), combinée avec la relation

$$AC - B^2 = \frac{1}{a^2b^2},$$

on déduit

$$\sqrt{AC} + B = \frac{\sqrt{C}}{x}, \quad \sqrt{AC} - B = \frac{x}{a^2b^2\sqrt{C}};$$

d'où, par addition,

$$2\sqrt{AC} = \frac{\sqrt{C}}{x} + \frac{x}{a^2b^2\sqrt{C}}.$$

Remplaçant A et C par les valeurs (4), on obtient

$$a^2b^2(x^2+y^2)(x^2+y^2+a^2+b^2)^2 = 4x^2y^2(a^2+b^2)^3.$$

Le lieu demandé est donc une courbe du sixième ordre ; l'origine est un centre et un point isolé.

2° La corde de contact a pour équation

$$x\sqrt{A} + y\sqrt{C} = 1;$$

la distance au centre, si l'on tient compte de (1), est

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{A+C}} = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Cette distance étant constante, la corde de contact enveloppe une circonférence concentrique à l'ellipse. Cette propriété est connue.

---

## QUESTIONS D'EXAMEN.

**561.** Étant donnés un cercle O, de rayon $r$, et deux tangentes parallèles AA′, BB′, on décrit deux autres cercles O′, O″ qui se touchent mutuellement, qui touchent le cercle O et dont le premier est tangent à AA′, le second à BB′. Trouver la relation entre les rayons $r$, $x$, $y$ des trois cercles.

Soient A′, B′ les points de contact des cercles O′, O″ avec les parallèles. On a

$$O'O''^2 \text{ ou } (x+y)^2 = (2r-x-y)^2 + (AA' - BB')^2;$$

mais

$$AA' = 2\sqrt{rx}, \quad BB' = 2\sqrt{ry}; \quad \text{donc} \quad 2\sqrt{xy} = r.$$

**563.** Résoudre le système

$$\operatorname{tg} x = a \operatorname{tg} 2y, \quad \operatorname{tg} y = b \operatorname{tg} 2x.$$

On trouve

$$\operatorname{tg} x = 0 \quad \text{et} \quad \operatorname{tg} x = \pm\sqrt{1 + 2b^2 - 2ab \pm 2b\sqrt{1 + (a-b)^2}}.$$

Discussion.

**564.** Un nombre étant écrit dans le système de numération à base 13, indiquer les caractères de divisibilité par les nombres 3, 4, 7.

**565.** Trouver les formules générales résolvant l'équation

$$x^2 + y^2 = (a^2 + b^2)\, z^2. \tag{1}$$

En écrivant

$$(x + az)(x - az) = (bz + y)(bz - y),$$

on est conduit à poser

$$x + az = \frac{p}{q}(bz + y), \quad x - az = \frac{q}{p}(bz - y),$$

$p$ et $q$ étant deux indéterminées; d'où

$$x = 2bpq + a(p^2 - q^2), \quad y = 2apq + b(q^2 - p^2), \quad z = p^2 + q^2.$$

*Autrement.* Posons $x = az - p$, $y = bz - q$. En substituant dans (1), on trouve successivement

$$z = \frac{p^2 + q^2}{2(ap + bq)}, \quad x = \frac{2bpq + a(p^2 - q^2)}{2(ap + bq)}, \text{ etc.}$$

On peut ensuite négliger les dénominateurs.

**566.** On donne l'angle C d'un triangle ABC et la relation

$$\frac{1}{\sin C} = \frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B}.$$

Trouver A et B; discuter.

---

## QUESTIONS PROPOSÉES.

**827.** On donne deux droites $Ox$, $Oy$ et un point S. Une sécante menée par S rencontre $Ox$ en M, $Oy$ en M'. On construit le triangle SMP directement semblable au triangle SOM'. Le lieu de P est une conique ayant pour foyer S. (*Collège d'Aberystwyth*, Examens de 1892.)

**828.** Si N − 1 et N + 1 sont premiers, le nombre $2N^2 + 2$, somme de deux carrés, est aussi la somme de trois carrés, la somme de quatre carrés, la somme de cinq carrés(*). (E. CATALAN.)

(*) Il y a exception pour N = 2.

×**839.** $x$ étant un arc moindre que $\frac{1}{4}\pi$ démontrer par des considérations élémentaires que

$$\operatorname{tg} x - x < \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3}. \qquad \text{(F. Giudice.)}$$

×**840.** Trouver les valeurs de $y$ et $z$ telles que les polynômes

$$x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 2x + y, \quad x^4 - 3x^3 + 4x^2 + 3x + z$$

aient un facteur commun du second degré.

×**841.** Soient A′, B′, C′ les points où les symédianes d'un triangle ABC rencontrent la circonférence circonscrite; soient V, W les centres isodynamiques. Démontrer que B′ et C′ sont les centres isodynamiques du triangle AVW, et que B, C sont les centres isodynamiques du triangle A′VW. (Sollertinsky.)

**842.** Trouver

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{arc\,tg}(x \sin\theta)\, d\theta. \qquad \text{(Greenstreet.)}$$

×**843.** Sur les arêtes AD, BD, CD d'un tétraèdre ABCD, on prend trois longueurs égales $AA' = BB' = CC' = \lambda$. Trouver le lieu décrit par le point d'intersection des plans BCA′, CAB′, ABC′ lorsque $\lambda$ varie.

**844.** Par le point de rebroussement O d'une cissoïde droite, on mène un rayon vecteur OA. Le cercle de diamètre OA rencontre la cissoïde en un autre point B. La corde AB rencontre la cissoïde en un troisième point C. Montrer que : 1° La corde AB enveloppe une parabole (P) quand le vecteur OA varie; 2° Les tangentes à la cissoïde en A et C se rencontrent sur une ellipse; 3° La perpendiculaire élevée en A à OA enveloppe la parabole (P). (E. N. Barisien).

**845.** Par deux points fixes D, E pris sur le côté AB du triangle de référence ABC, on mène des tangentes à une parabole quelconque inscrite à ce triangle. Trouver le lieu du point d'intersection de ces tangentes. (V. Retali.)

---

**Rectification.** Page 103, question 559, lire 4661, au lieu de 4761.

# SUR LES CONIQUES HOMOFOCALES;

par M. Cl. Servais, professeur à l'Université de Gand.

**1.** Soient $\alpha$ et $\alpha'$, $\beta$ et $\beta'$ les points d'intersection des axes principaux d'un système de coniques homofocales, avec deux droites conjuguées rectangulaires(*), dont l'une $\alpha\alpha'$ passe par un point fixe M. Les ponctuelles décrites par les points $\alpha$ et $\alpha'$ sont perspectives, celles décrites par les points $\alpha$ et $\beta$, ou $\alpha'$ et $\beta'$ sont involutives ; par conséquent les ponctuelles $(\beta)$ et $(\beta')$ sont projectives, et la droite $\beta\beta'$ enveloppe une conique. Cette courbe est d'ailleurs une parabole, car la droite conjuguée rectangulaire du diamètre OM est à l'infini. La droite $\beta\beta'$ est la polaire du point M par rapport à une conique du système homofocal ; la longueur de l'axe $\alpha\beta$ pour cette conique, est égale à $2\sqrt{OM'.O\beta}$, si M' est la projection du point M sur cet axe. Donc : *si une droite tourne autour d'un point fixe, la conjuguée rectangulaire enveloppe une parabole* (P). *Cette parabole est aussi l'enveloppe des polaires du point fixe par rapport au système de coniques homofocales* (Théorème connu).

**2.** Par le point M, menons les deux droites conjuguées rectangulaires MT et MN, elles sont tangentes aux deux coniques homofocales $S_1$ et $S_2$ passant par le point M. La parabole (P) peut être considérée comme l'enveloppe des perpendiculaires abaissées des points de la tangente MT sur leurs polaires respectives par rapport à la conique $S_1$. Cette parabole sera donc tangente à MN au centre de courbure $\mu_1$ de la courbe $S_1$ au point M, et à la droite MT au pôle de MN par rapport à la conique $S_1$. Les mêmes considérations appliquées à la conique $S_2$ montrent que la parabole (P) est tangente à MT au centre de courbure $\mu_2$ de la conique $S_2$ au point M, et à la droite MN au pôle de la droite MT, par rapport à la conique $S_2$. Par conséquent : *Lorsque deux coniques homofocales* $S_1$ *et* $S_2$ *se*

(*) Si d'un point P on mène les tangentes PQ, PQ' à une conique du système homofocal, les bissectrices de l'angle QPQ' et de son supplément adjacent sont des droites conjuguées rectangulaires par rapport à cette conique et à une conique quelconque du système ; elles divisent harmoniquement la distance FF' des foyers. Réciproquement, deux droites rectangulaires qui divisent harmoniquement FF' sont conjuguées par rapport à une conique quelconque du système homofocal.

*coupent en* M, *le centre de courbure de* $S_1$ *au point* M, *est le pôle par rapport à* $S_2$ *de la tangente menée à la conique* $S_1$ *au point* M (*).

**3.** On peut déterminer les points de contact de cette parabole avec les axes du système. Le point $\beta$ sera un de ces points, si la droite $\beta\beta'$ coïncide avec un axe ; c'est-à-dire si $M\alpha$ est perpendiculaire à cet axe. *Les points de contact cherchés sont donc les conjugués, par rapport aux foyers, des projections du point* M *sur les axes.*

Connaissant les points de contact des axes avec la parabole (P), on peut déterminer le point de contact $\mu_1$, de la droite MN avec la même courbe ; on arrive à la construction suivante : *Soient* $M_1$ *et* $M_2$ *les conjugués par rapport aux foyers des projections du point* M *sur les axes*, $N_1$ *et* $N_1'$ *les points où la normale* MN *coupe les mêmes axes, les droites* $M_1N_1'$ *et* $M_2N_1$ *se coupent sur le diamètre passant par le centre de courbure* $\mu_1$.

**4.** Considérons deux droites quelconques $l$ et $l'$ se coupant au point M ; les pôles P, $P_1$, ..., et $P_1$, $P_1'$, ... de ces deux droites par rapport au système homofocal, sont situés sur deux droites $PP_1$ et $P'P_1'$ respectivement perpendiculaires aux droites $l$ et $l'$, et tangentes à la parabole (P). Les droites PP', $P_1P_1'$ ... sont les polaires du point M par rapport au système de coniques ; elles sont donc tangentes à la parabole (P) et les deux ponctuelles P, $P_1$, ... et P', $P_1'$, ... sont semblables. Par conséquent : *Les pôles de deux droites par rapport à un système de coniques homofocales, décrivent deux ponctuelles semblables* (Théorème connu).

**5.** Soient $N_1$ et $N_2$, les points d'intersection des droites MN et MT avec l'un des axes ; les pôles de MT par rapport aux coniques $S_1$ et $S_2$, et par rapport aux foyers situés sur cet axe, sont M, $\mu_1$, $N_1$. Ceux de la droite MN sont $\mu_2$, M, $N_2$. D'après le théorème du N° 4, on a

$$\frac{MN_1}{M\mu_1} = \frac{\mu_2 N_2}{\mu_2 M_2} \quad \text{ou} \quad \frac{MN_1}{M\mu_1} + \frac{MN_2}{M\mu_2} = 1.$$

Donc : *Si en un point* M *commun à deux coniques homofocales,* $N_1$ *et* $N_2$ *sont les points d'intersection des normales avec l'un des axes,* $\mu_1$ *et* $\mu_2$ *les centres de courbure, on a*

$$\frac{MN_1}{M\mu_1} + \frac{MN_2}{M\mu_2} = 1. \qquad (4)$$

Soient $\nu_1$ et $\nu_2$ les milieux des segments interceptés par les axes, sur les

(*) SALMON, *Sections coniques*, p. 642.

deux normales $MN_1$ et $MN_2$; en ajoutant les égalités ($a$) relatives aux deux axes, on obtient

$$\frac{M\nu_1}{M\mu_1}+\frac{M\nu_2}{M\mu_2}=1.$$

6. Le diamètre OM est la directrice de la parabole (P); donc la perpendiculaire abaissée de M sur la droite $\mu_1\mu_2$, et la droite OM sont également inclinées sur la droite MN; par conséquent, si $O_1$ et $O_2$ sont les projections du centre O sur les normales $M\mu_1$ et $M\mu_2$, on a

$$\frac{OO_2}{M\mu_1}=\frac{OO_1}{M\mu_2}.$$

*Les rayons de courbure en un point* M *commun à deux coniques homofocales, sont liés par la relation* $OO_1 . M\mu_1 = OO_2 . M\mu_2$.

7. Soient $a_1$ et $b_1$, $a_2$ et $b_2$ les demi-axes des deux coniques $S_1$ et $S_2$; on a

$$M\mu_1=\frac{a_1^2b_1^2}{\overline{OO_1}^3},\quad M\mu_2=\frac{a_2^2b_2^2}{\overline{OO_2}^3};$$

d'où

$$\frac{M\mu_1}{M\mu_2}=\frac{a_1^2b_1^2}{a_2^2b_2^2}\cdot\frac{\overline{OO_2}^3}{\overline{OO_1}^3}=\frac{a_1^2b_1^2}{a_2^2b_2^2}\cdot\frac{\overline{M\mu_1}^3}{\overline{M\mu_2}^3},$$

donc

$$\frac{M\mu_1}{M\mu_2}=\frac{a_2b_2}{a_1b_1}.$$

*Les courbures en un point commun à deux coniques homofocales, sont proportionnelles aux rectangles des axes.*

Note. La parabole considérée par M. Servais est la même que celle qui nous a servi à démontrer géométriquement un théorème de M. Mennesson (*Mathesis*, p. 77). Le lecteur trouvera quelques développements sur les coniques homofocales, complétant ceux de notre savant collègue de Gand, dans une Note de *Mathesis*, (1), 1, p. 147. (J. N.)

---

## BIBLIOGRAPHIE.

**Les lieux géométriques en géométrie élémentaire**, par M. P. Sauvage, professeur de mathématiques (Saint-Cyr) au lycée de Montpellier. Paris, Gauthier-Villas et fils, 1893. Un vol. in-8° de VII-13 pages. Prix : 3 francs.

L'auteur s'est proposé « de donner aux élèves des idées générales sur les lieux géométriques et de résumer en un petit nombre de méthodes simples, facilement

assimilables, les procédés auxquels la plupart n'arrivent qu'après un temps assez long, par tâtonnements, un peu au hasard ».

L'ouvrage s'adresse à des lecteurs possédant toute la géométrie élémentaire, y compris les courbes usuelles.

Après quelques considérations sur ce qu'on appelle *condition* dans la détermination d'une figure géométrique, l'auteur examine les méthodes générales, réduites à cinq, pour la recherche des lieux géométriques plans; il passe ensuite en revue les lieux géométriques que l'on rencontre dans le cours, et ceux qui s'en déduisent immédiatement; puis développe quelques exemples ou indique certains autres comme application des méthodes générales; enfin, il montre l'usage des lieux géométriques dans les problèmes graphiques.

Le livre de M. Sauvage peut rendre des services aux élèves se préparant aux baccalauréats et aux écoles spéciales. Cependant, il nous a semblé qu'il servirait plutôt à résumer ou à coordonner des connaissances déjà acquises qu'à en faire acquérir beaucoup de nouvelles. (J. N.)

---

**Mathématiques et Mathématiciens.** *Pensées et curiosités, recueillies par* A. Rebière. Deuxième édition revue et augmentée. Paris, Nony (II-566 p. in-8°). Prix : 5 francs.

Un compte rendu de la première édition a paru dans *Mathesis*, 1889, IX, pp. 159-160, et, sous une forme plus détaillée, dans la *Revue des questions scientifiques* (juillet 1889). Tout en émettant quelques critiques de détails, il proclamait l'ouvrage curieux et intéressant.

La seconde édition contient le double de matière. L'auteur a revu son livre avec beaucoup de soin (*) et y a apporté des améliorations notables. Presque toutes les inexactitudes signalées dans les comptes rendus cités plus haut ont disparu et beaucoup de bons extraits nouveaux ont été introduits.

La première partie (175 pages) est formée de morceaux choisis sur les principes, les méthodes, la philosophie, l'enseignement et l'histoire des Mathématiques; ils sont tirés des philosophes, des historiens et surtout des mathématiciens de tous les temps. Il y a là un recueil de pensées fines ou profondes très suggestives, en même temps qu'un grand nombre d'autres où les littérateurs et les philosophes contemporains déraisonnent à plaisir à propos de mathématiques (**).

---

(*) Cependant, certains passages pourraient être supprimés, par exemple le refrain relatif à Sturm et Gerono (p. 329). Dans la liste des membres de l'Institut, Pasteur est oublié.

La liste des Mathématiciens vivants (p. 329) laisse beaucoup à désirer. Pour la Belgique, on aurait dû mentionner MM. Folie, De Tilly, Le Paige, C. Lagrange, Massau, Graindorge, J. Deruyts, etc.; pour la Hollande, MM. Bierens de Haan, Schoute, Kapteyn, etc. M. Rebière continue à dire que le P. Verbiest, le célèbre missionnaire en Chine au 17me siècle, est français, tandis qu'il est belge.

(**) En particulier, aucun ne semble se douter de l'existence de la métagéométrie comme science distincte de la géométrie physique.

Dans la seconde partie (290 pages), nous voyons d'abord la science et les savants à un point de vue familier, biographique et anecdotique; l'auteur nous donne ensuite des paradoxes qui piquent la curiosité et où se trouve souvent un grain de sagesse.

Un bon choix de problèmes « plaisants et délectables » (64 pages) termine l'ouvrage.

La lecture de ces « Mélanges sur les alentours des Mathématiques » est à la fois instructive et amusante; sa place est marquée dans toutes les bibliothèques, car tout le monde peut en tirer parti. Le lecteur ne se fiera, bien entendu, qu'aux mathématiciens proprement dits quand il s'agit de questions de principes, ou d'histoire de la science.

---

H. Vuibert. **Annuaire de la jeunesse.** Année 1892. Paris, Nony (967 pages in-12). Prix : 3 francs.

Recueil extrêmement bien fait « où sont énumérés tous les établissements d'instruction, toutes les écoles du gouvernement, toutes les écoles libres, avec les diplômes, certificats et brevets qu'elles confèrent, avec les carrières dont elles ouvrent l'entrée et les concours où elles aboutissent » (F. Sarcey). Les professeurs belges y trouveront, en particulier, les programmes français d'enseignement. La comparaison avec les nôtres est très instructive et parfois assez humiliante.

---

**Index du répertoire bibliographique des sciences mathématiques,** publié par la commission permanente du répertoire. Paris, Gauthier-Villars et Fils, 1893 (XIV-80 p. in-8°).

**Grondslag van een bibliographisch repertorium der wiskundige wetenschappen.** Naar den franschen tekst bewerkt. Amsterdam, Verluys. 1892 (VIII-108 p. in-8°).

Le Congrès international de bibliographie des sciences mathématiques, réuni à Paris du 16 au 19 juillet 1889, a adopté un certain nombre de résolutions dont les principales sont les suivantes :

1° Il y a lieu de publier un répertoire contenant les titres des écrits mathématiques originaux publiés de 1800 à 1889 inclusivement et des travaux relatifs à l'histoire des Mathématiques de 1600 à 1889 inclusivement; puis des suppléments décennaux à ce répertoire.

2° Ces écrits seront répartis d'après leur objet, *indépendamment des méthodes*, en *classes* désignées par une lettre capitale; les classes seront subdivisées en *sous-classes* désignées par la lettre capitale de la classe affectée d'un exposant; les classes et les sous-classes seront partagées en *divisions* désignées par un chiffre arabe; les divisions en *sections* désignées par une minuscule latine; les sections en *sous-sections* représentées par une minuscule grecque. La notation relative à un écrit mathématique sera notée dans un encadrement rectangulaire. Ainsi

| $L^{1}4b_{\alpha}$ |
|---|

est la notation qui désigne un mémoire traitant des propriétés du lieu géométrique d'un angle droit circonscrit à une conique. En effet L signifie *coniques et quadriques*; $L^1$, *coniques*, $L^14$, *tangentes aux coniques*; $L^14b$, *tangentes aux coniques faisant un angle donné*; la sous section $\alpha$ traite du cas où l'angle est *droit*.

3° Les auteurs ou éditeurs d'écrits mathématiques originaux sont priés d'accompagner le titre de ces écrits de la notation symbolique qui indique leur place dans la classification du répertoire.

La commission du Répertoire a pour président M. H. Poincaré, de l'Institut, pour secrétaire M. d'Ocagne (rue de Vienne, 5, Paris).

L'index du Répertoire dont nous annonçons la publication permet à tous les travailleurs de répondre au vœu du congrès résumé plus haut sous le n° 3. Cet index, sous une apparence aride, contient un grand nombre de renseignements précieux; il porte partout l'empreinte du puissant géomètre qui est le président de la commission du répertoire.

Le texte actuel de l'index est en réalité une seconde édition, plus complète que celle qui a été publiée, en 1889, à l'imprimerie nationale de France. La traduction hollandaise est faite, d'après cette ancienne édition, par la société mathématique d'Amsterdam. Elle contient de plus que les deux éditions françaises, une table alphabétique des matières très bien faite qui facilitera beaucoup les recherches dans l'index actuel et dans le répertoire futur. Pareille table devrait être ajoutée à l'édition française.

Nous essayerons peut-être de classer désormais un certain nombre d'articles de *Mathesis*, d'après le système du Répertoire, comme le font déjà quelques autres journaux moins élémentaires que le nôtre. (P. M.)

---

## NOTES MATHÉMATIQUES.

×8. *Sur les premières propositions concernant le plan* (Lettre de M. J. Delbœuf) « On vient seulement de me communiquer le n° de février de *Mathesis* qui contient une réponse à la question posée par moi : *Démontrer que deux plans ne peuvent pas n'avoir qu'un point de commun.*

« Cette réponse est tirée de la *Géométrie* de Rouché et de Comberousse. Mais elle ne vaut rien. Elle renferme un cercle vicieux. On y suppose démontré ce qui est à démontrer, plus encore autre chose. En effet, si deux plans P et Q n'ont qu'un point de commun A, ils sont tangents en ce point comme peuvent l'être deux surfaces sphériques se touchant soit extérieurement soit intérieurement, ou encore ils sont comme deux surfaces coniques ayant même sommet.

Dans l'un comme dans l'autre cas, toute droite passant par A et

restant dans le plan Q *ne percera pas* le plan P. Or c'est précisément le contraire qu'admettent les auteurs cités au début de leur démonstration : « Supposons, disent-ils, que les droites LAL', NAN', coupent l'une et l'autre le plan P. » Le cercle vicieux est flagrant.

Ils admettent encore que si une droite a deux de ses points de l'un et de l'autre côté d'un plan, cette droite coupe ce plan. Ce serait à démontrer.

En effet, il est bien dit en note de *Mathesis* que la démonstration de Rouché et de Comberousse suppose démontré que *deux droites qui ont un point de commun, se traversent réciproquement*, mais c'est insuffisant. Car il faut démontrer aussi que *deux plans qui ont une droite de commune se traversent réciproquement*, et ne sont pas comme deux surfaces cylindriques ou coniques qui ont une génératrice commune (Mai 1893) (*). »

Rappelons, à propos de la lettre précédente, que M. Delbœuf a publié, dès 1860, un ouvrage étendu intitulé : *Prolégomènes philosophiques de la géométrie et solution des postulats, suivis de la traduction d'une dissertation sur les principes de la géométrie* par Fr. Ueberweg (Paris, Ladrange; Liége, Desoer, XXI-308 pages in 8°), où il agite, sous une forme originale, la plupart des questions qui touchent aux principes de la géométrie euclidienne. Pour apprécier la valeur de ce livre, maintenant souvent cité dans les Revues philosophiques (**), il importe de remarquer qu'il est antérieur à la publication des Mémoires de Riemann, de Beltrami, de Helmholtz, de Schering, de Cayley et de Klein sur les géométries non euclidiennes.

C'est aussi en 1860 que M. de Tilly a publié son premier essai sur le même sujet sous le titre : *Recherches sur les éléments de la géométrie* (Bruxelles, Bruylant-Christophe et C^ie^; Paris, Tanera; 120 pages in-8°). Cet opuscule, qui ne représente d'ailleurs plus que partiellement les idées de l'auteur sur la question si difficile des principes de la science de

---

(*) Nous persistons à croire que les principes rappelés en note, dans l'article cité de *Mathesis*, p. 47, suffisent pour établir tous les points admis par MM. Rouché et de Comberousse, dans leur démonstration. (P. M.)

(**) Voir, par exemple, un article de M. Couturat dans la *Revue de Metaphysique et de Morale* (mai 1893).

l'espace, est aussi un travail original qu'il est utile de signaler à ceux qui s'occupent de l'histoire de la géométrie au 19e siècle. (P. M.)

9. *Une propriété des quadriques homofocales.* Soit

$$\frac{x^2}{a^2-\lambda^2}+\frac{y^2}{b^2-\lambda^2}+\frac{z^2}{c^2-\lambda^2}=1$$

l'équation d'un système de quadriques homofocales. Par tout point M $(x, y, z)$, il passe trois de ces surfaces; les valeurs correspondantes de $\lambda^2$, que nous désignons par $\lambda_1^2$, $\lambda_2^2$, $\lambda_3^2$ sont données par l'équation

$$\lambda^6-\lambda^4(a^2+b^2+c^2-x^2-y^2-z^2)+\lambda^2(\Sigma b^2c^2-\Sigma x^2)(b^2+c^2)$$
$$-a^2b^2c^2+\Sigma b^2c^2x^2=0.$$

On a donc

$$\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2=(a^2+b^2+c^2)-(x^2+y^2+z^2),$$

égalité qu'on peut écrire ainsi :

$$\sum_{1,2,3}[x^2+y^2+z^2-(a^2-\lambda_i^2)-(b^2-\lambda_i^2)-(c^2-\lambda_i^2)]=0.$$

La quantité entre crochets est la puissance de M par rapport à la sphère qui a pour centre l'origine des coordonnées et dont le carré du rayon est égale à la somme des carrés des demi-axes de l'une des quadriques du système homofocal passant par M. Cette sphère, lieu des sommets des trièdres trirectangles dont les trois faces touchent la quadrique, est appelée *sphère de Monge* ou *sphère orthogone*. On peut donc énoncer le théorème suivant, que M. Servais a obtenu récemment comme conséquence de certaines formules qui lui sont propres :

*La somme des puissances d'un point par rapport aux sphères orthogones de trois quadriques homofocales passant par ce point, est nulle.* (J. N.).

×10. *Sur la construction d'une moyenne proportionnelle.* La construction rappelée par MM. Catalan et Lemoine (*Mathesis*, (2), II, pp. 250 et 275; (2), III, p. 32) et que l'on rencontre déjà dans une lettre de Thomas Strode à Wallis, datée du 3 novembre 1684 (Voir *Mathesis*, p. 47), a été indiquée également en 1842 par M. le professeur Kunze de Weimar dans les *Archives de Grunert*, t. II, p. 328 et introduite par lui dans son traité de géométrie.

Nous devons cette communication à l'obligeance de M. Uhlich, professeur à Grimma (royaume de Saxe).

×11. *Note sur la question* 807. En proposant la belle identité due à

M. Baschwitz, j'ai oublié de faire observer qu'elle contient la transformée de la série de Lambert :

$$\frac{x}{1-x}+\frac{x^2}{1-x^2}+\frac{x^3}{1+x^3}+\cdots=\frac{1+x}{1-x^2}+\frac{1+x^2}{1-x^3}x^4+\frac{1+x^5}{1-x^5}x^9+\cdots,$$

trouvée par CLAUSEN (*). (E. CATALAN.)

×12. *Théorème d'arithmétique.* M. Bachwitz a communiqué récemment à M. Catalan le théorème suivant :

*Tout nombre entier qui est une somme de trois carrés, peut se mettre sous la forme d'une somme de quatre carrés fractionnaires.*

Cette proposition peut se déduire de l'identité

$$(a^2+b^2+c^2)(a'^2+b'^2+c'^2)=$$
$$(aa'+bb'+cc')^2+(bc'-b'c)^2+(ca'-c'a)^2+(ab'+a'b)^2.$$

En effet, soit $a^2+b^2+c^2$ le nombre donné. Prenons pour $a'$, $b'$, $c'$ une solution de l'équation indéterminée $a'^2+b'^2+c'^2=x^2$ ; l'identité (**)

$$(m^2+n^2+p^2)^2=(m^2+n^2-p^2)^2+(2mp)^2+(2np)^2$$

montre qu'on peut poser

$$a'=m^2+n^2-p^2,\quad b'=2mp,\quad c'=2np,\quad x=m^2+n^2+p^2,$$

où $m$, $n$, $p$ sont trois nombres entiers quelconques. Nous aurons

$$a^2+b^2+c^2=\left(\frac{\alpha}{x}\right)^2+\left(\frac{\beta}{x}\right)^2+\left(\frac{\gamma}{x}\right)^2+\left(\frac{\delta}{x}\right)^2,$$

où

$$\alpha=a(m^2+n^2-p^2)+2bmp+2cnp,$$
$$\beta=2p(bn-cm),$$
$$\gamma=c(m^2+n^2-p^2)-2anp,$$
$$\delta=2amp-b(m^2+n^2-p^2),$$
$$x=m^2+n^2+p^2.$$ (J. N.)

×13. *Un nouveau quadrateur.* Nous recevons, de Rio de Janeiro, une brochure publiée par le Dr Castro Lopez et portant le titre : *La quadrature du cercle*, avec le motif *Tandem!...* M. Lopez, qui a déjà publié plus d'une trentaine d'ouvrages sur les sujets les plus variés (sur la langue latine, l'homéopathie, la musique, l'agriculture, etc.; neuf pièces de

(*) JACOBI, *Fundamenta nova*, p. 187.

(**) Voir dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1874, p. 521, un article de M. Catalan ; voir aussi *Nouvelle Correspondance*, t. I, p. 169.

théâtre, des poésies, etc.) trouve pour $\pi$ le nombre commensurable 3,145. Sa brochure ne se prêtant à aucune analyse, nous nous contentons de communiquer à nos lecteurs les lignes suivantes qui servent de préambule :

« Un fou de plus! ... vont s'écrier les faux savants; mais ce fou, ce qu'il regrette, c'est de ne pas trouver de termes assez expressifs pour témoigner tout le mépris qu'il voue à ceux qui pousseront une telle exclamation ».

Pour les détails sur quelques devanciers de M. Lopez, nous renvoyons à un intéressant article de M. Catalan dans la *Nouvelle Correspondance*, t. IV., p. 53. Suivant une remarque d'Arago, la *Quadrature du cercle* est une maladie qui sévit, surtout, au printemps.

Faut-il ajouter qu'elle franchit aussi les mers?

×14. *Volume et centre de gravité du prismatoïde* (d'après M. Fretille, J. M. S. 1892, pp. 132-136). Le prismatoïde, dont nous avons donné le volume d'après MM. Halsted et Latars (*Mathesis*, 1885, t. V, pp. 9-10, 74-75) est le polyèdre compris entre deux bases situées dans deux plans parallèles et des faces latérales, triangles ou trapèzes, qui s'appuient à la fois sur les deux bases, ou plutôt des triangles seulement puisque l'on peut diviser les trapèzes en triangles. Considérons une partie du prismatoïde composée d'une pyramide $m$MNP ayant son sommet $m$ dans la base supérieure, sa base étant le triangle MNP situé dans la base inférieure; d'une pyramide $mp$NP, dont le sommet est $m$, et la base un des triangles latéraux (ce triangle a son sommet $p$ dans la base supérieure, sa base NP, dans la base inférieure); enfin d'une pyramide $mnp$N dont le sommet est en N, la base étant $mnp$ situé dans la base supérieure du prismatoïde; $np$ est une parallèle à NP, qui se réduit à un point si le trapèze NP$pn$ se réduit à un triangle.

Le volume de $m$MNP est égal à

$$\frac{H}{3}\cdot \mathrm{MNP} = \frac{H}{6}(\mathrm{MNP} + 4\,\mu\nu'\pi') \qquad (1)$$

H étant la hauteur du prismatoïde, $\mu\nu'\pi'$ la section à mi-hauteur de $m$MNP par un plan parallèle à la base (on suppose $\nu'$ sur $m$P, $\pi'$ sur $m$N).

Le volume de N$mnp$ est de même

$$\frac{H}{3}\cdot mnp = \frac{H}{6}(mnp + 4\,\mu'\nu\pi') \qquad (2)$$

$\mu'\nu\pi'$ étant la section à mi-hauteur de N$mnp$ par un plan parallèle à la base (on suppose $\mu'$ sur $p$N). La pyramide $m$NP$p$ est coupée par ce plan parallèle suivant un parallélogramme $\pi\mu'\nu'\pi'$, tel que l'on a pour le volume de cette pyramide

$$\frac{H}{6}(4\pi\mu'\nu'\pi'). \qquad (3)$$

En ajoutant tous les résultats semblables, on trouve la formule connue pour le volume du prismatoïde :

$$V = \frac{H}{6}(B + b + 4\beta),$$

B étant la base inférieure du prismatoïde, $b$ la base supérieure, $\beta$ la section médiane.

Le centre de gravité de la pyramide (1) est à mi-distance des centres de gravité des triangles MNP et $\mu\nu'\pi'$; celui de la pyramide (2) est aussi à mi-distance des centres de gravité des triangles $mnp$, $\nu\mu'\pi'$; celui de la pyramide (3) se trouve au centre de gravité du parallélogramme $\pi\mu'\nu'\pi'$. On déduit aisément de là que le centre de gravité du prismatoïde est le point d'application de trois forces parallèles appliquées aux centres de gravité de B, $b$ et $\beta$ et proportionnelles respectivement à B, $b$ et $4\beta$.

×15. *Une curieuse coïncidence.* Un corps pesant tombant librement, dans le vide, à Paris, parcourt, pendant la première seconde centésimale (la cent millième partie du jour solaire moyen)

365 centimètres, 5 millimètres, 48 centièmes.

La durée de l'année tropique moyenne est

365 jours, 5 heures, 48 minutes

en laissant de côté les secondes. Cette curieuse coïncidence, qui vient de nous être signalée par M. Mister, a sa place marquée dans la future édition du livre de M. Rebière : *Mathématiques et Mathématiciens*.

---

## Concours de l'École Polytechnique de Paris en 1893.

QUESTIONS PROPOSÉES LE 29 MAI.

I. Étant donnés un plan et deux sphères S, S′ de rayons R et R′, ayant leurs centres dans ce plan, on considère une sphère variable Σ, tangente aux deux premières et au plan. On demande :

1° Le lieu géométrique du point de contact de la sphère Σ avec le plan donné.

2° le lieu géométrique du centre de la sphère Σ.

II. On donne deux sphères de centres C, C′ et un cône de révolution de sommet O, dont l'axe est perpendiculaire au plan COC′; le triangle COC′ est rectangle en O. On demande :

1° de former les équations du lieu des centres des sphères tangentes au cône et aux deux sphères données;

2° de discuter la nature de ce lieu dans le cas où le triangle rectangle COC′ devient isoscèle, où les sphères données sont égales et où, de plus, la sphère variable touche les sphères données toutes deux extérieurement, ou toutes deux intérieurement.

---

## SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

### Question 792.

(Voir *Mathesis*, (2), II, p. 240 et III, p. 120.)

*Quelles sont les courbes dont le cercle de courbure passe par un point fixe?* (MANDART.)

*Solution par* M. GOB. La solution donnée dans le dernier numéro est trop générale. L'équation

$$\sqrt{r^2+r'^2} = -2\frac{(r^2+r'^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2+2r'^2-rr''},$$

exprime que la normale polaire est double du rayon de courbure, mais dirigée en sens contraire(*). Par suite, l'équation

$$r^3 = \frac{a}{\cos 3\theta}$$

---

(*) Par suite, elle ne répond pas à la question proposée, mais la question : trouver la courbe telle que $2\rho = N$. Celle-ci conduit à l'équation $\pm 2\frac{ds}{d\alpha} = \frac{ds}{d\theta}$, $\alpha$ étant l'angle de la tangente avec l'axe polaire. Si $s$, $\theta$, $\alpha$ varient dans le même sens, on prend le signe +, ce qui donne $d\alpha = 2d\theta$; d'ailleurs $d\alpha = d\theta + du$, $u$ étant l'angle du rayon vecteur avec la tangente; par suite, $du = d\theta$, ou $\theta = u + C$, ce qui conduit à l'équation du cercle. Si $\alpha$ varie en sens inverse de $s$ et $\theta$, il faut prendre le signe −, ce qui donne $du = -3d\theta$, etc. Cette remarque nous a été communiquée par M. Mister. Comparez *Mathesis*, (1), II, 102, 164 où M. Brocard s'occupe de questions analogues. (P. M.)

représente une courbe telle que le symétrique du cercle de courbure par rapport à la tangente passe par un point fixe. Au surplus, cette courbe est composée de trois branches hyperboliques dont la *convexité* est tournée vers le pôle.

Voici une solution géométrique de la question. Désignons par $\gamma$ une courbe dont tous les cercles de courbure passent par un point fixe O; par $\gamma'$ sa transformée par rayons vecteurs réciproques, le pôle de la transformation étant placé en O. Tous les cercles osculateurs de $\gamma$ passant par O, tout point de $\gamma'$ sera un point d'inflexion(*), ce qui est impossible à moins que $\gamma'$ ne soit une droite. Donc il n'existe pas d'autre courbe que le cercle, jouissant de la propriété que tous ses cercles osculateurs passent par un point fixe.

La question de M. Mandart peut se rattacher à la proposition suivante : ***Les cercles osculateurs à une courbe $\gamma$ n'ont pas d'autre enveloppe que cette courbe elle-même.***

Ce théorème est presque évident. Pour le démontrer, soient $\omega$, $\omega'$ les centres de courbure en deux points infiniment voisins de $\gamma$; soient A un point de rencontre des deux cercles de courbure, B la projection de A sur la droite $\omega\omega'$, $\rho$ et $\rho'$ les rayons de courbure. On a, en désignant par $d$ la distance $\omega\omega'$ et en supposant $\rho > \rho'$,

$$\rho^2 = \rho'^2 + d^2 + 2d.\omega'B;$$

d'où

$$\omega'B = \frac{\rho'^2 - \rho^2 + d^2}{2d} = (\rho' + \rho)\frac{\rho' - \rho}{2d} + \frac{d}{2}.$$

Comme $\rho' - \rho$ est égal à l'arc $\omega\omega'$ de la développée, $\lim \frac{\rho' - \rho}{d} = 1$; par suite, en passant à la limite, on trouve $\omega B = \rho$. On en conclut que lorsque $\omega'$ tend vers $\omega$ le point d'intersection des deux cercles a pour limite le point d'osculation du cercle $\omega$; ce point appartient donc à l'enveloppe.

Remarques. I. L'inversion peut servir à démontrer des théorèmes analogues au précédent. Par exemple, *il n'existe pas de courbe* (en dehors

(*) Dans la transformation par rayons vecteurs réciproques, un cercle osculateur se change généralement en un cercle osculateur de la transformée; s'il passe par le pôle, il se change en une droite osculatrice, c'est-à-dire en une tangente d'inflexion.

de la circonférence) *dont les cercles osculateurs coupent orthogonalement un cercle fixe* C. Car si l'on prend pour pôle d'inversion un point du cercle fixe C, celui-ci se transforme en une droite $c$ qui coupe orthogonalement les cercles osculateurs de la transformée de la courbe donnée ; cette transformée aurait donc pour développée la droite $c$.

II. De même, *les cercles osculateurs d'une courbe* $\gamma$ *ne peuvent couper sous un angle constant* $\lambda$ *un cercle fixe* C. En effet, si l'on prend pour pôle d'inversion un point de C, les cercles osculateurs de $\gamma$ ont pour inverses les cercles osculateurs de la transformée $\gamma'$ de $\gamma$; ces derniers cercles couperaient donc sous l'angle $\lambda$ la droite $c$, inverse de C. On démontre facilement que ceci est impossible. Car, soient $\omega$ et $\omega'$ les centres de courbure en deux points de $\gamma'$ infiniment rapprochés, $\beta$ et $\beta'$ leurs projections sur $c$, $\alpha$ et $\alpha'$ les points où les cercles de courbure $\omega$, $\omega'$ rencontrent $c$ ; l'arc $\omega\omega'$ de la développée de $\gamma'$ étant égal à la différence des rayons de courbure $\omega\alpha$, $\omega'\alpha'$, et les angles de $\omega\alpha$, $\omega'\alpha'$ avec $c$ étant égaux à $\frac{1}{2}\pi - \lambda$, on a

$$\lim \frac{\omega\omega'}{\omega\alpha - \omega'\alpha'} = 1, \quad \text{ou} \quad \lim \frac{\omega\omega' \cos\lambda}{(\omega\beta - \omega'\beta')} = 1;$$

il en résulte

$$\cos\lambda = \lim \frac{\omega\beta - \omega'\beta'}{\omega\omega'} = \cos t\omega\beta,$$

$\omega t$ étant la tangente au point $\omega$ de la développée de $\gamma'$. Donc toutes les tangentes de cette développée seraient parallèles entre elles.

---

## ×Question 793.

(Voir *Mathesis*, (2), II, p. 263.)

*Étant donné un triangle* ABC, *soient* AI, BI, CI *les bissectrices intérieures. Soient* $B_a$, $C_a$ *les projections de* B, C *sur* AI ; $C_b$, $A_b$ *celles de* C, A *sur* BI ; $A_c$, $B_c$ *celles de* A *et* B *sur* CL. *Démontrer :* 1° *que les droites* $A_bA_c$, $B_cB_a$, $C_aC_b$ *forment un triangle ayant pour sommets les milieux des côtés de* ABC ; 2° *que les droites* $B_cC_b$, $C_aA_c$, $A_bB_a$ *forment un triangle ayant pour sommets les points de contact de* BC, CA *et* AB *avec le cercle inscrit.* (Mandart.)

*Solution par* M. P. Delville. 1° La droite $A_bA_c$ passe par les milieux des côtés AB et AC ; car le quadrilatère $AA_bIA_c$ étant inscriptible, l'angle

$$IA_bA_c = IAA_c.$$

Or

$$IAA_c = CAA_c - CAI = 90^\circ - \tfrac{1}{2}C - \tfrac{1}{2}A = \tfrac{1}{2}B,$$

donc

$$IA_bA_c = \tfrac{1}{2}B.$$

Soient M, N les points où $A_bA_c$ coupe AB, AC. L'angle IBM vaut aussi $\frac{1}{2}B$, donc le triangle $BMA_b$ est isoscèle, et $BM = MA_b$. De même, $AM = MA_b$, donc M est le point milieu de AB. On démontre de même que N est le milieu de AC.

2° La droite $B_cC_b$ passe par les projections D, E de I sur AB, AC. Menons $B_cD$; il nous faut démontrer que les angles $BB_cD$ et $BB_cC_b$ sont supplémentaires.

Si, sur BI comme diamètre, je décris une demi-circonférence, elle passe par $B_c$ et par D; on a donc

$$BB_cD = BID = 90^\circ - \tfrac{1}{2}B. \qquad (1)$$

Si sur CB comme diamètre, je décris une demi-circonférence, elle passe par $C_b$ et par $B_c$; le quadrilatère $BB_cC_bC$ est donc inscriptible et l'on a

$$BB_cC_b = 180^\circ - BCC_b.$$

Or

$$BCC_b = 90^\circ - \tfrac{1}{2}B;$$

donc

$$BB_cC_b = 90^\circ + \tfrac{1}{2}B. \qquad (2)$$

Ajoutant (1) et (2), on a

$$BB_cD + BB_cC_b = 180^\circ,$$

les trois points $C_b$, $B_c$ et D sont donc en ligne droite. Il en est de même de E, $C_b$, $B_c$ : donc etc.

Ont résolu la même question MM. François (La Haye), Bellens (Anvers), Catania, Decamps, Jerabek, Delahaye, Droz-Farny, Labenne, Soons, Listray et Déprez.

M. Déprez accompagne sa solution des remarques suivantes :

1° Si $A'_b$, $A'_c$ sont les projections de A sur les bissectrices extérieures des angles ABC, ACB, les points $A_b$, $A_c$, $A'_b$, $A'_c$ sont en ligne droite avec les milieux des côtés AB, AC; 2° le triangle formé par les droites $B'_cC'_b$, $C'_aA'_c$, $A'_bB'_a$ a mêmes sommets que le triangle formé par les cordes de contact des angles A, B, C avec les cercles exinscrits correspondants.

M. Déprez examine aussi la figure analogue sur la sphère.

### ×Question 804.

(Voir *Mathesis*, (2), III, p. 31.)

*Quelle que soit la base du système de numération, aucun des nombres représentés par* 10101, 101010101, 1010101010101... *n'est premier.*

(E. CATALAN.)

*Solution par* MM. C. BERGMANS, A. BOUTIN, DROZ-FARNY, SOONS, LISTRAY, FAUQUEMBERGUE, P. DELVILLE *et par* UN ABONNÉ. — $a$ étant la base du système, le nombre le plus général ayant la forme indiquée sera :

$$N = 1 + a^2 + a^4 + \cdots + a^{4n} = \frac{a^{4n+2} - 1}{a^2 - 1}.$$

On a donc

$$N = \frac{a^{2n+1} - 1}{a - 1} \cdot \frac{a^{2n+1} + 1}{a + 1}$$

$$= (1 + a + a^2 + \cdots + a^{2n})(1 - a + a^2 \cdots - a^{2n-1} + a^{2n}).$$

Ce qu'il fallait démontrer.

Si $b$ est le dernier chiffre significatif, en sorte que $b = a - 1$, les décompositions des nombres considérés sont :

$$111 \times b1, \quad 11111 \times b0b1, \quad 1111111 \times b0b0b1, \text{ etc.}$$

---

### Question 819.

(Voir *Mathesis*, (2), III, p. 78.)

*Étant donnés un cercle* O *et un point* A *sur la circonférence, on mène une corde quelconque* AB, *que l'on prolonge de* BL = AB ;

1° *Trouver l'enveloppe de la circonférence* M *décrite sur* BL *comme diamètre.* 2° *Donner une construction géométrique des points* P, R *où la circonférence* M *touche son enveloppe.* 3° *Chercher le lieu du point de rencontre* N *des tangentes menées en ces points* P, R. 4° *Déterminer l'enveloppe de la ligne* MN. 5° *Trouver l'enveloppe de l'axe radical de la circonférence* M *avec celle que décrit son centre.* (H. MANDART.)

*Solution par* M. GOB, *professeur à l'athénée de Hasselt.* Prenons pour axes le diamètre et la tangente en A. Désignons par R le rayon OA et par $\theta$ l'angle MAO. On aura :

$$AB = 2R\cos\theta, \quad AM = 3R\cos\theta.$$

Les coordonnées du point M seront donc :

$$x = 3R\cos^2\theta, \quad y = 3R\sin\theta\cos\theta ;$$

le rayon

$$BM = \frac{AB}{2} = R\cos\theta,$$

et l'équation du cercle M sera :

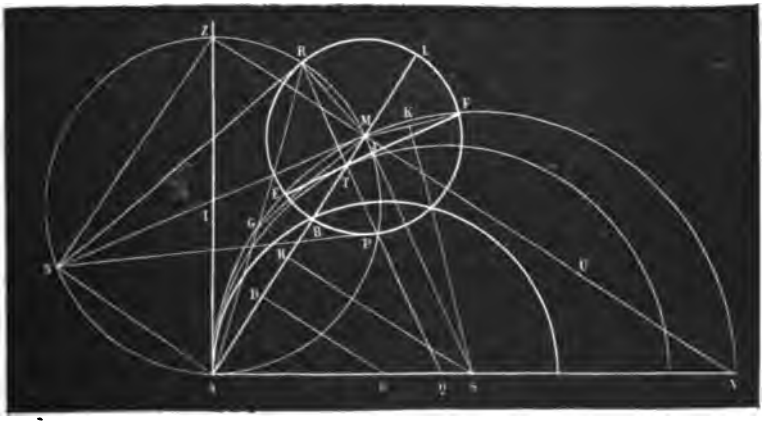
$$x^2 + y^2 - 6Rx\cos^2\theta - 6Ry\sin\theta\cos\theta + 8R^2\cos^2\theta = 0, \qquad (1)$$

ou

$$x^2 + y^2 - 3Rx + 4R^2 = (3Rx - 4R^2)\cos 2\theta + 3Ry\sin 2\theta. \qquad (2)$$

Dérivons cette équation par rapport à $\theta$ :

$$0 = -(3Rx - 4R^2)\sin 2\theta + 3Ry\cos 2\theta. \qquad (3)$$



Élevons les équations (2), (3) au carré et ajoutons-les membre à membre ; il vient

$$(x^2 + y^2 - 3Rx + 4R^2)^2 = (3Rx - 4R^2)^2 + 9R^2y^2$$

ou

$$(x^2 + y^2)^2 - 2R(x^2 + y^2)(3x - 4R) = 9R^2y^2,$$

ou encore,

$$(x^2 + y^2 - 3Rx)^2 = R^2(x^2 + y^2).$$

En passant aux coordonnées polaires, on trouve

$$\rho^2 - 3R\rho\cos\omega = \pm R\rho, \text{ ou } \rho = 3R\cos\omega \pm R,$$

équation d'un limaçon de Pascal. Le cercle directeur a pour rayon $\frac{1}{3}$ R et le point double est en A.

2° L'équation (3) représente une droite passant par les points de contact du cercle M avec son enveloppe. Cette droite passe par le point fixe $x = \frac{1}{3}R$, $y = 0$. De plus son coefficient angulaire est $tg\,2\theta$; donc elle est perpendiculaire à la tangente menée par B au cercle O. D'où la construction :

*Du point* Q, *situé sur* AO *à une distance de* A *égale à* $\frac{1}{3}$ AO, *abaissons une perpendiculaire sur la tangente en* A *au cercle* O. *Cette droite rencontrera le cercle* M *aux points de contact* P, R.

3° Soient $x_1$, $y_1$ les coordonnées de N; l'équation de la polaire de ce point par rapport au cercle M sera

$$xx_1 + yy_1 - 3R(x+x_1)\cos^2\theta - 3R(y+y_1)\sin\theta\cos\theta + 8R^2\cos^2\theta = 0.$$

Identifions-là avec l'équation (3). Il viendra

$$\frac{x_1 - 3R\cos^2\theta}{6\sin\theta\cos\theta} = \frac{y_1 - 3R\sin\theta\cos\theta}{3(\sin^2\theta - \cos^2\theta)} = \frac{3x_1\cos^2\theta + 3y_1\sin\theta\cos\theta - 8R\cos^2\theta}{8\sin\theta\cos\theta}.$$

Désignons par K chacun de ces rapports; les deux premiers donneront :

$$x_1 = 3R\cos^2\theta + 6K\sin\theta\cos\theta, \quad y_1 = 3R\sin\theta\cos\theta + 3K(\sin^2\theta - \cos^2\theta).$$

Substituons ces valeurs dans le 3° rapport; nous aurons après réductions,

$$K = -R\cot g\,\theta,$$

d'où

$$x_1 = -3R\cos^2\theta, \quad y_1 = 3R\frac{\cos^3\theta}{\sin\theta}.$$

Éliminons $\theta$ et nous aurons :

$$-x_1(x_1^2 + y_1^2) = 3Ry_1^2, \quad \text{ou} \quad y_1^2 = -\frac{x_1^3}{3R + x_1},$$

équation d'une cissoïde dont l'asymptote a pour équation $x = -3R$.

4° Connaissant les coordonnées des points M, N, on trouve, pour l'équation de la droite MN,

$$y\sin 2\theta + x\cos 2\theta - 3R\cos^2\theta = 0,$$

ou

$$\left(x - \frac{3R}{2}\right)\cos 2\theta + y\sin 2\theta = \frac{3R}{2}.$$

équation d'une droite dont la distance au point $(\frac{3}{2}R, 0)$ est égale à $\frac{3}{2}R$.

On en conclut que l'enveloppe est le cercle S, dont le centre a pour

coordonnées $x = \frac{5}{3}R$, $y = 0$ et dont le rayon est égal à $\frac{5}{3}R$. Ce cercle est donc le lieu géométrique du point M.

5° Le cercle S ayant pour équation

$$x^2 + y^2 - 3Rx = 0,$$

l'axe radical des cercles M et S est représenté par

$$3Rx - 3Rx + 4R^2 = (3Rx - 4R^2)\cos 2\theta + 3Ry \sin 2\theta,$$

ou

$$\left(x - \frac{4}{3}R\right)\cos 2\theta + y \sin 2\theta = \frac{4}{3}R;$$

on voit que la distance de cet axe au point $(\frac{4}{3}R, 0)$, c'est-à-dire au point Q, est égale à $\frac{4}{3}R$. L'enveloppe est donc le cercle décrit de Q comme centre avec QA comme rayon.

*Solution géométrique.* 1° et 2°. Soit T le conjugué harmonique de A par rapport à BL. On aura

$$BT = \frac{AB}{3}, \quad AT = \frac{4AB}{3}.$$

Menons par T une parallèle à BO ; elle coupera AO en un point Q tel, que

$$AQ = \frac{4AO}{3},$$

et le triangle AQT sera isoscèle. La circonférence décrite de Q comme centre avec QA comme rayon, passera donc par T et divisera harmoniquement le diamètre BL; elle sera donc orthogonale au cercle M. Les cercles M sont donc de puissance constante, égale à $\overline{QA}^2$, par rapport au point Q. Il résulte de là que l'axe radical de deux quelconques de ces cercles passe par Q. Par conséquent, la droite joignant les points d'intersection P, R de deux cercles M, infiniment rapprochés, passe par Q. On retrouve donc la construction donnée plus haut pour les points P, R.

Soit I le point de rencontre des tangentes en A et en M au cercle S, lieu géométrique du point M. On a $QP.QR = \overline{QA}^2$ ; donc la circonférence décrite de I comme centre avec IA comme rayon passe par P, M, R ; ce qui donne une seconde construction des points P, R.

Soient G le point de rencontre de la droite AR avec le cercle S, D la la projection de O sur AB. Le triangle RMG est rectangle et égal au triangle ADO. En effet, les angles MRG et MAO ont même mesure dans

le cercle I ; les angles MGR et IAB ont même mesure dans le cercle S, et l'on a MR = AD. On en conclut que RG = AO ; par suite, le lieu de R est un limaçon de Pascal dont le cercle directeur est le cercle S.

3° La droite MN étant perpendiculaire à QP, le sera aussi à MS et sera, par suite, tangente au cercle S.

4° Le cercle I passant par M, P, R passera aussi par N ; le point N s'obtient donc en prolongeant la tangente MI au cercle S d'une longueur IN = IA. Je dis que le lieu de N est une cissoïde. En effet, portons sur AI une longueur IZ = IA. La figure ANZM sera un rectangle et ZM passera par l'extrémité V du diamètre OA du cercle S. Si l'on porte sur VZ une longueur VU égale à AN, on aura VU = MZ ; par conséquent, le lieu de U est une cissoïde dont le cercle générateur est le cercle S. Le lieu de N s'obtiendra donc en transportant cette cissoïde parallèlement à AO d'une longueur égale à 3AO.

5° Soit EF l'axe radical des cercles M et S ; je dis que EF passe par T. En effet, désignons provisoirement par X le point de rencontre de EF et de AB, et soient H, J, K les projections de S sur AB, EF, MF. Les quadrilatères XJSH, JSFK étant inscriptibles, on aura

$$MX.MH = MJ.MS, \quad MK.MF = MJ.MS;$$

donc

$$MX.MH = MK.MF, \text{ ou } MX = \frac{MK.MF}{MH}.$$

Mais

$$MK = \frac{MF}{2} = \frac{AB}{4}, \quad MF = \frac{AB}{2}, \quad MH = \frac{3AB}{4};$$

par suite,

$$MX = \frac{AB}{6} = MT.$$

Donc la droite EF passe par T, et comme elle est perpendiculaire à MS, et par suite à QT, elle sera tangente au cercle Q. L'enveloppe est donc le cercle Q.

Remarques. 1. On généraliserait aisément en prenant BL = $m$.AB, $m$ étant une constante. L'enveloppe du cercle M est encore un limaçon, etc.

2. En transformant la figure ainsi généralisée par rayons vecteurs réciproques par rapport au point A, on retrouve la proposition connue :

Par un point fixe A on mène une droite variable rencontrant deux droites parallèles fixes en $\alpha$, $\beta$. L'enveloppe du cercle décrit sur $\alpha\beta$ comme diamètre est une conique de foyer A.

Ont résolu la même question MM. BARISIEN et BROCARD.

---

## ×Question 840.

(Voir *Mathesis*, (2), III, p. 128.)

*Trouver les valeurs de y et de z telles que les polynômes*

$$x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 2x + y, \quad x^4 - 3x^3 + 4x^2 + 3x + z$$

*aient un facteur commun du second degré.*

*Solution par* M. R. LIPPENS (athénée de Gand). Le facteur commun aux deux polynômes se trouvera aisément en cherchant le plus grand commun diviseur de ces polynômes, par la méthode des divisions successives. Les deux premiers restes sont

$$x^3 - x^2 - x + y - z, \quad 3x^2 + (1 + z - y)x + 2y - z.$$

Comme le premier terme du premier reste n'est pas divisible par 3, posons pour simplifier,

$$1 + z - y = 3u, \tag{1}$$

$$2y - z = 3v. \tag{2}$$

Le second reste devient alors, au facteur 3 près,

$$x^2 + ux + v.$$

Pour que ce trinôme soit un diviseur commun des polynômes proposés, il faut que le reste de la division du reste précédent par ce trinôme soit nul, ce qui donne les conditions

$$v + 1 - u^2 - u = 0, \tag{3}$$

$$z - y - v(u + 1) = 0.$$

En remplaçant dans cette dernière équation $(z - y)$ par sa valeur tirée de (1), elle devient

$$3u - 1 - v(u + 1) = 0.$$

On tire de là

$$u = \frac{1 + v}{3 - v};$$

en remplaçant dans l'équation (3) $u$ par cette valeur, on obtient

$$v^3 - 5v^2 - v + 5 = 0, \text{ ou } (v+1)(v^2 - 6v + 5) = 0.$$

Cette dernière équation donne les trois racines

$$v = -1, \quad v = 5, \quad v = 1,$$

qui correspondent aux valeurs suivantes des autres quantités à considérer :

$u = 0, \quad y = -4, \quad z = -5, \quad x^2 + ux + v = x^2 - 1$
$u = -3, \quad y = 5, \quad z = -5, \quad x^2 + ux + v = x^2 - 3x + 5$
$u = 1, \quad y = 5, \quad z = 7, \quad x^2 + ux + v = x^2 + x + 1.$

Autre solution par UN ABONNÉ.

---

## Question CXIX.

(Voir N. C. M., II, p. 190; LAISANT, IV, n° 843, p. 216).

*Trouver le lieu du point de contact des tangentes parallèles à une direction donnée, à une série d'ellipses ou d'hyperboles homofocales.*

(NICOLAÏDÈS.)

*Solution par M.* BARISIEN. Soit

$$\frac{x^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda} = 1 \qquad (1)$$

l'équation des coniques homofocales. Si $m$ est le coefficient angulaire de la tangente au point $(x, y)$ de l'une de ces courbes, on a

$$\frac{(b^2 + \lambda)\, x}{(a^2 + \lambda)\, y} = -m ; \qquad (2)$$

on en déduit successivement

$$\lambda = -\frac{a^2my + b^2x}{x + my}, \quad a^2 + \lambda = \frac{c^2x}{x + my}, \quad b^2 + \lambda = \frac{-c^2my}{x + my};$$

puis, en substituant dans (1),

$$(mx - y)(my + x) = c^2.$$

Le lieu cherché est donc une hyperbole équilatère concentrique aux ellipses homofocales et dont l'une des asymptotes est parallèle à la direction donnée.

NOTE. Cette question est pour ainsi dire classique. Pour la traiter géométriquement, soient F, F′ les foyers des courbes homofocales, $d$ la direction donnée. La tangente et la normale en un point M de l'une de ces courbes rencontrent FF′ en deux points T, N, conjugués harmo-

niques par rapport à F et F'. Le lieu demandé peut donc être défini ainsi : Par deux points variables T, N, qui divisent FF' harmoniquement, on mène respectivement une parallèle $t$ et une perpendiculaire $n$ à $d$ ; ces droites, par leur intersection, déterminent un point M du lieu. Comme les droites $t$, $n$ se correspondent dans deux faisceaux projectifs parallèles, leur intersection engendre une hyperbole dont les asymptotes sont, l'une parallèle, l'autre perpendiculaire à $d$. Lorsque $t$ ou $n$ passe par le milieu O de FF', $n$ ou $t$ est à l'infini ; donc O est le centre de l'hyperbole.

Supposons que la tangente $t$ passe par un point fixe T de l'un des axes des coniques homofocales ; la normale passera aussi par un point fixe N de cet axe. Dans ce cas, le lieu de M est la circonférence décrite sur TN comme diamètre.

Lorsque la tangente passe par un point fixe P, le lieu du point de contact est une strophoïde oblique (Voir *Mathesis*, (1), t. I, p. 148 ; Briot et Bouquet, *Géom. anal.*, Coord. polaires ; Maleyx, N. A., 1871).

---

## *QUESTIONS D'EXAMEN.

**566.** Si $a$ et $b$ sont premiers entre eux, les nombres $a+b$, $a^2-ab+b^2$ ne peuvent admettre d'autre diviseur commun que le nombre 3.

***567.** Si les équations

$$ax^2+2bx+c=0, \quad cx^2+2bx+a=0$$

ont une racine commune, les autres racines sont données par

$$ac(a+c)(x^2+1)+2b(c^2+a^2)x=0.$$

(*Collège d'Aberystwyth*, examens de 1892.)

**568.** Vérifier l'identité

$$4(x^2+xy+y^2)^3-27(x^2y+xy^2)^2=(x-y)^2(2x^2+5xy+2y^2)^2.$$

---

## QUESTIONS PROPOSÉES.

**946.** Le carré de tout nombre impair, autre que 1, est la somme de deux carrés, ou la somme de trois carrés. (E. Catalan.)

**947.** Trouver le lieu du milieu de la droite qui joint les centres de courbure aux extrémités des diamètres conjugués d'une ellipse.

(Greenstreet.)

**848.** On donne deux courbes U, U′ et deux droites OA, OB. Deux points M, M′ se meuvent respectivement sur les courbes U, U′ de manière que les droites OM, OM′ divisent harmoniquement l'angle AOB. On demande de trouver : 1° le point où la droite MM′ touche son enveloppe ; 2° la tangente à la courbe décrite par le point d'intersection T des tangentes menées en M à U et en M′ à U′. (J. Neuberg.)

**849.** On considère les paraboles osculatrices en un point donné d'une circonférence donnée à cette circonférence. Montrer que : 1° le lieu des foyers des paraboles est un cercle ; 2° le lieu des projections du point donné sur l'axe des paraboles est une quartique, courbe fermée dont l'aire totale est le $\frac{1}{32}$ de l'aire du cercle donné. (E. N. Barisien.)

**850.** On mène deux tangentes parallèles à deux directions données, à une parabole quelconque inscrite au triangle ABC. Trouver le lieu du point de rencontre de ces deux tangentes. (V. Retali.)

×**851.** La tangente en un point quelconque M d'une circonférence O rencontre un diamètre fixe AA′ au point T. Trouver le lieu du centre du cercle inscrit au triangle OMT. (Smets.)

**852.** On considère les triangles OAB formés par un rayon fixe OA d'un cercle donné et par un rayon variable OB. Trouver les lieux décrits par les centres des cercles tritangents, l'orthocentre, le centre du cercle des neuf points, les points de Brocard et les points de Lemoine. (Déprez.)

×**853.** A et B étant deux nombres positifs quelconques et $m$ un nombre entier positif, démontrer que l'on a toujours

$$(A+B)^m < 2^{m-1}(A^m+B^m).$$

×**854.** Soient O le centre du cercle circonscrit, I le centre du cercle inscrit au triangle ABC, A′ le symétrique de A par rapport à O. Démontrer 1° que la somme des carrés des tangentes menées de A et A′ au cercle I est égale à $4R^2 - 4Rr - 2r^2$, R et $r$ désignent les rayons des cercles O et I ; 2° que la circonférence décrite de A′ comme centre avec le rayon A′I coupe la circonférence O en un point L tel que $AL = \sqrt{AB.AC}$. (Tucker.)

# SUR UNE FONCTION REPRÉSENTATIVE DES COEFFICIENTS DU BINOME

par M. A. LAISANT, Docteur ès sciences.

Etant donnés les coefficients du développement de $(a+b)^n$, savoir

$$C_0 = 1, \quad C_1, \quad C_2, \quad \ldots, \quad C_n = 1,$$

on peut se proposer de trouver une fonction entière de degré $n$ qui prenne respectivement les $n+1$ valeurs précédentes lorsqu'on donne à la variable $x$ les valeurs

$$0, \quad 1, \quad 2, \quad \ldots, \quad n.$$

Soit $F(x)$ cette fonction. Si l'on applique à cette question la formule d'interpolation de Lagrange, on trouve par un calcul facile,

$$(1) \qquad F(x) = \frac{(-1)^n}{n!} x(x-1)(x-2)\ldots(x-n) \times \left[\frac{C_0^2}{x} - \frac{C_1^2}{x-1} + \frac{C_2^2}{x-2} - \cdots + (-1)^n \frac{C_n^2}{x-n}\right].$$

L'équation $y = F(x)$ est celle d'une courbe qui passe par les $n+1$ points ayant respectivement pour abscisses et pour ordonnées

$$0, \quad 1, \quad 2, \quad \ldots, \quad n,$$

et

$$C_0, \quad C_1, \quad C_2, \quad \ldots, \quad C_n.$$

En transportant l'origine au point ayant pour ordonnée 0 et pour abscisse $\frac{1}{2}n$, on aura pour nouvelle équation

$$y = F\left(x + \frac{n}{2}\right) = \Phi(x).$$

Si $n$ est pair et égal à $2m$, on a pour la fonction $\Phi(x)$ :

$$(2) \qquad \Phi_0(x) = \frac{2}{(2m)!}(x^2 - m^2)(x^2 - (m-1)^2)\ldots(x^2 - 1^2)x^2 \times \left[\frac{C_0^2}{x^2 - m^2} - \cdots + (-1)^{m-1}\frac{C_{m-1}^2}{x^2 - 1^2} + (-1)^m \frac{C_m^2}{2x^2}\right];$$

et si $n$ est impair et égal à $2m-1$, il vient, pour la fonction $\Phi(x)$,

$$(3)\quad \Phi_1(x) = \frac{1}{(2m-1)!}\left(x^2-(m-\tfrac{1}{2})^2\right)\cdots\left(x^2-(\tfrac{3}{2})^2\right)\left(x^2-(\tfrac{1}{2})^2\right)$$
$$\times\left[\frac{(2m-1)\,C_0^2}{x^2-(m-\frac{1}{2})^2}-\frac{(2m-3)\,C_1^2}{x^2-(m-\frac{3}{2})^2}+\cdots+(-1)^{m-1}\frac{1.C_{m-1}^2}{x^2-(\frac{1}{2})^2}\right].$$

Ces deux fonctions sont paires l'une et l'autre. La première prend les valeurs

$$C_{\frac{n}{2}},\quad C_{\frac{n}{2}-1},\quad \ldots,\quad C_1,\quad C_0,$$

pour les valeurs

$$0,\quad 1,\quad \ldots\quad \frac{n}{2}-1,\quad \frac{n}{2}$$

de la variable $x$.

La seconde prend les valeurs

$$C_{\frac{n-1}{2}},\quad C_{\frac{n-3}{2}},\quad \ldots,\quad C_1,\quad C_0,$$

pour les valeurs

$$\frac{1}{2},\quad \frac{3}{2},\quad \ldots,\quad \frac{n-3}{2},\quad \frac{n-1}{2}$$

de la variable.

Les courbes représentées par les équations $y=\Phi_0(x)$, $y=\Phi_1(x)$ sont donc symétriques par rapport à l'axe des $y$; et les points par lesquels elles passent et dont les abscisses sont entières ou de la forme $p+\frac{1}{2}$ donnent la représentation des coefficients du binôme.

A ce titre, les diverses fonctions F, $\Phi_0$, $\Phi_1$, peuvent offrir un certain intérêt; et il pourrait y avoir lieu d'en étudier les propriétés.

En nous en tenant à la fonction F, nous pouvons lui donner une autre forme digne de remarque, en appliquant la formule de Newton, au lieu de celle de Lagrange, à la question que nous nous sommes posée au début; on a alors

$$(4)\quad F(x) = C_0 + \frac{x}{1!}\Delta C_0 + \frac{x(x-1)}{2!}\Delta^2 C_0 + \ldots + \frac{x(x-1)\ldots(x-n+1)}{n!}\Delta^n C_0,$$

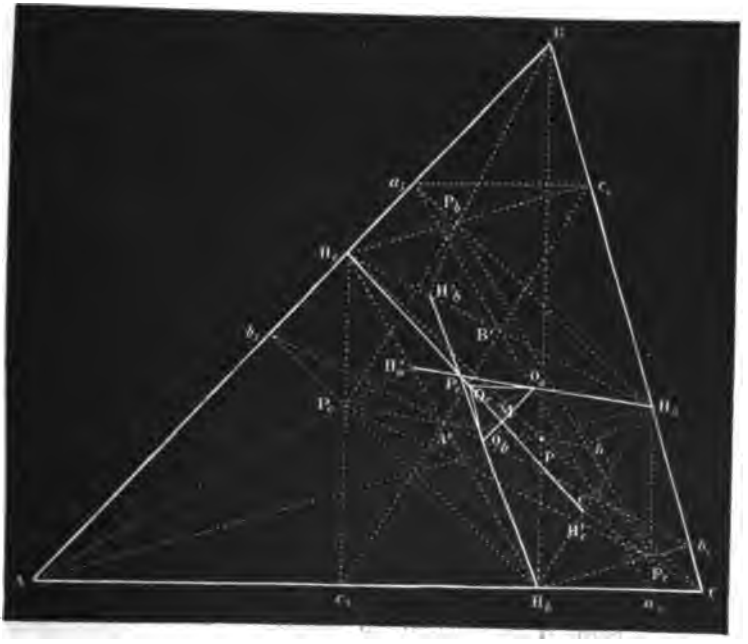
expression identique à celle de la relation (1).

## NOTE SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS DU TRIANGLE;

par M. Émile BERTRAND, ancien élève de l'École Normale des Sciences.

Dans un précédent article (*Mathesis*, t. XI, p. 130), nous avons commencé l'étude de trois coniques remarquables associées au triangle ABC. Nous allons résumer les premières propriétés de ces courbes, puis continuer nos recherches.

1. Soient $AH_a$, $BH_b$, $CH_c$ les trois hauteurs d'un triangle ABC, que nous supposons acutangle, et soit P leur point de concours. Construisons



aussi les hauteurs $(AH'_a, H_cc_2, H_bb_2)$, $(BH'_b, H_cc_1, H_aa_2)$, $(CH'_c, H_aa_1, H_bb_1)$ des triangles $AH_bH_c$, $BH_cH_a$, $CH_aH_b$, et appelons $P_a$, $P_b$, $P_c$ les orthocentres de ces triangles.

*Les points* $H_b$, $H'_b$ *sont les foyers d'une ellipse* $\beta$, *touchant* BA, BC *en* $H_c$, $H_a$. En effet, B étant le point de concours de deux bissectrices extérieures et d'une bissectrice intérieure du triangle $H_bH_aH_c$, $H'_b$ est le point de contact de $H_aH_c$ avec un cercle exinscrit; donc les sommes

$$H_bH_a + H_aH'_b, \quad H_bH_c + H_cH'_b$$

sont égales au demi-périmètre du triangle $H_bH_cH_a$, et $H_b$, $H'_b$ sont les foyers d'une ellipse passant par $H_a$, $H_c$ et touchant en ces points BC, BA. L'axe focal est égal à 2R sin A sin B sin C.

*Il existe de même deux autres ellipses, $\alpha$ et $\beta$, dont la première a pour foyers* $H_a$, $H'_a$ *et touche* AB, AC en $H_c$, $H_b$, *et dont la seconde, de foyers* $H_c$ *et* $H'_c$, *touche* CA, CB *en* $H_b$, $H_a$.

**2.** Les points $H'_a$, $H'_b$, $H'_c$ étant les points de contact *intérieurs* des côtés du triangle $H_aH_bH_c$ avec les cercles exinscrits correspondants, *les axes focaux* $H_aH'_a$, $H_bH'_b$, $H_cH'_c$ *des ellipses* $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ *concourent en un même point* $P_1$, *qui est le point de Nagel du triangle* $H_aH_bH_c$ (*Mathesis*, VII, p. 67).

*Les centres* $O_a$, $O_b$, $O_c$ *des ellipses* $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ *sont les points où les côtés du triangle* A'B'C' *ayant pour sommets les milieux des côtés du triangle* $H_aH_bH_c$, *touchent le cercle inscrit à* A'B'C'. En effet, le droite A'C' passe par le milieu $O_b$ de $H_bH'_c$, et l'on a

$$A'O_b : C'O_b = H_cH'_b : H_aH'_b;$$

$H'_b$ étant le point de contact de $H_aH_c$ avec un cercle exinscrit à $H_aH_bH_c$, $O_b$ est le point de contact de A'C' avec le cercle inscrit à A'B'C'.

*Les points* $O_a$, $O_b$, $O_c$ *sont aussi les milieux des droites* $a_1a_2$, $b_1b_2$, $c_1c_2$, *et celles-ci sont égales à l'axe focal des trois ellipses* $\alpha$, $\beta$, $\gamma$. En effet, C' étant le milieu de l'hypoténuse du triangle rectangle $b_1H_bH_a$, on a $C'b_1 = C'H_a$, et l'angle $C'b_1H_a = C'H_ab_1 = BH_aH_c$; donc $b_1C'$ est parallèle à $H_aH_c$ et, par suite, est le prolongement de A'C'. De même $A'b_2$ est le prolongement de C'A' et égal à $\frac{1}{2}$ $H_bH_c$.

**3.** *Les droites* $AO_a$, $BO_b$, $CO_c$ *sont les symédianes des triangles* ABC, $O_aO_bO_c$. Car $BO_b$ passant par le milieu de $b_1b_2$, passe aussi par le milieu B' de $H_aH_c$ parallèle à $b_1b_2$; on peut aussi dire que la droite BB' joint le milieu de la corde $H_aH_c$ à son pôle B, etc. $O_a$, $O_c$ étant les milieux des droites $a_1a_2$, $c_1c_2$, et $c_1a_2$ étant parallèle à AC, les droites $O_aO_c$, BC sont parallèles; on en déduit que *les triangles* $O_aO_bO_c$, ABC *sont homothétiques et ont pour centre de similitude leur point de Lemoine commun.*

*Le rapport de similitude est égal à cos* A *cos* B *cos* C(*).

**4.** Soient $X_a$, $X_b$, $X_c$ les milieux des hauteurs du triangle ABC. *Les droites* $X_bX_c$, $X_cX_a$, $X_aX_b$ *sont perpendiculaires aux milieux des droites*

(*) Les côtés des triangles ABC, $O_aO_bO_c$ se coupent en six points d'une circonférence de Tücker (J. N.).

$H_aH'_a$, $H_bH'_b$, $H_cH'_c$ *et, par suite, dirigées suivant les petits axes des ellipses* $\alpha, \beta, \gamma$(*).

En effet, les triangles $X_aa_2H_b$, $X_aa_3H'_b$ sont égaux ; car 1° $X_a$ étant le centre de la circonférence circonscrite au quadrilatère birectangle $Aa_3H_aa_2$, on a $X_aa_2 = X_aa_3$ et *angle* $a_2X_aa_3 = 2A$ ; 2° $H_ba_2 = BH_a \cos C$, $H'_ba_3 = BH_a \cos BH_cH_a = BH_a \cos C$, de sorte que $H_ba_2 = H'_ba_3$ ; 3° l'angle $H_aa_3H'_b = BH_aH_c = A$, et, par suite, l'angle de $H'_ba_3$ avec $H_ba_2$ est égal à 2A, ce qui entraîne l'égalité des angles $X_aa_2H_b$ et $X_aa_3H'_b$. Donc $X_aH_b = X_aH'_b$; par analogie $X_cH_b = X_cH'_b$. On en conclut que la droite $X_bX_c$ est perpendiculaire au milieu $O_b$ de $H_bH'_b$.

Observons aussi que les droites $X_aO_a$, $X_bO_b$, $X_cO_c$ sont perpendiculaires aux côtés du triangle A'B'C' ; elles passent donc par le centre M du cercle inscrit au triangle A'B'C'.

**5.** Désignons par $\lambda$ le grand axe des ellipses $\alpha, \beta, \gamma$, c'est-à-dire le demi-périmètre du triangle $H_aH_bH_c$ ; par $\sigma_a$, $\sigma_b$, $\sigma_c$ les petits axes, et par $f_a, f_b, f_c$ les distances focales $H_aH'_a$, $H_bH'_c$, $H_cH'_c$. Le triangle $H_bH_aH'_a$ donne

$$f_a^2 = \overline{H_aH_b}^2 + \overline{H'_aH_b}^2 + 2H_aH_b \cdot H'_aH_b \cos 2B$$
$$= (H_aH_b - H'_aH_b)^2 \sin^2 B + (H_aH_b + H'_aH_b)^2 \cos^2 B ;$$

mais

$$H_aH_b + H'_aH_b = \lambda, \quad H_aH_b = c \cos C, \quad H'_aH_b = c \cos A \cos B,$$
$$\lambda = c \sin A \sin B ;$$

donc

$$f_a^2 = c^2 (\cos C - \cos A \cos B)^2 \sin^2 B + \lambda^2 \cos^2 B$$
$$= \lambda^2 \left[ \frac{(\cos C - \cos A \cos B)^2}{\sin^2 A} + \cos^2 B \right]$$
$$= \frac{\lambda^2}{\sin^2 A} [\cos^2 C + \cos^2 B - 2 \cos A \cos B \cos C]$$
$$= \lambda^2 - \frac{4\lambda^2}{\sin^2 A} \cos A \cos B \cos C.$$

Soit $\rho$ le rayon du cercle inscrit dans A'B'C' (ou circonscrit à $O_aO_bO_c$) ;

---

(*) La figure ne contient qu'une partie des lettres dont il est question dans l'article.

comme il est la moitié de la distance de P à un côté de $H_aH_bH_c$, on trouve facilement $\rho = R\cos A\cos B\cos C$. Par conséquent,

$$f_a^2 = \lambda^2 - \frac{4\lambda^2\rho}{R\sin^2 A},\quad f_b^2 = \lambda^2 - \frac{4\lambda^2\rho}{R\sin^2 B},\quad f_c^2 = \lambda^2 - \frac{4\lambda^2\rho}{R\sin^2 C}.$$

Ensuite

$$\sigma_a^2 = \lambda^2 - f_a^2 = \frac{4\lambda^2\rho}{R\sin^2 A},\quad \sigma_b^2 = \frac{4\lambda^2\rho}{R\sin^2 B},\quad \sigma_c^2 = \frac{4\lambda^2\rho}{R\sin^2 C}.$$

On conclut de ces formules que *les petits axes des ellipses* $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ *sont en raison inverse des côtés correspondants de* ABC.

6. Cherchons les équations des ellipses $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ en prenant pour triangle de référence $H_aH_bH_c$ (Comp. Lemoine, *Mathesis*, (2), II, p. 252).

L'ellipse $\beta$ touche en $H_a$, $H_c$ les bissectrices extérieures du triangle $H_aH_bH_c$; son équation en coordonnées normales est donc

$$(y+z)(y+x) - My^2 = 0, \text{ ou } xy + yz + zx + Ny^2 = 0.$$

Pour déterminer N nous exprimons que le centre $O_b$ est situé sur la droite $H_bH_b'$, dont l'équation est

$$\frac{x}{z} = \frac{H_bH_c\sin H_aH_cH_b}{H_b'H_a\sin H_cH_aH_b} = \frac{\operatorname{cotg} BH_cH_a\sin 2C}{\operatorname{cotg} BH_aH_c\sin 2A} = \frac{\cos^2 C}{\cos^2 A}.$$

Le centre de $\beta$ vérifie les égalités

$$\frac{f_x'}{\sin 2A} = \frac{f_y'}{\sin 2B} = \frac{f_z'}{\sin 2C},$$

ou

$$\frac{y+z}{\sin 2A} = \frac{x+z+2Ny}{\sin 2B} = \frac{x+y}{\sin 2C}.$$

Éliminant $y$, on obtient

$$\frac{x+z(1-2N)}{\sin 2B - 2N\sin 2A} = \frac{z+x}{\sin 2A - \sin 2C};$$

remplaçant $x$, $z$ par les quantités proportionnelles $\cos^2 C$, $\cos^2 A$, on trouve $N = \cos^2 B$.

Les équations cherchées sont donc

$$x^2\cos^2 A + xy + yz + zx = 0,$$
$$y^2\cos^2 B + xy + yz + zx = 0,$$
$$z^2\cos^2 C + xy + yz + zx = 0.$$

En les combinant par soustraction deux à deux, on trouve

$$x\cos A \pm y\cos B = 0,\quad y\cos B \pm z\cos C = 0,\quad z\cos C \pm x\cos A = 0.$$

Ainsi, les ellipses $\alpha$ et $\beta$, qui se touchent en $H_c$ se coupent en deux autres points $L_c$, $L'_c$ situés sur deux droites $H_cL_c$, $H_cL'_c$ conjuguées harmoniques par rapport à l'angle $H_aH_cH_b$. Les trois couples $(H_aL_a, H_aL'_a)$, $(H_bL_b, H_bL'_b)$, $(H_cL_c, H_cL'_c)$(*) sont les couples de côtés opposés d'un quadrangle complet dont les sommets ont pour coordonnées.

$$\pm\frac{1}{\cos A},\quad \pm\frac{1}{\cos B},\quad \pm\frac{1}{\cos C},\quad \text{ou}\ \pm\frac{1}{\sin\frac{1}{2}H_a},\quad \pm\frac{1}{\sin\frac{1}{2}H_b},\quad \pm\frac{1}{\sin\frac{1}{2}H_b}.$$

$H_a$, $H_b$, $H_c$ désignant les angles du triangle $H_aH_bH_c$.

Les coordonnées des points $L_c$, $L'_c$ vérifient les équations

$$x\cos A = -y\cos B = -z\frac{\cos A - \cos B}{1 - \cos A\cos B},$$

$$x\cos A = y\cos B = -z\frac{\cos A + \cos B}{1 + \cos A\cos B}$$

et la droite $L_cL'_c$ a pour équation

$$x\cos^2 A\sin^2 B - y\cos^2 B\sin A + z(\cos^2 A - \cos^2 B) = 0.$$

7. Cherchons maintenant les directrices qui correspondent aux foyers $H'_a$, $H'_b$, $H'_c$. Les tangentes aux extrémités d'une corde focale se coupant sur la directrice correspondante, on voit que les directrices cherchées sont les perpendiculaires abaissées des points A, B, C respectivement sur $H_aH'_a$, $H_bH'_b$, $H_cH'_c$; soient $h_a$, $h_b$, $h_c$ les points où elles rencontrent les côtés correspondants $H_bH_c$, $H_cH_a$, $H_aH_b$ du triangle orthique.

Comme $Ah_a$ est la polaire de $H'_a$ par rapport à la conique $\alpha$, les points $h_a$, $H'_a$ partagent harmoniquement $H_bH_c$ ; donc $Ah_a$ est la conjuguée harmonique de $AH'_a$ par rapport à l'angle BAC. Mais $AH'_a$, perpendiculaire à $H_bH_c$, passe par le centre O du cercle ABC. Donc *les directrices des coniques* $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ *sont les conjuguées harmoniques des rayons* AO, BO, CO *du cercle* ABC *par rapport aux côtés adjacents du triangle* ABC ; leurs équations sont

$$\frac{y}{\cos B} + \frac{z}{\cos C} = 0,\quad \frac{z}{\cos C} + \frac{x}{\cos A} = 0,\quad \frac{x}{\cos A} + \frac{y}{\cos B} = 0,$$

---

(*) Les droites $H_aL_a$, $H_aL'_a$ rencontrent $H_bH_c$ aux pieds des bissectrices de l'angle $H_bAH_c$. (J. N.).

car les coordonnées de O par rapport au triangle ABC sont cos A, cos B, cos C.

Soit $O_aO_bO_c$ le triangle des trois directices. *Il est homologique avec* ABC, *le centre d'homologie étant* O. *Il est homothétique au triangle* $X_aX_bX_c$ *des petits axes, le centre de similitude étant le point de Lemoine de* ABC *et le rapport de similitude étant* cos A cos B cos C; en effet, le système des triangles $O_aO_bO_c$ et ABC est semblable au système $X_aX_bX_c$, $O_aO_bO_c$.

8. Dans le système *orthocentrique* ABCP, nous pouvons considérer chacun des points comme l'orthocentre du triangle formé par les trois autres. Nous obtenons ainsi trois nouveaux triangles PBC, PCA, PBA, ayant respectivement pour orthocentres A, B, C et ayant même triangle orthocentrique $H_aH_bH_c$; chacun d'eux donne lieu à trois coniques analogues aux coniques $\alpha$, $\beta$, $\gamma$.

Si nous considérons le triangle APC, nous aurons :

1° une hyperbole $\beta_b$ tangente en $H_a$, $H_c$ aux côtés AP, CP et ayant pour foyers le point $H_b$ et la projection de P sur $H_aH_c$;

2° une hyperbole $\alpha_b$ tangente en $H_a$, $H_b$ aux côtés AP, AC et ayant pour foyers le point $H_c$ et la projection de A sur $H_aH_b$;

3° Une hyperbole $\gamma_b$ touchant en $H_a$, $H_c$ les côtés CA, CP et ayant pour foyers $H_a$ et la projection de C sur $H_aH_c$.

On peut de même distinguer trois hyperboles $\alpha_a$, $\beta_a$, $\gamma_a$ associées au triangle PBC, et trois hyperboles $\alpha_c$, $\beta_c$, $\gamma_c$ associées au triangle PCA.

Les équations de ces neuf hyperboles peuvent se conclure par analogie de celles des ellipses $\alpha$, $\beta$, $\gamma$. Par exemple, $H_aH_bH_c$ étant à la fois le triangle orthocentrique de ABC et CPA, les angles A, B, C, quand on passe de $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ à $\alpha_b$, $\beta_b$, $\gamma_b$, sont à remplacer par $\frac{1}{2}\pi - A$, $\pi - B$, $\frac{1}{2}\pi - C$, et les lignes BA, BC qui avaient pour équations $x + y = 0$, $z + y = 0$, par les lignes AP, CP dont les équations sont $x - y = 0$, $z - y = 0$, de sorte que $y$ se change en $-y$. Il en résulte que les équations de $\alpha_b$, $\beta_b$, $\gamma_b$ sont :

$$x^2 \sin^2 A - xy - yz + zx = 0, \qquad (\alpha_b).$$
$$y^2 \cos^2 B - xy - yz + zx = 0, \qquad (\beta_b).$$
$$z^2 \sin^2 C - xy - yz + zx = 0. \qquad (\gamma_b).$$

Pareillement, on trouve pour les deux autres groupes :

$$x^2\cos^2 A - xy + yz - zx = 0, \qquad (\alpha_a).$$
$$y^2\sin^2 B - xy + yz - zx = 0, \qquad (\beta_a).$$
$$z^2\sin^2 C - xy + yz - zx = 0; \qquad (\gamma_a).$$
$$x^2\sin^2 A + xy - yz - zx = 0, \qquad (\alpha_c).$$
$$y^2\sin^2 B + xy - yz - zx = 0, \qquad (\beta_c).$$
$$z^2\cos^2 C + xy - yz - zx = 0. \qquad (\gamma_c).$$

En combinant convenablement les équations des douze coniques, on peut trouver un grand nombre de propriétés de leurs intersections. Par exemple, les équations des courbes $\alpha$ et $\alpha_a$ donnent, par soustraction, $x(y+z)=0$ ; deux de leurs points communs, $H_b$ et $H_c$, appartenant à la droite $x=0$, les deux autres sont situés sur la droite $y+z=0$. Donc *les courbes* $\alpha$ *et* $\alpha_a$, $\beta$ *et* $\beta_b$, $\gamma$ *et* $\gamma_c$ *rencontrent respectivement* BC, CA, AB *aux deux mêmes points*. Pareillement, *les courbes* $\alpha_b$ *et* $\alpha_c$, $\beta_a$ *et* $\beta_c$, $\gamma_a$ *et* $\gamma_c$ *rencontrent respectivement* $AH_a$, $BH_b$, $CH_c$ *aux deux mêmes points*.

Si l'on fait $z=-y$ dans l'équation de $\alpha$, on trouve $x^2\cos^2 A - y^2$ ; donc *les points de rencontre de* $\alpha$ *avec* BC *divisent harmoniquement le segment de* BC *compris entre* $H_a$ *et* $H_bH_c$. De même *les courbes* $\alpha_b$ *et* $\alpha_c$ *partagent harmoniquement le segment de* $AH_a$ *compris entre* $H_a$ *et* $H_bH_c$.

9. Soient $a_1$, $b_1$, $c_1$ les côtés du triangle $H_aH_bH_c$. *Les hyperboles* $\alpha_a$, $\beta_a$, $\gamma_a$ *ont pour axe réel*

$$\lambda_a = \frac{1}{2}(b_1 + c_1 - a_1) = 2R\sin A\cos B\cos C ;$$

*leurs trois axes focaux concourent en un adjoint du point de Nagel de* $H_aH_bH_c$.

Les groupes $(\alpha_b, \beta_b, \gamma_b)$, $(\alpha_c, \beta_c, \gamma_c)$ ont pour axe réel

$$\lambda_b = \frac{1}{2}(c_1 + a_1 - b_1) = 2R\sin B\cos C\cos A,$$

$$\lambda_c = \frac{1}{2}(a_1 + b_1 - c_1) = 2R\sin C\cos A\cos B.$$

Soient $\rho_a$, $\rho_b$, $\rho_c$ les rayons des cercles exinscrits au triangle A'B'C', et $\sigma'_a$, $\sigma'_b$, $\sigma'_c$ les axes imaginaires des hyperboles $\alpha_a$, $\beta_a$, $\gamma_a$ ; on a

$$\sigma_a'^2 = \frac{4\lambda_a^2\rho_a}{R\sin^2 A}, \quad \sigma_b'^2 = \frac{4\lambda_a^2\rho_a}{R\cos^2 B}, \quad \sigma_c'^2 = \frac{4\lambda_a^2\rho_a}{R\cos^2 C}.$$

Il existe de nombreuses relations entre les axes des douze coniques; par exemple

$$\lambda_a + \lambda_b + \lambda_c = \lambda,$$

$$\lambda_a \lambda_b \lambda_c = 4\lambda\rho^2,$$

$$\lambda_a \operatorname{cotg} A = \lambda_b \operatorname{cotg} B = \lambda_c \operatorname{cotg} C = 2\rho,$$

$$\lambda_a\rho_a = \lambda_b\rho_b = \lambda_c\rho_c = \lambda\rho,$$

$$\sigma_a'^2 \sin 2A = \sigma_b''^2 \sin 2B = \sigma_c'''^2 \sin 2C.$$

Il serait facile de transporter aux trois groupes d'hyperboles les propriétés du groupe $\alpha, \beta, \gamma$ relatives au triangle des centres et au triangle des directrices.

---

## BIBLIOGRAPHIE.

**Traité de mécanique à l'usage des candidats à l'École Polytechnique**, par V. JAMET, ancien élève de l'École normale supérieure, docteur ès sciences mathématiques, professeur au lycée de Marseille. Paris, G. Carré, 1893 (250 p. gr. in-8°). Prix : 5 francs.

SOMMAIRE. *Préface.* Notions historiques sur les propositions développées dans l'ouvrage. *Introduction.* Tangente à une courbe gauche. Différentielle de l'arc. Plan osculateur. Rayon de courbure et cercle osculateur.

*Première partie.* Cinématique et dynamique du point. 1. *Cinématique.* Vitesse et accélérations dans le mouvement rectiligne et dans le mouvement curviligne. Décomposition des vitesses et des accélérations. Exemple : Cas d'un point mobile sous l'influence d'une force centrale; loi des aires. 2. *Dynamique du point matériel.* Principe de l'inertie et de l'indépendance des effets des forces. Composition des mouvements dus à plusieurs forces constantes. Mouvement des projectiles. 3. Forces de direction constante et de grandeur variable. Mouvement des planètes; mouvement du pendule. 4. Travail des forces. Théorème des forces vives. Application au pendule simple et au mouvement cycloïdal d'un point pesant. Moments des forces et des quantités de mouvement. Lignes géodésiques des surfaces de révolution. *Note.* Tautochronisme de la cycloïde.

*Deuxième partie.* Statique du solide invariable libre. 1. Composition des forces concourantes ou parallèles. Théorème des moments par rapport à un plan. 2-3. Centres de gravité. Théorèmes de Guldin et de Chasles. Transport des forces appliquées à un solide en un point. 4. Couples. 5. Conditions d'équilibre d'un solide invariable. *Note.* Notions sur les intégrales multiples. Applications à l'attraction d'une sphère homogène sur un point matériel et à la recherche des centres de gravité.

Autant que nous pouvons en juger, le *Traité de Mécanique* de M. Jamet est écrit

avec clarté et rigueur (*); l'auteur, qui n'abuse pas de l'analyse, s'en sert très bien quand il l'emploie, mais en général, il préfère les considérations géométriques directes, à la manière de Delaunay.

---

**Cours de Mathématiques spéciales. Supplément** comprenant la trigonométrie et la mécanique conforme au programme du 14 mars 1892, par G. DE LONGCHAMPS, professeur de mathématiques spéciales au lycée Saint-Louis. Paris, Delagrave (XI-472 p. in-8°). Prix : 7 fr. 50.

Le Supplément de M. de Longchamps comprend trois parties. 1° Des compléments de trigonométrie (68 pages). 2° Des compléments de géométrie infinitésimale, de calcul intégral et de géométrie analytique (183 pages). 3° La mécanique (184 p.). Des exercices divers (33 p.) terminent l'ouvrage.

I. *Trigonométrie.* Théorème des projections. Division des arcs. Usage des tables. Équations binômes. Formule fondamentale de la trigonométrie sphérique. Résolution des triangles sphériques rectangles. — L'auteur fait plusieurs fois usage de la formule suivante, qu'il appelle formule symbolique de M. Carvallo, quand elle est écrite sous une forme spéciale,

$$\mathrm{AB}\cos(\mathrm{A},\mathrm{B}) = \Sigma a_i b_j \cos(a_i, b_j),$$

les lignes $(\mathrm{A}, a_1, a_2 \ldots a_m)$ et $(\mathrm{B}, b_1, b_2, \ldots, b_n)$ formant ou pouvant former deux polygones fermés. — Cette formule est loin d'être nouvelle; elle remonte au moins à Grassmann et probablement était connue même avant celui-ci.

Des exercices nombreux (11 1/2 pages) accompagnent les subdivisions les plus importantes des compléments de Trigonométrie.

II. Géométrie infinitésimale : Tracé des tangentes et des normales; courbure, osculation; courbes parallèles, isoptiques, conchoïdales, diamétrales. Les cubiques unicursales. — Intégrales définies, quadratures. — Coordonnées trilinéaires, barycentriques, tangentielles — Intersection de deux quadriques.

Vingt-trois pages d'exercices.

III. (A) *Cinématique du point.* Plan osculateur, arc et courbure d'une courbe gauche; volume des corps. — Vitesse et décomposition des vitesses dans le mouvement uniforme. — Vitesse et accélération dans le mouvement varié et en particulier dans le mouvement uniformément varié. — Tracé des tangentes par la méthode de Roberval (exposé fait avec soin de manière à éviter l'erreur commise à ce sujet, non par Roberval, mais par le rédacteur de sa méthode). Soit dit, en passant, selon nous, il n'y a, au fond, aucune différence entre la géométrie cinéma-

---

(*) Bien entendu, M. Jamet, pas plus qu'aucun autre auteur, ne démontre vraiment que la force est égale à l'accélération multipliée par la masse. C'est là une simple convention de langage pour définir le mot *force*. On peut faire une remarque analogue à propos de quelques autres principes de mécanique rationnelle.

tique ou même la mécanique tout entière, le temps et toutes les quantités employées en mécanique, étant en réalité, définies géométriquement, dans les écrits des mathématiciens.

(B) *Dynamique du point matériel.* Les forces; mouvement des projectiles dans le vide. — La masse : Proportionnalité des forces aux masses et aux accélérations. — Composition et décomposition des forces. — Travail et force vive.

(C) *Statique du solide invariable libre.* Composition et équilibre des forces; moments par rapport à un plan. — Théorie des centres de gravité : applications. — Les moments. — Les couples. — Réduction des forces. — Homogénéité des formules; système CGS.

Vingt pages d'exercices sur la mécanique.

IV. Exercices divers et questions posées dans les divers concours.

*Appendice.* Le nouveau programme d'algèbre, de trigonométrie et de mécanique.

Le *Supplément* de M. de Longchamps est appelé, croyons-nous, à rendre aux professeurs de mathématiques spéciales, les mêmes services que son *Algèbre* et sa *Géométrie analytique*. L'auteur ne s'égare pas dans les broussailles des discussions subtiles sur les principes abstraits ou expérimentaux de la mécanique; il écrit pour les élèves, sous une forme claire et nette; il appuie tout ce qu'il dit d'exemples bien choisis et ne consacre pas moins du sixième de son livre à des exercices variés, persuadé que ceux-là seuls seront capables de se lancer plus tard dans la critique philosophique des bases de la science, qui auront acquis, par un travail personnel, le maniement facile des formules de la mécanique analytique.

---

## QUESTIONS D'ARITHMOLOGIE

par M. G. de Rocquigny (suite, voir *Mathesis*, p. 112).

**14.** Si la somme de deux nombres entiers est un carré ou le double d'un carré, la somme de leurs cubes est respectivement une demi-somme ou une somme de trois carrés.

En effet

$$a^3+b^3=\frac{(a+b)\left[a^2+(a-b)^2+b^2\right]}{2}.$$

Des théorèmes analogues se déduisent des identités

$$2\frac{a^5+b^5}{a+b}=a^4+b^4+a^2(a-b)^2+b^2(a-b)^2,$$

$$2\frac{a^7+b^7}{a+b}=a^6+b^6+a^4(a-b)^2+a^2b^2(a-b)^2+b^4(a-b)^2,$$

$$2\frac{a^9+b^9}{a+b}=a^8+b^8+(a^2-b^2)^2(a^2-ab+b^2)^2+a^2b^2(a-b)^4.$$

**15.** Si $3^{n-1}$ est la somme de trois carrés distincts, $3^n$ est la somme de quatre carrés.

Cette proposition résulte de l'identité

$$3(a^2+b^2+c^2)=(a-b)^2+(b-c)^2+(a-c)^2+(a+b+c)^2,$$

cas particulier de l'identité de Lagrange.

**16.** La somme des $n$ premiers carrés pairs est une pile triangulaire :

$$\frac{2n(2n+1)(2n+2)}{6}.$$

**17.** La somme des $n$ premiers carrés impairs est une pile triangulaire :

$$\frac{(2n-1)2n(2n+1)}{6}.$$

**18.** La somme des $a$ premiers carrés entiers est une somme de deux piles triangulaires(*) ;

$$\frac{a(a+1)(2a+1)}{6}=\frac{(a-1)a(a+1)}{6}+\frac{a(a+1)(a+2)}{6}.$$

**19.** Si $n$ est un nombre triangulaire, $(n+1)^2$ est la somme de trois nombres triangulaires

$$(n+1)^2=n+\frac{(n+1)(n+2)}{2}+\frac{n(n-1)}{2}.$$

**20.** Si $n$ est premier avec 6, le nombre

$$(n-1)^3-(n-4)^3+1$$

est divisible par 24.

**21.** La somme des carrés des doubles des $n$ premiers nombres triangulaires

$$1^2.2^2+2^2.3^2+\cdots+n^2(n+1)^2$$

est

$$\frac{1}{15}n(n+1)(n+2)[3n(n+2)+1].$$

---

(*) Conséquence immédiate de ce qu'un carré de boulets se partage par une diagonale en deux triangles de boulets.

## NOTES MATHÉMATIQUES.

×**16.** ***Sur les Brocardiens d'un point par rapport à un point*** (par M. Socolof, de Kief). Le théorème que j'ai communiqué à ***Mathesis***(*) l'année dernière, a pour corrélatif le suivant, dont la démonstration analytique est très facile :

M *et* $M_1$ *étant deux points quelconques du plan d'un triangle* ABC, *soient* $A_1$, $B_1$, $C_1$ *les points d'intersection des couples de droites* BM *et* $CM_1$, CM *et* $AM_1$, AM *et* $BM_1$, *et soient* $A_2$, $B_2$, $C_2$ *les points d'intersection des couples de droites* $BM_1$ *et* CM, $CM_1$ *et* AM, $MA_1$ *et* BM : *les droites* $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$, *concourent en un même point* N; *les droites* $AA_2$, $BB_2$, $CC_2$, *en un même point* $N_1$.

Soient $(x_1, y_1, z_1)$, $(x_2, y_2, z_2)$ les coordonnées des points M, $M_1$; les coordonnées de N vérifient les équations

$$xy_1z_2 = yz_1x_2 = zx_1y_2;$$

et celles de $N_1$, les équations

$$xy_2z_1 = yz_2x_1 = zx_2y_1.$$

Si les coordonnées de $M_1$ sont égales entre elles, les coordonnées de $N_1$, $N_2$ sont respectivement

$$\frac{1}{z_1}, \frac{1}{x_2}, \frac{1}{y_2} \quad \text{et} \quad \frac{1}{y_2}, \frac{1}{z_2}, \frac{1}{x_2};$$

alors $N_1$ est le ***Brocardien direct*** de $M_2$, $N_2$ le ***Brocardien inverse***. Quand on adopte les coordonnées barycentriques, $M_1$ est le centre de gravité de ABC; dans le système des coordonnées normales, c'est le centre du cercle inscrit.

×**17.** ***Aire de la cycloïde.*** Considérons une demi-cycloïde AKMB, dont l'origine est en A et dont le point le plus élevé est en B. Soient AT, BT les tangentes en A et en B, AZ une parallèle à BT, BZ une parallèle à AT. Sur le côté AT du rectangle ATBZ comme diamètre, et à l'extérieur du rectangle, construisons une demi-circonférence ADEFT. Par les points D, E, F de cette circonférence, menons DL, EK, FM, parallèles à AZ, et rencontrant la cycloïde respectivement en L, K, M. On aura, comme on le voit aisément, à cause de la définition de la cycloïde, DL =

(*) Voir *Mathesis* (2), II, pp. 193 et 252.

arc circulaire DA, EK = arc EA, FM = arc FA, TB = la demi-circonférence TEA. Par suite, il est facile d'évaluer l'aire AETBKA = $u$.

Élevons à AT en chacun des points $m$, où cette ligne est rencontrée par une parallèle FM à AZ, une perpendiculaire $mm'$ = FM = arc FA. Le lieu des points $m'$ sera une certaine courbe B$m'$A, qui aura pour centre de symétrie le point $e'$ situé sur la perpendiculaire élevée au milieu de AT(*). L'aire comprise entre cette courbe, BT et AT est évidemment égale à $u$, et à l'aire du triangle BTA ou $\pi a^2$, si AT = $2a$. Donc $u = \pi a^2$. Par conséquent, l'aire cycloïdale extérieure AMBT = $\frac{1}{2}\pi a^2$, et l'aire intérieure de la demi-cycloïde est $2\pi a^2 - \frac{1}{2}\pi a^2 = \frac{3}{2}\pi a^2$. L'aire intérieure totale est donc $3\pi a^2$.

On peut trouver aussi de cette manière l'aire d'une cycloïde allongée ou raccourcie (G. Holzmuller, *Journal de M. Schlömilch*, t. XXI, p. 128-129)(**).

**18.** Détermination de $u = \int_0^1 \frac{x^{m-1} - x^{-m}}{(1+x)\,lx}\,dx$, quand $0 < m < 1$.

1. En faisant $x = (1 : z)$ dans $u$, on trouve

$$u = \int_1^\infty \frac{z^{m-1} - z^{-m}}{(1+z)\,lz}\,dz = \int_1^\infty \frac{x^{m-1} - x^{-m}}{(1+x)\,lx}\,dx.$$

Donc

$$2u = \int_0^\infty \frac{x^{m-1} - x^{-m}}{(1+x)\,lx}\,dx. \qquad (1)$$

2. On a ensuite, en faisant $x = (1 : z)$,

$$\int_0^\infty \frac{x^{m-1}dx}{(1+x)\,lx} = \int_\infty^0 \frac{z^{-m}dz}{(1+z)\,lz} = \int_0^\infty \frac{-x^{-m}dx}{(1+x)\,lx}.$$

Donc, d'après (1)

$$u = \int_\infty^0 \frac{x^{-m}dx}{(1+x)\,lx}.$$

---

(*) Cette courbe est appelée la *compagne de la cycloïde*.

(**) Il existe d'autres méthodes géométriques pour trouver l'aire de la cycloïde. En voici une très simple. Le tangente en M est parallèle à la corde FT; soit $\mu$ le point où elle coupe BT; la droite M$\mu$ roulant sur la cycloïde engendre la même aire que la corde TF du cercle ADT tournant autour de T.

3. On a ensuite, d'après une formule connue,

$$\frac{du}{dm} = \int_0^\infty \frac{x^{-m}dx}{1+x} = \frac{\pi}{\sin m\pi}, \quad u = C + l \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} m\pi.$$

Fesant $m = \frac{1}{2}$, ce qui donne $u = 0$, on reconnaît que $C = 0$. Donc

$$u = l \operatorname{tang}\left(\frac{m\pi}{2}\right),$$

résultat trouvé autrement par KUMMER, dans le *Journal de Crelle*, t. 17, p. 224 (WALTON, *Quarterly Journal of Mathematics*, t. 12, p. 185).

×19. *Théorème d'arithmétique* (voir *Mathesis*, p. 137). Nous complétons ici la démonstration du théorème de Baschwitz, d'après une note due à M. G. de Longchamps (*J. M. E.*, n° de juin, p. 126).

On peut se donner le dénominateur $x$ des quatre fractions pourvu que $x$ soit une somme de trois carrés. Si $x$ est une somme de deux carrés *inégaux*, les valeurs de $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ donnent encore une solution pourvu que l'on suppose $m = 0$ ou $n = 0$; mais si l'on y fait $p = 0$, il n'y a pas *transformation effective*.

La solution est encore illusoire si l'on fait $m = 0$, $n = p$. Dans ce cas, l'identité

$$a^2 + b^2 + c^2 =$$

$$\left(\frac{a+b+c}{2}\right)^2 + \left(\frac{-a+b+c}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-b+c}{2}\right)^2 + \left(\frac{a+b-c}{2}\right)^2$$

démontre le théorème(*).

Remplaçant $a, b, c$ par $2a+1$, $2b+1$, $2c+1$, on obtient

$$(2a+1)^2 + (2b+1)^2 + (2c+1)^2 =$$

$$(a+b+c+\tfrac{3}{2})^2 + (-a+b+c+\tfrac{3}{2})^2 + (a-b+c+\tfrac{3}{2})^2 + (a+b-c+\tfrac{3}{2})^2.$$

C'est l'identité d'où M. Baschwitz a déduit le théorème suivant :

*La somme de trois carrés impairs est toujours la somme de quatre carrés fractionnaires.*

Cette proposition est un peu moins générale que celle qui a fait l'objet de notre première note; la généralisation est due à M. de Longchamps.

Nous empruntons encore au même article du J. M. E. la remarque suivante. L'identité

$$(m^2 + n^2 + p^2)^2 = (m^2 + n^2 - p^2)^2 + (2mp)^2 + (2np)^2$$

(*) On peut multiplier les deux termes des quatre fractions par $n$.

est comprise dans l'égalité d'Euclide :

$$(m^2 + p^2)^2 = (m^2 - p^2)^2 + (2mp)^2,$$

si l'on remplace $m^2$ par $m^2 + n^2$. (J. N.)

×**20**. *Pièges mathématiques.* A propos de la note publiée dans *Mathesis*, 1892, p. 161 (*Un angle obtus est égal à l'angle droit*), M. Georges Delahaye, de Roye, nous rappelle les deux pièges suivants, qui sont bien connus mais nous donnent l'occasion de signaler ce qui les distingue du piège d'une toute autre nature dont nous venons de rappeler le titre.

1° Joignons le milieu E de BC aux milieux D, F de AB, AC; la ligne brisée BDEFC a pour périmètre BA + AC. De même, si l'on joint le milieu G de BE aux milieux H, I de BD et DE, et le milieu L de EC aux milieux K, M de EF et FC, le contour BHGIEKLMC et égal au contour BDEFC. En continuant ainsi, on aura une suite de lignes brisées ayant pour périmètre BA + AC. *Mais ces lignes ont pour limite la droite* BC; *donc* BC = BA + AC.

2° Sur la droite AB comme diamètre, construisons la demi-circonférence AXB. C étant le milieu de AB, construisons sur AC et CB comme diamètres les demi-circonférences AYC, CZB; il est facile de voir que les lignes AXB, AYCZB ont même périmètre. D et E étant les milieux de AC et CB, si sur AD, DC, CE, EB comme diamètres on construit des demi-circonférences, la somme de ces lignes sera encore égale à AXB. En continuant ainsi, on obtient une suite de contours courbes dont le périmètre égale AXB et *qui ont pour limite le segment rectiligne* AB; *donc*, etc.

Au fond, les pièges précédents reposent sur une assertion *purement arbitraire*, savoir que la longueur d'une ligne dont les points se rapprochent indéfiniment de ceux d'une autre ligne fixe a pour limite la longueur de celle-ci. Le piège indiqué dans *Mathesis* (2), II, p. 161, repose sur une construction que l'*on est forcé de faire, bien ou mal*; si on la fait mal, on arrive à une absurdité. On peut en conclure qu'il n'est pas indifférent, comme on le dit parfois, de raisonner sur des figures assez exactes ou sur des figures grossières.

**21**. *Centre de gravité du prismatoïde.* A l'article publié, pp. 138-139, comparez Massau, *Intégration graphique*, n° 284, où l'on trouve plusieurs déterminations du centre de gravité en question.

## SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

### ×Question 801.

(Voir *Mathesis* (2), t. III, p. 31.)

***Sur une droite*** AB ***donnée de grandeur et de position dans le plan horizontal, considérons le point*** A ***comme un élément de la surface de ce plan horizontal. Soit alors une droite*** BC ***située dans le plan vertical qui passe par*** AB ; ***si l'on fait glisser sur*** BC ***une lumière d'intensité constante, il y a une position*** M ***pour laquelle l'éclairement en*** A ***est maximum. Trouver le lieu des points*** M ***satisfaisant à cette condition, quand la droite*** BC ***prend toutes les positions possibles autour du point*** B ***et dans le plan vertical.***

(A. Morel.)

*Solution par* M. H. Brocard. Soient $a$ la distance BA, BA$x$ et B$y$ les axes de coordonnées rectangulaires, $\theta$ l'angle CBA, $\omega$ l'angle MAB, T l'intensité du foyer M.

L'intensité de la lumière en A aura pour expression (*)

$$\frac{T \sin \omega}{\overline{AM}^2} = T. \frac{x \operatorname{tang} \theta}{(a^2 + x^2 \sec^2 \theta - 2ax)^{\frac{3}{2}}}.$$

La condition de maximum est donnée par l'équation dérivée

$$2x^2 \sec^2 \theta - ax - a^2 = 0.$$

Mais

$$\operatorname{tang} \theta = \frac{y}{x}, \quad \sec^2 \theta = \frac{x^2 + y^2}{x^2}.$$

L'équation du lieu des points M est donc

$$2(x^2 + y^2) - ax - a^2 = 0,$$

qui représente une circonférence passant en A, et dont le centre est sur BA, au quart de BA à partir de B. Son rayon est $\frac{5}{4}$ BA.

Solution géométrique par M. Vladimirescu.

(*) Il faut tenir compte de la *loi du cosinus* (voir les Traités de Physique).

## Question 805.

(Voir *Mathesis*, (2), III, p. 32.)

***Trouver dans le plan d'un rectangle*** ABCD ***un point*** M ***tel, que les triangles*** ABM, BCM, CDM, DAM ***aient des cercles circonscrits égaux. Trouver le lieu géométrique du point*** M ***et des orthocentres des quatre triangles.*** (H. MANDART.)

***Solution de*** P. H. SCHOUTE. Soient O le centre du rectangle; menons OX parallèle à AD, BC, et OY parallèle à CD, BA.

Si l'on décrit des cercles égaux sur AB et CD comme cordes, il y a deux cas à distinguer. Les centres $N_1$, $N_2$ de ces cercles situés sur OX sont des points symétriques par rapport à O, ou tel n'est pas le cas. Dans la première hypothèse, les deux points d'intersection se trouvent sur OY et ne satisfont pas en général aux conditions du problème. Dans le second cas, soient $P_1$, $P_2$ les milieux de AB, DC et MM' la corde commune qui coupe $N_1N_2$ en son milieu N; on a

$$P_1N_1 = P_2N_2, \quad \text{d'où} \quad P_1N_1 = P_2N_2 = ON.$$

Les triangles $AP_1N_1$ et $N_1MN$ donnent, si l'on pose

$$AD = 2a, \quad AB = 2b, \quad ON = x, \quad MN = y :$$

$$b^2 + x^2 = \rho^2, \quad a^2 + y^2 = \rho^2; \tag{1}$$

donc aussi

$$x^2 - a^2 = y^2 - b^2. \tag{2}$$

Comme on trouve les mêmes relations (1) pour deux cercles de rayon $\rho$ décrits sur AD et BC, le lieu du point M est une hyperbole équilatère représentée par l'équation (2), et dont les asymptotes sont les bissectrices de l'angle YOX et de son supplément. Cette hyperbole passe par A, B, C, D. D'après une propriété connue, cette courbe est en même temps le lieu géométrique des orthocentres (M' est l'orthocentre des triangles ADM, BCM).

Une autre bonne solution, mais moins directe que la précédente, nous a été adressée par M. DROZ-FARNY.

## Question 810.

(Voir *Mathesis*, (2), III, p. 55.)

*Soient* AA', BB' *deux diamètres rectangulaires d'un cercle* O. *D'un point quelconque* C *de la circonférence on abaisse une perpendiculaire* CD *sur* AA', *on porte sur* OC *une longueur* OE = OD *et l'on projette* E *en* F *sur* AA'. *Trouver le lieu du point de rencontre des droites* BA *et* CD. *La figure donne le moyen de construire un angle dont la tangente soit le carré du cosinus d'un angle donné, ou dont le cosinus soit la racine carrée de la tangente d'un angle donné.* (Decamps.)

*Solution par* MM. Quint, Vladimirescu, Déprez, Bellens, Droz-Farny, Morel et M^lle^ De Haas. Prenons pour axes de coordonnées BB' et la tangente en B, et soient $OC = r$, *angle* $COA = \varphi$, en sorte que $OD = r\cos\varphi$, $OF = r\cos^2\varphi$. Les coordonnées $(x, y)$ du point de rencontre de CD avec BF sont

$$x = OD = r\cos\varphi,\quad y = OD\frac{OB}{OF} = \frac{r}{\cos\varphi};$$

l'équation du lieu de ce point est donc $xy = r^2$.

Soit $\theta$ l'angle OBF ; on a

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{OF}{OB} = \cos^2\varphi.$$

Cette égalité conduit à une solution de la seconde partie de la question.

---

## ×Question 820.

(Voir *Mathesis*, (2), III, p. 79.)

***Démontrer que*** $x - 2$ ***est facteur du déterminant***

$$\begin{vmatrix} x & \frac{l}{m}+\frac{m}{l} & \frac{n}{l}+\frac{l}{n} \\ \frac{l}{m}+\frac{m}{l} & x & \frac{m}{n}+\frac{n}{m} \\ \frac{n}{l}+\frac{l}{n} & \frac{m}{n}+\frac{n}{m} & x \end{vmatrix}$$

*et trouver les autres facteurs.*

(*Collège d'Aberystwyth*, examens de décembre 1892.)

*Solution par* MM. Retali, Quint, Greenstreet, Barisien, Déprez, Decamps et M^lle^ de Haas. Posons

$$\frac{l}{m}+\frac{m}{l}=\lambda,\quad \frac{m}{n}+\frac{n}{m}=\mu,\quad \frac{n}{l}+\frac{l}{n}=\nu; \tag{1}$$

on trouve pour la valeur du déterminant

$$f(x)=x^3-x(\lambda^2+\mu^2+\nu^2)+2\lambda\mu\nu;$$

mais, eu égard aux égalités (1), nous avons

$$4-(\lambda^2+\mu^2+\nu^2)+\lambda\mu\nu=0;$$

donc $f(2)=0$ et, par conséquent, $f(x)$ est divisible par $x-2$. Puisque

$$\frac{f(x)}{x-2}=x^2+2x-\lambda\mu\nu,$$

les deux autres facteurs sont

$$x+1\mp\sqrt{1+\lambda\mu\nu}.$$

---

## Question CCCCXXIII.

(N. C. M., IV, p. 334; Laisant, IV, 905.)

***Démontrer que, dans toute conique, un point quelconque*** M, ***le centre de courbure correspondant, et les points d'intersection de la normale en*** M ***avec les perpendiculaires*** FG, *fg*, ***menées des foyers*** F, *f* ***aux rayons vecteurs*** FM, *f*M, ***sont conjugués harmoniques.***

***Solution*** par M. Barisien. Soient O le centre de l'ellipse, et C le centre de courbure relatif au point M, dont l'angle d'anomalie excentrique est $\varphi$.

Le coefficient angulaire de OM est

$$m_1=\frac{b\sin\varphi}{a\cos\varphi}, \tag{1}$$

celui de OC est

$$m_2=\frac{-\frac{c^2}{b}\sin^3\varphi}{\frac{c^2}{a}\cos^3\varphi}=-\frac{a\sin^3\varphi}{b\cos^3\varphi}. \tag{2}$$

La normale en M a pour équation

$$ax\sin\varphi-by\cos\varphi=c^2\sin\varphi\cos\varphi, \tag{3}$$

la droite FG,

$$by \sin \varphi + (x - c)(a \cos \varphi - c) = 0. \tag{4}$$

Une droite quelconque passant par le point d'intersection des droites (3) et (4) est représentée par

$$\lambda(ax \sin \varphi - by \cos \varphi - c^2 \sin \varphi \cos \varphi) + by \sin \varphi + (x - c)(a \cos \varphi - c) = 0.$$

En exprimant que cette droite passe par O, on a

$$\lambda = \frac{c - a \cos \varphi}{c \sin \varphi \cos \varphi}.$$

La droite a alors pour équation

$$x \sin \varphi (a \cos \varphi - c) - by \cos^2 \varphi = 0.$$

Le coefficient angulaire de cette droite est donc

$$m_3 = \frac{\sin \varphi}{b \cos^2 \varphi}(a \cos \varphi - c). \tag{5}$$

Le coefficient angulaire de la droite joignant le centre O au point d'intersection de la normale en M avec $fg$, a de même pour expression

$$m_4 = \frac{\sin \varphi}{b \cos^2 \varphi}(a \cos \varphi + c). \tag{6}$$

Si le faisceau défini par l'énoncé est harmonique, on doit avoir

$$(m_1 + m_2)(m_3 + m_4) = 2m_1m_2 + 2m_3m_4,$$

relation qui est vérifiée immédiatement en y portant les valeurs (1), (2), (5) et (6).

*Solution géométrique.* Soient N, T les points de rencontre de F$f$ avec la normale et la tangente en M. Les points N, T, F, $f$ constituent une division harmonique; menons par ces points des perpendiculaires à MN et prenons les intersections de ces droites avec MF; nous aurons une nouvelle division harmonique N′, M, F, $f'$. Les perpendiculaires élevées en ces points sur MF déterminent sur MN une nouvelle division harmonique C, M, G, $g$. (J. Neuberg).

Note. Monsieur L. Meurice nous communique la démonstration suivante, basée sur des considérations cinématiques très simples.

Représentons la vitesse de M sur la conique par un segment MK de la normale, ce qui suppose cette vitesse et ses composantes tournées de $\frac{1}{4}$ autour de M. Soient H, $h$ les projections de K sur MF, M$f$; MH et M$h$

représenteront les vitesses de circulation du point M autour des foyers F, $f$. Les vitesses angulaires des droites FM, $f$M, ωM (ω est le centre de courbure en M) ayant pour expressions $\frac{MH}{MF}$, $\frac{M\mathcal{h}}{Mf}$, $\frac{MK}{M\omega}$, et ωM étant la bissectrice de l'angle FM$f$, on a

$$\frac{MK}{M\omega}=\frac{1}{2}\left(\frac{MH}{Mf}+\frac{M\mathcal{h}}{Mf}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{MK}{MG}+\frac{MK}{Mg}\right);$$

donc

$$\frac{1}{M\omega}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{MG}+\frac{1}{Mg}\right),$$

et ω est le conjugué harmonique de M par rapport à G$g$.

---

## QUESTIONS D'EXAMEN.

**569.** Une sécante menée par le centre O d'une hyperbole rencontre la courbe en P, et les parallèles aux asymptotes menées par un point quelconque Q de la courbe en T, T'. Démontrer que $\overline{OP}^2 = OT.OT'$.

(*Collège d'Aberystwyth.*)

A vérifier analytiquement en prenant pour axes les asymptotes ou OQ et le diamètre conjugué.

**570.** Soient PQ, P'Q' deux cordes parallèles d'une parabole. Le segment intercepté sur une tangente quelconque $t$ par les tangentes menées en P et P' est égal à celui qu'interceptent sur $t$ les tangentes menées en Q et Q'. (*Collège d'Aberystwyth.*)

A vérifier analytiquement en prenant pour axes le diamètre conjugué avec PQ, P'Q', et la tangente correspondante; calculer les différences des ordonnées des points de rencontre de $t$ avec les tangentes en P, P' etc.

---

## QUESTIONS PROPOSÉES.

***855.** Si un nombre premier P n'est pas la somme de deux carrés, $P^2$ est la somme de trois carrés. (E. CATALAN.)

**856.** Soient M, M' deux points infiniment voisins, pris sur une courbe U; soit T le point d'intersection des tangentes menées en ces points. Si, au point M, les dérivées $\frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \ldots, \frac{d^ny}{dx^n}$ sont nulles, le rapport MT : M'T a pour limite $n$.

**857.** On considère les ellipses osculatrices à un cercle donné en un point donné de ce cercle, et ayant même aire que le cercle. Montrer que : 1° Le lieu du centre de ces ellipses est une ligne droite ; 2° l'enveloppe des axes est une parabole ; 3° le lieu des projections du point donné sur les axes est une cissoïde ; 4° le lieu des sommets est une courbe unicursale du 5e degré ; 5° le lieu des foyers est une strophoïde droite ; 6° la tangente à l'ellipse au second point de rencontre de l'ellipse et du cercle a pour enveloppe une hyperbole. (E. N. Barisien.)

**858.** Le lieu des points tels qu'en abaissant les quatre normales à une ellipse, la somme des carrés des six distances mutuelles des pieds des normales soit constante est une conique. Dans quel cas ce lieu se compose-t-il de lignes droites ? (E N. Barisien.)

**859.** Un cercle (C) coupe une conique (Σ) en quatre points. Par ces quatre points on fait passer une hyperbole équilatère (H). Quel que soit le cercle (C), le rapport des distances respectives du centre de (Σ) aux centres de (C) et de (H), est constant. (E. N. Barisien.)

×**860.** On divise les côtés BC, CA, AB d'un triangle, aux points A′, B′, C′ dans le rapport $m : n$, et les côtés du triangle A′B′C′, aux points A″, B″, C″, dans le rapport $n : m$. Démontrer 1° que les côtés du triangle A″B″C″ sont parallèles à ceux de ABC ; 2° que les droites AA″, BB″, CC″ sont les médianes de ABC. En opérant sur le triangle A″B″C″ comme sur le triangle ABC, et en continuant ainsi indéfiniment, trouver les limites des sommes $ABC + A''B''C'' + A'''B'''C''' + \cdots$ et $AB + A''B'' + A'''B''' + \cdots$ (J. N.)

×**861.** On donne deux circonférences de rayons R, $r$. Quelle doit être la distance des deux centres pour qu'on puisse décrire une circonférence touchant les circonférences données, leur ligne des centres et une tangente commune ? (Dépret.)

×**862.** D'un point D pris sur une tangente DA à une circonférence donnée O, menez une sécante DBC de manière que la droite joignant les points de Brocard du triangle ABC soit perpendiculaire à BC. Démontrer que l'orthocentre du triangle est situé sur le diamètre DO et que l'aire du triangle est maximum. (Sollertinsky.)

×**863.** Dans tout triangle, le produit de la plus courte distance entre deux des cercles ex-inscrits et de leur plus grande distance est égal au carré du côté opposé à l'angle du triangle relatif au troisième cercle ex-inscrit. (E. N. Barisien.)

## ION DE GÉOMÉTRIE INFINITÉSIMALE;

, professeur à l'Université de Naples.

a-t-il été conduit à se poser la *Question* 792 ...nière évidence qu'il ne peut y avoir de courbe ...*ure passent par un point fixe*, parce que deux ...nt en commun trois points, et, par suite, ils ne ..., ainsi que tous les autres, en un cercle unique. ...be cherchée par M. Mandart devrait avoir, *si elle* ...polaire double du rayon de courbure; mais c'est ...proque qui ne saurait avoir lieu, et la courbe trouvée à ...dernière propriété sans que, pour cela, les cercles ...nt par un point fixe. Il faut remarquer, en effet, que ...une série de courbes osculatrices à une courbe donnée est ...elle-même, comptée deux ou plusieurs fois. On pourrait ...néralisant la *question* de M. Mandart, se demander quelle est *dont les cercles de courbure touchent une autre courbe donnée*, généralement encore, quelle est la courbe qui est osculée en ...s points par une série de courbes tangentes à une autre courbe; ...es remarques qui précèdent montrent clairement que de telles ...es ne peuvent exister.

...ar des considérations analogues on constate l'impossibilité de trouver ...e courbe telle, que *les axes radicaux de ses cercles de courbure avec un ...rcle fixe passent par un point fixe.* L'axe radical de deux cercles ...sculateurs consécutifs est évidemment la tangente à la courbe. Si l'on se rappelle que les axes radicaux de trois cercles concourent en un point, on voit tout de suite que *l'axe radical du cercle de courbure avec un cercle fixe ne peut toucher son enveloppe ailleurs que sur la tangente à la courbe.* Donc, si l'axe dont il s'agit pouvait avoir un point fixe, c'est en ce point que devraient concourir toutes les tangentes à la courbe. Celle-ci se réduirait à un point.

Mais si l'on remplace les cercles osculateurs par des cercles tangents à la courbe, et dont les rayons soient *proportionnels aux rayons de courbure*, les impossibilités signalées précédemment disparaissent et l'on trouve des courbes très-intéressantes. Ainsi, pour répondre à la question posée par M. Mandart, il faut évidemment prendre les *spirales sinusoïdes* (N. A. M., 1888, p. 171).

Plus généralement, si l'on veut que l'axe radical du cercle considéré et d'un cercle fixe passe par un point fixe, on trouve, par des considérations de Géométrie élémentaire, que ces courbes possèdent dans leur plan un autre cercle, orthogonal au premier, ayant pour centre le point fixe, et tel que *le rayon de courbure en un point quelconque est proportionnel au segment que la polaire du même point, par rapport au cercle dont il s'agit, détermine sur la normale*. Ces courbes, qui comprennent comme cas particuliers les *coniques*, les *épicycloïdes*, etc., sont aussi caractérisées par la propriété suivante : le rayon vecteur, issu d'un certain point du plan, *partage dans un rapport constant le rayon de courbure de la développée*. Cela tient à ce que, dans la série des cercles tangents à une courbe quelconque, et proportionnels aux cercles osculateurs, l'axe radical de deux cercles consécutifs jouit précisément de la propriété de partager dans un rapport constant le rayon de courbure de la développée.

Tout cela peut se démontrer très aisément par les procédés *intrinsèques*, qui ont ici une supériorité incontestable sur ceux qu'on emploie habituellement. Ainsi, lorsqu'on met en équation le problème de M. Mandart, on est conduit à une équation différentielle, qui admet une intégrale étrangère à la question posée. En Géométrie intrinsèque, il faut tout simplement exprimer qu'il y a, sur la circonférence osculatrice $x^2 + y^2 = 2\rho y$, un point $(x, y)$ satisfaisant aux conditions

$$\frac{dx}{ds} = \frac{y}{\rho} - 1, \quad \frac{dy}{ds} = -\frac{x}{\rho},$$

nécessaires *et suffisantes* pour l'immobilité. On trouve immédiatement (en différentiant l'équation du cercle) $y\frac{d\rho}{ds} = 0$, c'est-à-dire que, si $y$ n'est pas nul, $\rho$ doit être constant. Si, au contraire, on part de l'équation $x^2 + y^2 = 2k\rho y$, on obtient

$$(k - 1)\,x = ky\frac{d\rho}{ds}.$$

Celle-ci est l'équation de l'axe radical du cercle considéré et du cercle analogue, construit en un point infiniment voisin. On voit que, comme nous l'avions annoncé, cette droite partage dans le rapport de $k$ à $1 - 2k$ le rayon de courbure de la développée.

On peut traiter la même question en assujétissant la circonférence à

passer, non par un point fixe, mais par le centre de gravité de l'arc, compté à partir d'une origine fixe. Les coordonnées du centre de gravité doivent alors satisfaire aux équations(*).

$$\frac{d(xs)}{ds} = \frac{ys}{\rho} - s, \quad \frac{d(ys)}{ds} = -\frac{xs}{\rho},$$

et à la condition de s'annuler pour $s = 0$. On obtient donc, par différentiation de $x^2 + y^2 = 2k\rho y$,

$$(k-1)xs = ky\frac{d(\rho s)}{ds},$$

ou bien

$$(k-1)\rho s\frac{d(ys)}{ds} + kys\frac{d(\rho s)}{ds} = 0;$$

puis, en intégrant,

$$(\rho s)^k (ys)^{k-1} = a^{4k-2}$$

pourvu que $k \gtrless \frac{1}{2}$. Remarquons que, pour $k = 1$, il vient $\rho s = a^2$, équation d'une *clothoïde*. Pour cette courbe on a donc la propriété que tout arc, dont une extrémité est le point d'inflexion de la courbe, *a son centre de gravité sur la circonférence osculatrice* à l'autre extrémité.

Soit, dans le cas général, $\rho s = a^2 t$, de sorte que

$$ys = a^2 t^{-\frac{k}{k-1}}, \quad xs = -\rho\frac{dys}{ds} = \frac{ka^4}{(k-1)s}t^{-\frac{k}{k-1}}\cdot\frac{dt}{ds}.$$

On a aussi

$$xs = \pm ys\sqrt{2k\frac{\rho}{y} - 1} = \pm a^2 t^{-\frac{k}{k-1}}\mathrm{T},$$

en posant, pour abréger,

$$\mathrm{T} = \sqrt{2kt^{\frac{2k-1}{k-1}} - 1}.$$

Donc, si l'on représente par $t_0$ la valeur de $t$ qui correspond à $s = 0$,

$$s^2 = \pm\frac{2ka^2}{k-1}\int_{t_0}^{t}\frac{dt}{\mathrm{T}}.$$

Quant à l'équation intrinsèque des courbes cherchées, il suffira, pour l'obtenir, d'éliminer $t$ entre la dernière équation et $\rho s = a^2 t$; mais

(*) *Nouv. Annales de Math.*, 1886, p. 511.

l'équation résultante ne pourra être écrite sous forme algébrico-logarithmique finie que pour les valeurs de $k$ ayant la forme $\frac{1}{2} - \frac{1}{2n}$, $n$ étant un nombre entier. On obtient ainsi les deux séries de valeurs de $k$ :

$$\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{3}{8}, \cdots; \quad \frac{3}{4}, \frac{2}{3}, \frac{5}{8}, \cdots$$

Les courbes de la première série ne répondent pas à la question. Cela tient à ce que les circonférences de rayon $kp$ sont *trop petites* pour pouvoir passer constamment par les centres de gravité des arcs correspondants. En effet, remarquons d'abord que le rapport de $y$ à $s$ doit, pour $s = 0$, devenir nul. Il faut donc que T croisse indéfiniment. Il faut aussi que $ys$ tende vers zéro. Donc

$$t_0^{\frac{2k-1}{1-k}} = 0, \quad t_0^{\frac{k}{1-k}} = 0.$$

Il s'ensuit que $2k - 1$ doit avoir même signe que $k$. Par conséquent $k > \frac{1}{2}$. On voit, en outre, que $t_0$ est nul ou infini suivant que $k$ est inférieur ou supérieur à l'unité. Il en résulte qu'il faut toujours prendre le signe — dans la formule qui exprime le carré de l'arc, de sorte qu'on devra écrire

$$s^2 = \frac{2ka^2}{1-k}\int_0^t \frac{dt}{T}, \quad s^2 = \frac{2ka^2}{k-1}\int_t^\infty \frac{dt}{T},$$

suivant que $k < 1$ ou $k > 1$.

Discutons nos courbes aux environs de l'origine des arcs. Il faut d'abord chercher de quelle manière $t$ tend vers zéro ou vers l'infini lorsque $s$ tend vers zéro. On trouve, en employant la règle de l'Hospital,

$$\lim_{s=0} \frac{t^n}{s^2} = \frac{(1-k)n}{2ka^2} \lim t^{n-1} T;$$

puis, en remarquant que

$$\lim_{s=0} \frac{T}{t^{k-\frac{1}{2}}} = \sqrt{2k},$$

et en prenant $n = \frac{1}{2(1-k)}$, on obtient

$$\lim_{s=0} \frac{t^n}{s^2} = \frac{(1-k)n}{\sqrt{2k}.a^2} \lim t^{n-\frac{1}{2(1-k)}} = \frac{1}{2\sqrt{2k}.a^2}.$$

On en déduit, au moyen de $\rho s = a^2 t$, que, dans le voisinage de l'origine des arcs, nos courbes tendent à se comporter comme si leur équation intrinsèque était

$$\rho = \alpha s^{3-4k}.$$

On a donc à l'origine une inflexion ou un rebroussement suivant que $k > \frac{3}{4}$ ou $k < \frac{3}{4}$. Les courbes qui répondent aux valeurs de $k$ très voisines de $\frac{1}{2}$ ou de 1 tendent à se comporter respectivement comme une spirale logarithmique autour de son point asymptotique ou comme une clothoïde aux environs de son point d'inflexion. Il nous reste à constater que les coordonnées $x$ et $y$ sont nulles à l'origine. Remarquons, pour cela, que

$$\lim_{s=0} x = -a^2 \lim \frac{t^{\frac{k}{1-k}}}{s} \mathrm{T} = -a^2 \sqrt{2k} \lim \frac{t^n}{s},$$

c'est-à-dire $\lim x = -\frac{1}{2} \lim s = 0$. Quant à $y$, on sait déjà que son rapport à $x$ tend vers zéro. Donc $\lim y = 0$.

Nous allons maintenant étudier le cas exceptionnel $k = \frac{3}{4}$. Les formules précédentes cessent d'avoir lieu, et l'on trouve

$$s^2 = 6a^2 (\sqrt{\tfrac{3}{2}} - \sqrt{\tfrac{3}{2} - t^2});$$

puis

$$s^2 + 36\rho^2 = \textit{constante}.$$

C'est l'équation d'une *épicycloïde étoilée* à deux rebroussements. Pour cette courbe on a donc la propriété que les circonférences osculatrices, réduites aux $\frac{3}{4}$, passent toutes par les centres de gravité des arcs comptés à partir d'un sommet. On en déduit, en particulier, cette curieuse propriété : *le centre de gravité d'une demi-boucle est au point de rebroussement qui la termine.* Du reste les formules établies précédemment montrent que les coordonnées du centre de gravité sont

$$x = \frac{\rho^2 s}{12a^4}(s^2 - 36\rho^2), \quad y = \frac{\rho^3 s^2}{a^4}.$$

Elles s'annulent simultanément pour $\rho = 0$ aussi bien que pour $s = 0$. On voit, en outre, que l'arc dont la longueur est

$$s = 6\rho = \sqrt{\tfrac{1}{2}(s^2 + 36\rho^2)} = a\sqrt{3\sqrt{6}}$$

a le centre de gravité sur la normale en son point extrême, autre que l'origine.

Enfin, dans le cas limite $k = \frac{1}{2}$, on trouve que $ys$ doit être proportionnel à $\rho s$. Il faut donc que l'on ait

$$y = m\rho, \quad x = -m\frac{\rho}{s}\frac{d\rho s}{ds},$$

et, par suite,

$$\frac{1}{s}\frac{d\rho s}{ds} = \pm\sqrt{\frac{1}{m} - 1} = 2\alpha,$$

d'où

$$\rho = \alpha s + \frac{\beta}{s}.$$

Ces courbes, qui comprennent comme cas particuliers la *spirale logarithmique* et la *clothoïde*, sont caractérisées (*) par la propriété suivante : *le centre de gravité d'un arc quelconque appartient à la corde de l'arc correspondant d'une développoïde*, prise sous un angle dont le sinus est $\sqrt{m}$. Pour la clothoïde c'est la *développée* qu'il faut considérer, puisque $m = 1$. Le centre de gravité de tout arc de clothoïde est donc en ligne droite avec les centres de courbure aux extrémités. Dans notre problème on a $x = -2m\alpha\rho$, et il faut que $x$ et $y$ s'annulent avec $s$. Il faut donc et il suffit qu'on puisse en dire autant de $\rho$, et, par suite, que $\beta$ soit nul. Donc $\rho = \alpha s$, équation d'une spirale logarithmique. Ainsi, le centre de gravité d'un arc de spirale, dont une extrémité est au point asymptotique, appartient à la circonférence décrite sur le rayon de courbure à l'autre extrémité, pris comme diamètre.

Voici, pour terminer, une intéressante remarque. Si l'on charge $s^2$ en $2as$ et $\rho s$ en $a\rho$, on obtient l'équation

$$s = \frac{k}{1-k}\int \frac{d\rho}{\sqrt{2k\left(\frac{\rho}{a}\right)^{\frac{2k-1}{k-1}} - 1}},$$

qui caractérise les spirales sinusoïdes. Il y a donc (*), pour chacune de nos courbes, une spirale sinusoïde, dont le pôle marque sans cesse le centre de gravité d'un arc de la courbe considérée, lorsqu'on fait rouler la spirale sur cette courbe de manière que, par une contraction conti-

(*) *Rivista di Matematica*, 1892, p. 47.

nuelle de la courbe roulante, autour du point de contact, les deux lignes conservent entre elles un contact du second ordre. C'est ainsi qu'on obtient pour la clothoïde ($k = 1$) un cercle, pour la spirale logarithmique ($k = \frac{1}{2}$) une autre spirale logarithmique, pour l'épicycloïde étoilée à deux rebroussements ($k = \frac{3}{4}$) une cardioïde, etc. Dans les cas particuliers $k = \frac{2}{3}$ et $k = \frac{3}{2}$ on trouve aussi deux courbes connues, à savoir une parallèle à une épicicloïde, donc l'origine des arcs est un point de rebroussement, et une lemniscate de Bernoulli, dont le point double doit, à l'instant initial, coïncider avec l'origine des arcs de la courbe donnée. On s'explique tout cela en observant que les conditions auxquelles doivent satisfaire les coordonnées $x$, $y$, du centre de gravité, peuvent être mises sous la forme suivante :

$$\frac{d\frac{xs}{a}}{d\frac{s^2}{2a}} = \frac{\frac{ys}{a}}{\frac{\rho s}{a}} - 1, \qquad \frac{d\frac{ys}{a}}{d\frac{s^2}{2a}} = -\frac{\frac{xs}{a}}{\frac{\rho s}{a}}.$$

Elles expriment dès lors l'immobilité du point $\left(\frac{xs}{a}, \frac{ys}{a}\right)$ dans le plan de la courbe dont l'arc et le rayon de courbure sont $\frac{s^2}{2a}$ et $\frac{\rho s}{a}$. Pour amener le dernier point dans la position $(x, y)$ il faut que le plan de la courbe roulante se contracte continuellement, autour du point de contact, dans le rapport $\frac{a}{s}$. Cela rend le rayon de courbure $\frac{\rho s}{a}$ égal à $\rho$, et l'élément d'arc $\frac{sds}{a}$ égal à $ds$. C'est à la première circonstance qu'on doit la *conservation de l'ordre* du contact. On doit à la seconde le *roulement pur* d'une courbe sur l'autre. Nous aurions pu utiliser ces remarques pour déduire immédiatement l'équation intrinsèque de nos lignes de celle des spirales sinusoïdes, après avoir rappelé que, pour ces dernières lignes, la circonférence $x^2 + y^2 = 2k\rho y$ passe par le pôle, qui, pour $k \geqq \frac{1}{2}$, est un point de la courbe.

## *RÉCRÉATIONS ET PIÈGES MATHÉMATIQUES(*).

« Les matières de Géométrie sont si sérieuses d'elles-mêmes, qu'il est avantageux qu'il s'offre quelque occasion pour les rendre plus divertissantes. » (PASCAL.)

**1**. Une ficelle a 30 m. de long; chaque jour, d'un coup de ciseau, on en coupe un mètre. Dans combien de jours aura-t-on fini ?

**2**. Un escargot grimpant le long d'un poteau de 12 mètres fait 3 mètres le jour et redescend 2 mètres la nuit. Quand atteindra-t-il le sommet ?

**3**. Le 26 mai 1876, l'âge de Louis était les $\frac{5}{7}$ de l'âge de son frère Jean. Le 26 juillet suivant, il n'en était plus que les $\frac{7}{9}$. Trouver la date de la naissance de chacun d'eux.

**4**. Une brebis, un agneau et deux lapins mangeraient l'herbe d'un enclos, la première en 30 jours, le 2e en 45 jours et les deux derniers en 90 jours, si cette herbe ne poussait pas; mais l'herbe se renouvellerait en 60 jours. Dans combien de jours, l'herbe de l'enclos sera-t-elle épuisée ?

**5**. Un arabe laisse à ses trois fils 17 chameaux. Le premier doit en avoir la moitié, le second le tiers et le troisième le neuvième. Comment répartir les 17 chameaux ?

Le cadi appelé arrive monté sur son chameau, il y a alors 18 chameaux; le premier des frères en reçoit 9, le deuxième 6 et le troisième 2. Le cadi remonte sur son propre chameau et rentre sous sa tente.

**6**. Dans une cage de lapins et de faisans, il y a en tout 35 têtes et 94 pattes. Combien y a-t-il d'animaux de chaque espèce ?

**7**. Une montre à trois aiguilles marque deux heures; à quelle heure l'aiguille des secondes sera-t-elle bissectrice de l'angle des deux autres ? Les pointes des trois aiguilles (supposées concentriques et de même longueur) peuvent-elles former un triange équilatéral ?

**8**. On attache une chèvre à un poteau dans une prairie par une corde dont la longueur est telle que la chèvre trouve à se nourrir pendant un jour. Quelle longueur faut-il donner à cette corde le 2e jour, le 3e jour, etc. ?

On fait abstraction de l'herbe qui repousse.

---

(*) Presque toutes les récréations sont tirées de l'ouvrage de M. Rebière « Mathématiques et Mathématiciens ». La 10e nous a été communiquée par M. L. Meurice.

**9.** Établir une addition composée de tous les neuf premiers chiffres sans les répéter et sans employer le zéro, de façon que le total soit 100.

*Réponse* $74+25+\frac{3}{6}+\frac{9}{18}$.

**10.** Joseph Vinot (et avant lui Ozanam) a publié dans ses « Récréations mathématiques » la question suivante sous le titre « Un cent de piquet sans cartes ».

Au jeu le premier joueur énonce un nombre inférieur à 11; le 2$^{d}$ y ajoute un nombre également inférieur à 11; le 1$^{er}$ ajoute au résultat un nombre inférieur à 11, et ainsi de suite. La partie est gagnée par celui qui arrive au nombre 100.

Pour *s'assurer* la victoire à ce jeu, il suffit de s'emparer des nombres 1, 12, 23, 34, ... 89, 100.

Plus généralement, supposons qu'il s'agisse d'arriver au nombre N en ajoutant des nombres inférieurs à $n$. Soit $N = nq + r$. Le premier joueur s'assure la victoire s'il choisit comme premier nombre $r$; car il peut faire en sorte qu'il énonce successivement les nombres $r + n$, $r + 2n$,...

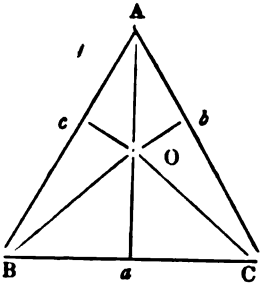
**11.** *Tous les nombres sont égaux entre eux.* Soient $a$ et $b$ deux nombres quelconques ayant $c$ pour différence. Alors $a - b = c$.

Multiplions les deux membres de cette égalité par $a - b$. Il vient successivement

$$a^2 - ab - ab + b^2 = ac - bc, \quad a^2 - ab - ac = ab - b^2 - bc,$$
$$a(a - b - c) = b(a - b - c).$$

Divisant les deux nombres par $a - b - c$, on a $a = b$. Donc les deux nombres $a$, $b$ sont égaux entre eux (Laisant et Perrin, *Algèbre*, p. 312).

**12.** *Tous les triangles sont isoscèles.* Considérons, dans le triangle ABC, la bissectrice AO de l'angle A, et la perpendiculaire $aO$ au milieu du côté BC (médiatrice de BC). Si la bissectrice est perpendiculaire sur le côté BC, on sait qu'elle se confond avec $aO$ et que AB = AC (Legendre, I, 11). Si la bissectrice n'est pas perpendiculaire sur le côté BC, du point O, où elle rencontre la médiatrice $aO$, abaissons les perpendiculaires $Ob$ et $Oc$ respectivement sur AC et AB. Les triangles $AOb$, $AOc$ sont égaux, comme triangles rectangles ayant l'hypoténuse AO commune et les angles aigus $OAb$, $OAc$ égaux; donc $Ab = Ac$ (1) et $Ob = Oc$.



Les triangles rectangles $a$OB, $a$OC sont égaux comme ayant les angles droits en $a$ compris entre côtés égaux, savoir : O$a$ commun et $a$B = $a$C. Donc OB = OC. Enfin les triangles rectangles O$b$C, OB$c$ sont égaux comme ayant leurs hypoténuses OC, OB égales et les côtés O$b$, O$c$ égaux. Il en résulte $b$C = $c$B (2). Des relations (1) et (2), on déduit

$$Ab + bC = Ac + cB,$$

c'est-à-dire AC = AB. Donc *tous les triangles sont isoscèles.*

---

## NOTES MATHÉMATIQUES.

**22.** *Sur les cercles osculateurs* (Voir *Mathesis*, pp. 120 et 140). M. E. Cesaro avait déjà signalé dans ce journal le théorème suivant : *Les cercles osculateurs d'une courbe plane ne peuvent rencontrer un même cercle sous un angle constant.*

La question 670 (voir *Mathesis* (1), IX, p. 280; (2), I, p. 168), qui énonce cette proposition et pose la question analogue relative aux sphères osculatrices d'une courbe gauche, a été traitée par M. Jamet.

**23.** *Sur les quadriques homofocales.* — La propriété des coniques homofocales, énoncée dans le dernier n° de *Mathesis*, p. 150, a son analogue dans les quadriques homofocales (*Salmon-Chemin*, § 193). Voici une démonstration géométrique du théorème relatif aux surfaces du second ordre.

Soit U une surface du système homofocal, et soient P le pôle d'un plan $\pi$ par rapport à U, Q la projection de P sur $\pi$, S l'intersection de $\pi$ avec le diamètre conjugué OP; d'après un théorème connu, Q est le point de contact de $\pi$ avec une surface U′ du système homofocal. Si le plan $\pi$ se déplace parallèlement à lui-même, les points P et S décrivent deux ponctuelles projectives et le plan PQS reste fixe; donc les droites PQ, SQ se correspondent dans deux faisceaux parallèles projectifs, et leur point d'intersection décrit une conique passant par les centres de ces faisceaux, c'est-à-dire une hyperbole équilatère dont les asymptotes sont parallèles aux droites PQ, SQ. (Cl. Servais.)

Pour établir une théorie des quadriques homofocales, on peut prendre pour point de départ la proposition suivante : *Soit* P *le pôle d'un plan* $\pi$ *par rapport à une quadrique* U, *et soit* $p$ *la perpendiculaire abaissée de* P *sur* $\pi$. *Les traces de* $p$ *et* $\pi$ *sur un plan principal de* U *sont dans la*

*relation de pôle et polaire par rapport à une conique fixe.* Ce théorème se démontre à l'aide d'un calcul facile. Si $x, y, z$ sont les coordonnées de P, et si $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ est l'équation de U, les équations de $\pi$ et $p$ sont

$$\frac{Xx}{a^2}+\frac{Yy}{b^2}+\frac{Zz}{c^2}=1, \quad \frac{a^2(X-x)}{x}=\frac{b^2(Y-y)}{y}=\frac{c^2(Z-z)}{z};$$

les traces de $\pi$ et $p$ sur le plan $xy$ sont définies par

$$\frac{Xx}{a^2}+\frac{Yy}{b^2}=1, \quad X=\frac{x(a^2-c^2)}{a^2} \text{ et } Y=\frac{y(b^2-c^2)}{b^2};$$

la première est la polaire de la seconde par rapport à la conique

$$\frac{x^2}{a^2-c^2}+\frac{y^2}{b^2-c^2}=1.$$

Le théorème est donc démontré. On voit aussi que les coniques par rapport auxquelles les traces de $p$ et $\pi$ sur un plan principal de U sont dans la relation de pôle et polaire, sont les mêmes pour toutes les quadriques comprises dans l'équation

$$\frac{x^2}{a^2-\lambda}+\frac{y^2}{b^2-\lambda}+\frac{z^2}{c^2-\lambda}=1,$$

où $\lambda$ est un paramètre variable.

*Les pôles de $\pi$ par rapport à ces quadriques sont situés sur une même droite $p$* (*Salmon-Chemin*, § 167); car d'après le théorème établi ci-dessus, les perpendiculaires abaissées de ces pôles sur $\pi$ rencontrent les plans principaux aux mêmes points.

Le point de rencontre de $p$ avec $\pi$ est le pôle de $\pi$ par rapport à l'une des surfaces (A); c'est, évidemment, le point de contact de $\pi$ avec cette surface. C'est là la propriété dont M. Servais s'est servi ci-dessus. (J. N.)

---

## SOLUTIONS DE QUESTIONS D'EXAMEN.

### Concours de l'École Polytechnique de Paris en 1893.

(Voir *Mathesis*, p. 139.)

I. *Étant donnés un plan $\pi$ et deux sphères* S, S' *de rayons* R *et* R', *ayant leurs centres dans ce plan, on considère une sphère variable* $\Sigma$, *tangente aux deux premières et au plan. On demande :*

*1° le lieu géométrique du point de contact de la sphère Σ avec le plan donné.*
*2° le lieu géométrique du centre de la sphère Σ.*

Soient O, O', O'' les centres des sphères S, S', Σ, et A, B, P les points de contact de Σ avec S, S' et le plan donné $\pi$.

1° Si les sphères S et S' sont extérieures, tangentes extérieurement ou sécantes, elles touchent Σ de la même manière ; A et B sont des points antihomologues de S et S', c'est-à-dire que la droite AB passe par le centre de similitude externe T des sphères S, S' et le produit TA. TB est constant. Mais $\overline{TP}^2 = TA.TB$; donc le lieu de P est la circonférence par rapport à laquelle les sections des sphères S, S' par le plan $\pi$ sont des lignes inverses.

On ne peut supposer les contacts de S et S' avec Σ d'espèces différentes; car la sphère Σ traverserait le plan $\pi$. Si les sphères S, S' sont tangentes intérieurement ou intérieures l'une à l'autre, leurs contacts avec Σ sont d'espèces différentes, et le lieu de P est une circonférence ayant pour centre le centre de similitude interne de S et S'.

2° Prolongeons O''P de PQ = R, et par O menons un plan $\pi'$ parallèle à $\pi$. O'' est à égale distance du point O et du plan $\pi'$ ; par suite, il appartient à un paraboloïde de révolution ayant pour foyer O, pour plan directeur le plan $\pi'$. Si l'on prend deux axes rectangulaires dans le plan $\pi$ et un troisième perpendiculaire à ce plan, et que l'on désigne par $(\alpha, \beta, 0)$ les coordonnées de O, par $(x, y, z)$ celles de O'', la condition O''Q = O''O s'exprime par l'équation

$$z + R = \sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + z^2}.$$

De même

$$z + R' = \sqrt{(x-\alpha')^2 + (y-\beta')^2 + z^2}.$$

Retranchant ces équations l'une de l'autre après avoir élevé les deux membres au carré, on obtient

$$(\alpha-\alpha')\left(x - \frac{\alpha+\alpha'}{2}\right) + (\beta-\beta')\left(y - \frac{\beta+\beta'}{2}\right) + (R-R')\left(z + \frac{R+R'}{2}\right) = 0.$$

Pour simplifier, faisons passer l'axe des $x$ par O et O', de manière que $\beta = 0$, $\beta' = 0$ ; l'équation précédente se réduira à

$$(\alpha-\alpha')\left(x - \frac{\alpha+\alpha'}{2}\right) + (R-R')\left(z + \frac{R+R'}{2}\right) = 0.$$

On en conclut que le lieu de O'' est une ellipse située dans un plan perpendiculaire à celui qui est mené par la droite OO' perpendiculairement à $\pi$; la trace de ce plan sur le plan $xz$ passe par le point $x = \frac{\alpha + \alpha'}{2}$, $z = -\frac{R + R'}{2}$ et a pour coefficient angulaire $-\frac{\alpha - \alpha'}{R - R'}$.

Nous avons supposé la sphère $\Sigma$ située au-dessus du plan P. Une seconde conique, symétrique de la précédente par rapport au plan P, correspond aux sphères $\Sigma$ situées au-dessous du plan P.

Les deux coniques ont pour projection horizontale la circonférence décrite par le point P.

II. *On donne deux sphères de centres* C, C' *et un cône de révolution de sommet* O, *dont l'axe est perpendiculaire au plan* COC'; *le triangle* COC' *est rectangle en* O. *On demande :*

*1° de former les équations du lieu des centres des sphères tangentes au cône et aux deux sphères données;*

*2° de discuter la nature de ce lieu dans le cas où le triangle rectangle* COC' *devient isoscèle, où les sphères données sont égales et où, de plus, la sphère variable touche les sphères données toutes deux extérieurement, ou toutes deux intérieurement.*

Prenons pour axes les droites OC, OC' et l'axe du cône, et soient $(\alpha, 0, 0)$, $(0, \beta, 0)$, $(x, y, z)$ les coordonnées des centres C, C', C'' des trois sphères.

1° On trouve d'abord les égalités

$$(x - \alpha)^2 + y^2 + z^2 = (R + R'')^2, \tag{1}$$

$$x^2 + (y - \beta)^2 + z^2 = (R' + R'')^2, \tag{2}$$

en exprimant que les distances C''C, C''C' sont égales aux sommes des rayons des sphères correspondantes.

Soit OL la génératrice du cône située dans le plan OzC'', et soit Ox' la trace de ce plan sur le plan $xy$. Si l'on rapporte, pour un moment, OL et C'' aux axes de coordonnées Ox', Oz, et qu'on désigne par $\delta$ l'angle LOz, l'équation de OL est $x' \cos\delta - z \sin\delta = 0$; en exprimant que la distance de C'' à cette droite est égale à R'', on trouve

$$x' \cos\delta - z \sin\delta = R'',$$

ou

$$\sqrt{x^2 + y^2} \cos\delta - z \sin\delta = R''. \tag{3}$$

Eliminons R'' entre les équations (1), (2) et (3); il vient

$$(x-\alpha)^2+y^2+z^2=(\sqrt{x^2+y^2}\cos\delta-z\sin\delta+R)^2,$$
$$x^2+(y-\beta)^2+z^2=(\sqrt{x^2+y^2}\cos\delta-z\sin\delta+R')^2.$$

Telles sont les équations du lieu du centre de la sphère variable.

2° Supposons OC = OC', R = R'. Le centre C'' se trouve évidemment dans le plan $\sigma$ mené par O perpendiculairement à CC', et le contact de la sphère variable avec le cône a lieu sur une génératrice fixe OL.

Menons un plan $\sigma'$ parallèle au plan qui touche le cône suivant OL, à la distance R. C'' étant à égale distance de ce plan et du point C, il appartient à un paraboloïde de révolution ayant pour foyer O, pour plan directeur $\sigma'$. Le plan $\sigma$ rencontre ce paraboloïde suivant une parabole, qui est le lieu du centre de la sphère variable(*). (J. N.)

---

## Concours pour l'admission à Saint-Cyr, 1893.

I. *On donne un triangle* ABC *et, dans l'espace, une droite indéfinie* X'AX *passant par* A *et faisant avec* AB *et* AC *les angles* $\beta$, $\gamma$. *Un point* M *se meut sur la droite* X'AX. *Étudier la variation du rapport* $\frac{MB}{MC}$. — *Montrer que les positions remarquables du point* M *sont les points de rencontre de la droite* X'AX *avec la sphère qui a son centre sur cette droite et qui passe par les points* B *et* C.

Si l'on fait AM = $x$, AB = $b$, AC = $c$, le rapport à étudier est

$$\lambda^2=\frac{x^2-2bx\cos\beta+b^2}{x^2-2cx\cos\gamma+c^2}.$$

Cette expression convient aux points de AX et à ceux de AX' pourvu que l'on donne à $x$ le signe + ou le signe —.

Pour simplifier la discussion, nous substituons au triangle donné ABC le triangle qui pour base BC et pour sommet le point de rencontre A' de la droite XX' avec le plan perpendiculaire au milieu de BC. Appelons encore $\beta$ et $\gamma$ les angles XA'B, XA'C et faisons A'B = A'C = $m$; la quantité à discuter devient

$$\lambda^2=\frac{x^2-2mx\cos\beta+m^2}{x^2-2mx\cos\gamma+m^2}. \qquad (1)$$

---

(*) Le J. M. S. a publié récemment une solution des mêmes questions.

L'égalité (1) peut prendre la forme

$$(\lambda^2 - 1)x^2 - 2m(\lambda^2 \cos\gamma - \cos\beta)x + (\lambda^2 - 1)m^2 = 0. \qquad (2)$$

On voit qu'à une même valeur de $\lambda$ correspondent deux valeurs de $x$ dont le produit est égal à $m^2$, c'est-à-dire deux points M, M' tels que $A'M.\,A'M' = m^2$.

L'équation (2) donne

$$x = m\,\frac{\lambda^2\cos\gamma - \cos\beta \pm \sqrt{-\lambda^4\sin^2\gamma - \sin^2\beta + 2\lambda^2(1 - \cos\gamma\cos\beta)}}{\lambda^2 - 1}.$$

Pour que $x$ soit réel, $\lambda^2$ doit être compris entre les racines de l'équation

$$\lambda^4\sin^2\gamma - 2\lambda^2(1 - \cos\gamma\cos\beta) + \sin^2\beta = 0.$$

On en conclut un minimum et un maximum de $\lambda^2$, donnés par

$$\lambda_1^2 = \frac{1 + \cos\beta}{1 + \cos\gamma}, \quad \lambda_2^2 = \frac{1 - \cos\beta}{1 - \cos\gamma},$$

si $\beta > \gamma$. Les racines de l'équation (2) étant égales entre elles pour $\lambda = \lambda_1$ ou $\lambda = \lambda_2$, les points de XX' qui correspondent au minimum ou au maximum de $\lambda^2$ sont les points $\mu, \mu'$ situés à la distance $m$ de A'; pour $\lambda = \lambda_1$ on obtient $x = -m$, etc.

Cela posé, lorsque M parcourt la droite indéfinie X'X dans le sens X'X, $\lambda$ décroît de 1 à $\lambda_1$ sur le segment $X'\mu$, croît de $\lambda_1$ à 1 sur $\mu A'$, croît de 1 à $\lambda_2$ sur $A'\mu'$, enfin décroît de $\lambda_2$ à 1 sur $\mu' X$.

On peut observer que les points B, C, $\mu$, $\mu'$, sont sur une même sphère de centre A'.

On arrive aux mêmes conclusions en considérant le lieu d'un point M dont les distances à B et C sont dans un rapport donné $(\lambda : 1)$. Ce lieu est la sphère qui a pour extrémités d'un même diamètre les points D, D' qui divisent BC harmoniquement dans le rapport donné. Si $\lambda > 1$, le rapport des distances de B et C à un point extérieur à cette sphère est plus petit que $\lambda$; pour un point intérieur, le rapport est plus grand que $\lambda$. Si l'on fait croître $\lambda$ à partir de l'unité, on obtient des segments successifs DD' qui comprennent l'un l'autre, et les sphères successives sont chacune intérieure à la précédente. Ces sphères déterminent sur X'X des couples de points M, M' tels que les rapports $\frac{MA}{MB}$ et $\frac{M'A}{M'B}$ sont égaux à la valeur correspondante de $\lambda$. Le maximum de $\lambda$ a lieu pour la sphère

touchant X'X. Comme le produit des distances du milieu de BC aux points D, D' a une valeur constante, les sphères considérées ont pour plan radical commun le plan perpendiculaire au milieu de BC; par suite, le produit A'M.A'M' est constant(*). La sphère tangente à X'X a donc son point de contact situé à la distance A'B de A'. Les valeurs de $\lambda$ inférieures à l'unité donnent lieu à une discussion analogue à la précédente(**).

II. ***On connaît dans un triangle le côté a, l'angle*** A ***et le produit*** $b(b+c)=k^2$ ***; calculer b et c. Discussion. Construire, sans calcul, le triangle.***

Éliminant $c$ entre les équations

$$b(b+c)=k^2, \quad a^2=b^2+c^2-2bc\cos A,$$

on trouve

$$4\cos^2\frac{A}{2}b^4-\left(4k^2\cos^2\frac{A}{2}+a^2\right)b^2+k^4=0. \qquad (1)$$

Cette équation donne deux valeurs réelles de $b^2$ si

$$\left(4k^2\cos^2\frac{A}{2}+a^2\right)^2\geq 16k^4\cos^2\frac{A}{2};$$

d'où, en extrayant les racines carrés des deux membres,

$$a^2\geq 4k^2\cos\frac{A}{2}\left(1-\cos\frac{A}{2}\right) \quad \text{ou} \quad \geq 8k^2\cos\frac{A}{2}\sin^2\frac{A}{2}.$$

Supposons cette condition remplie. Les deux valeurs de $b^2$ seront positives; comme $bc=k^2-b^2$, elles doivent, pour satisfaire au problème, être inférieures à $k^2$.

Le problème n'a qu'une seule solution si le premier membre de (1) a des signes contraires pour $b=0$ et $b=k^2$; la substitution $b=k^2$ doit donc donner un résultat négatif, ce qui conduit à l'inégalité $k^2<a^2$.

Si $k^2>a^2$, les deux valeurs de $b^2$ sont inférieures à $k^2$ ou supérieures à $k^2$; par suite, leur demi-somme est, respectivement, inférieure ou supé-

(*) Comme les points D, D' peuvent se réunir en C ou B, on a $A'M.A'M'=\overline{A'C}^2=\overline{A'B}^2$.

(**) Comparer les solutions qui ont paru dans le n° du 1er juillet du *Journal de Vuibert* et dans le n° du 15 juillet du J. M. E. de M. de Longchamps.

rieure à $k^2$. Donc le problème admet deux solutions ou est impossible suivant que $k^2 \gtrless a^2 : 4\cos^2\frac{A}{2}$.

Pour construire le triangle, prolongeons BA de AD = AC. L'angle CAD étant donné, on connaît le rapport $\frac{CD}{AC}$; donc le produit

$$DB \cdot DC = DB \cdot AC \cdot \frac{CD}{AC} = k^2 \cdot \frac{CD}{AC}$$

est connu. Ainsi, dans le triangle DBC on connaît la base BC, le produit des deux autres côtés et l'angle $BDC = \frac{1}{2}A$; on est donc ramené à un problème connu.

---

## LE COMITÉ LOBATCHEFSKY.

L'appel du comité Lobatchefsky de Kasan a été entendu. Un grand nombre de géomètres russes et étrangers ont consenti à faire partie de ce comité comme membres d'honneur (*). Nous en donnons ci-dessous la liste abrégée. A cette occasion, nous signalerons une petite erreur qui s'est glissée dans le texte de la circulaire publiée en mai dernier. C'est le 2 novembre 1893 et non le 22 octobre que tombe le centième anniversaire de la naissance de Lobatchefsky.

Les œuvres géométriques complètes de Lobatchefsky ont été publiées il y a quelques années, et comprennent deux tomes (**):

Vol. I. *Œuvres en langue russe.* Les principes de la géométrie, 1-70. — Géométrie imaginaire, 71-121. — Application de la géométrie imaginaire à l'évaluation des intégrales, 121-219. — Nouveaux principes de la géométrie, avec la théorie complète des parallèles, 219-487. — Pangéométrie, 487-550.

Vol. II. *Œuvres en langue française et allemande* (avec le portrait de N. I. Lobatchefsky). — Notice biographique. — Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien, 553-578. — Géométrie imaginaire, 579-614. — Pangéométrie ou précis de géométrie fondée sur une théorie générale et rigoureuse des parallèles, 614-680. — Liste des ouvrages qui ont rapport à la géométrie non-euclidienne (I-XX).

---

(*) Le nombre et l'importance des adhésions feront sans doute réfléchir ceux qui pensent que la géométrie euclidienne est le seul système possible de géométrie et qu'elle est certainement réalisée dans le monde physique.

(**) En vente à la Société Physico-mathématique de Kasan. Prix du premier volume, 5 roubles; prix du second, 3 roubles. Les deux volumes ensemble 6 roubles, environ 15 francs. Le nombre des exemplaires est très restreint.

MEMBRES D'HONNEUR DU COMITÉ.

Alexeief, V. G. (Moscou). — Andreief, K. A. (Kharkof). — Anissimof, V. A. (Varsovie). — Battaglini, G. (Naples). — Beltrami, E. (Rome). — Bobynine, V. V. (Moscou). — Boucreief, B. I. (Kief). — Bougaief, N. W. (Moscou). — Cayley, A. (Cambridge). — Cesaro, E. (Naples). — Darboux, G. (Paris). — Dolbnia, I. P. (Nijni-Novogorod). — Durège, H. (Prague). — Dyck, W. (Munich). — Engelhardt, W. P. (Dresde). — Erdmann, B. (Halle). — Escherich, G. (Vienne). — Fedorof, E. S. (St-Pétersbourg). — Flye de St. Marie, C. (Paris). — Frischauf, I. (Gratz). — de Galdeano, Z. G. (Saragosse). — Gesechus, N. (St-Pétersbourg). — Groth, N. I. (Moscou). — Guccia, I. B. (Palerme). — Günther, S. (Munich). — Halsted, G. B. (Austin, Texas). — Helmholtz (von), H. (Charlottenbourg). — Hermite, Ch. (Paris). — Ianichefsky, E. P. (Kasan). — Iarochenko, S. P. (Odessa). — Joukofsky, N. E. (Moscou). — Killing, W. (Münster). — Kirpitchef, W. L. (Kharkof). — Klein, F. (Göttingen). — Kneser, A. (Dorpat). — Korkine, A. N. (St-Pétersbourg). — Kovalsky, M. F. (Kharkof). — Lachtine, L. K. (Dorpat). — Lampe, E. (Berlin). — Liapunof, A. M. (Kharkof). — Lie, S. (Leipsig). — Liebmann, O. (Bonn). — Liguine, W. N. (Odessa). — Lindemann, Ed. (Poulkova). — Lindemann, F. (Königsberg). — Lipschitz, R. (Bonn). — Loria, G. (Gênes). — Lüroth, J. (Fribourg). — Macfarlane, A. (Austin, Texas). — Makarof, A.N. (St-Pétersbourg). — Mansion, P. (Gand). — Markof, A. A. (St-Pétersbourg). — Mehmke, R. (Darmstadt). — Mittag-Leffler, G (Stockholm). — Mlodziiewski, B. K. (Moscou). — Moore, E. H. (Chicago). — Neovius, E. R. (Helsingfors). — Newcomb, S. (Baltimore). — d'Ovidio, E. (Turin). — Pasch, M. (Giessen). — Peano, G. (Turin). — Perott, I. (Worcester, Massachussets). — Pervouchine, I. M., Prêtre, district de Chadrinsk (gouvern. de Perm). — Poincaré, H. (Paris). — Pokrovsky, P. M. (Kief). — Poretsky, P. S., Astronome à Gorodnia (gouvernement de Tchernigof). — Posse, H. A. (St-Pétersbourg). — Potapof, N. G. (Kasan). — Pouchta, A. (Czernovitz). — Preobragensky, P. W. (Moscou). — Ptaschitzky, L. (St-Pétersbourg). — Rakhmaninof, I. I. (Kief). — Reye, Th. (Strasbourg). — Schapira, H. (Heidelberg). — Schering, E. (Göttingen). — Schiff, P. A. (St-Pétersbourg). — Madame Schiff, V. I., Professeur à l'École supérieure de femmes (St-Pétersbourg). — Schiller, N. N. (Kief). — Schlegel, V. (Hagen). — Schoute, P. H. (Groningue). — Schur, F. (Aix-la-Chapelle). — Segre, C. (Turin). — Selivanof, D. F. (St-Pétersbourg). — Sichatel, V. A. (Orenbourg). — Slechinski, I. V. (Odessa). — Sloudsky, F. A. (Moscou). — Sokhotzki, I. W. (St-Pétersbourg). — Sonine, N. I. (Varsovie). — Souslof, G. K. (Kief). — Stebnitsky, J. I., Chef de section géodésique de l'État Général (St-Pétersbourg). — Stoletof, A. G. (Moscou). — Stringham, I. (Berkeley, Californie). — Sylvester, J. J. (Oxford). — Tchebychef, P. L. (St-Pétersbourg). — Tchekhovitch, K. A., Inspecteur (Orenbourg). — Teixeira, G. (Oporto). — Tikhomandritsky, M. A. (Kharkof). — Tillo, A. A. (St-Pétersbourg). — De Tilly, I. M., Commandant de l'École militaire (Bruxelles). — Timé, I. A. (St-Pétersbourg). — Veronese, G. (Padoue). — Vorochilof, K. V. (Kasan). — Weyr, Ed. (Prague). — Wvedensky, A. I. (St-Pétersbourg). — Zinger, V. I. (Moscou). — Zinine, N. N. (Varsovie).

BUREAU DU COMITÉ.

Le Président de la Société Physico-mathématique à l'Université Impériale de Kasan, A. V. Vassilief, Professeur.
Le Vice-Président de la Société Physico-mathématique, F. M. Souvorof, Professeur.
Bechteref, V. M., Professeur à l'Université, Président de la Société Nevropathologique.
Goldhammer, D. A., Professeur à l'Université.
Imchenik, I. A., Directeur du Gymnase.
Isnoskof, I. A., Directeur de l'École Réale.
Jbikofsky, A. K., Dr., Professeur émérite du Gymnase.
Kotelnikof, A. P., Agrégé de l'Université.
Nasimof, P. S., Professeur à l'Université.
Porfirief, N. I., Agrégé de l'Université.
Sintzof, D. M., Maître de mathématiques.
Slouginof, N. P., Professeur à l'Université.
Smirnof, A. I., Professeur à l'Université.

Les souscriptions sont reçues jusqu'au 2 mai 1894, à l'adresse suivante : Kasan, Société Physico-mathématique.

---

## BIBLIOGRAPHIE.

**Traité d'arithmétique** à l'usage des élèves de mathématiques élémentaires, des aspirants au baccalauréat de l'enseignement classique (2e *série*) et au baccalauréat de l'enseignement moderne (3e *série*) et des candidats à l'institut agronomique, avec des compléments destinés aux candidats aux grandes écoles du gouvernement, par E. HUMBERT, ancien élève de l'École normale supérieure, Agrégé des Sciences mathématiques, Professeur de Mathématiques spéciales au lycée Louis-le-Grand, et une Préface de Jules Tannery, Directeur des études scientifiques à l'École normale supérieure. Paris, Nony et Cie (in-8°, de 478 pages). Prix : 5 francs.

Nous ne pouvons donner une meilleure idée du livre de M. E. Humbert qu'en transcrivant la majeure partie de la préface de M. J. Tannery, puis la table des matières. Nous ferons ensuite quelques observations critiques.

« Il y a plaisir à voir un professeur de mathématiques spéciales, aussi distingué que M. H., écrire un traité d'Arithmétique, quand l'Arithmétique ne figure plus sur les programmes des examens auxquels ses élèves se préparent : pourtant il pensait peut-être encore à ses élèves en l'écrivant : il arrive plus d'une fois qu'un étudiant, déjà avancé, déjà rompu au mécanisme du calcul, est arrêté parce qu'il n'a pas suffisamment réfléchi au sens des opérations fondamentales, ni à tout ce que contient l'idée de nombre. S'il s'en aperçoit, il est sauvé, et le temps qu'il passera à lire un livre comme celui de M. Humbert ne sera pas perdu pour la suite de ses

études, et même pour ses examens : la clarté dans laquelle il verra les éléments se projettera, à son grand étonnement, sur bien des parties de la science qui étaient restées pour lui dans la brume. Et si quelqu'une de ces belles propriétés des nombres que développe l'auteur, et qui donnent accès dans les parties élevées de l'Arithmétique l'émerveillent, l'attirent, et lui donnent le désir d'en savoir davantage, qu'il se réjouisse : je crois bien qu'il n'y a pas de mathématicien véritable qui n'ait ressenti cette curiosité et cette passion.

« Sur divers points, le livre de M. Humbert se distingue nettement des ouvrages écrits sur la même matière.

« Dès le début, à propos de la soustraction, M. Humbert introduit le nombre entier *négatif*. Disons de suite que tout ce qui concerne ces nombres est imprimé en petits caractères et n'importe aucunement à l'intelligence des théories fondamentales de l'Arithmétique, que l'auteur a exposées de la façon la plus élémentaire possible : tout ce qui est imprimé en gros caractères peut être lu sans qu'on soit obligé de recourir au reste, en sorte que le livre de M. Humbert s'adresse aussi bien à des élèves de troisième, qu'à des élèves de mathématiques élémentaires. J'ai entendu soutenir à de très bons esprits la convenance d'introduire ainsi les nombres négatifs en Arithmétique : l'Algèbre dès lors a un domaine nettement limité : c'est la théorie des fonctions entières d'une ou de plusieurs variables. Au point de vue logique, cette façon de présenter les choses me paraît être la meilleure; au point de vue pédagogique, l'expérience seule peut la juger. Dans un livre, en tous cas, cette tentative ne présente aucun danger; dans l'enseignement, son succès est, à ce que je crois, une affaire de mesure, et il me semble qu'elle peut parfaitement réussir avec des élèves de mathématiques élémentaires, qui revoient l'Arithmétique, et qui sont déjà initiés à l'Algèbre. Quant aux avantages qu'elle présente, ils sont assez évidents pour qu'on me dispense d'y insister. M. Humbert a introduit les nombres négatifs en partant de ce qu'on a appellé de l'autre côté du Rhin, le *principe de permanence*. Il n'y met, bien entendu, aucun pédantisme. La démonstration imagée qu'il emploie pour établir la propriété fondamentale des sommes algébriques a le grand avantage d'être courte et générale.

« Pour ce qui concerne les opérations fondamentales de l'Arithmétique, M. Humbert, suivant en cela beaucoup d'auteurs, place d'ordinaire après la théorie de l'opération les propriétés essentielles qui résultent de la définition : il me semble que l'ordre inverse serait préférable : c'est sur ces propositions surtout qu'il convient d'appeler l'attention du lecteur, et, d'ailleurs, elles éclairent l'opération elle-même, qui n'est qu'un mécanisme de calcul dont, à la vérité, il importe de se rendre compte.

« On a pris l'habitude d'enseigner la théorie de la divisibilité en l'appuyant sur celle du plus grand commun diviseur; l'auteur respecte cet ordre, qui est excellent; mais il a tenu à montrer qu'il n'est pas indispensable, et a reproduit la démonstration directe que Gauss a donnée de cette proposition : Un nombre premier ne peut diviser un produit de deux facteurs sans diviser l'un d'eux.

« Dans la plupart des ouvrages élémentaires, l'introduction de l'idée de fraction n'est pas faite avec la clarté désirable, et on ne sait pas toujours très bien si l'on

raisonne sur un nombre ou sur une grandeur. S'il s'agit de nombres, que signifient ces mots : rendre une fraction trois fois plus grande, trois fois plus petite ? Qu'est-ce même que deux fractions égales ? M. Humbert a pris là-dessus très nettement position : deux fractions sont égales, si elles peuvent servir à mesurer la même longueur : et, de même, pour l'addition, la soustraction, c'est l'idée d'addition, ou de soutraction des longueurs qu'il prend pour point de départ; pour la multiplication, c'est le théorème sur l'aire du rectangle; les démonstrations qu'il donne sont très claires et très bien adaptées à l'enseignement.

« Il est aussi légitime, à mon avis, après avoir rattaché, comme il me paraît nécessaire dans l'enseignement, l'idée de fraction à la mesure de la plus simple des grandeurs continues, de la détacher de son origine concrète pour définir abstraitement l'égalité et les opérations fondamentales : ce qui n'est pas légitime, c'est de rester dans le vague.

« Je ne connais rien de plus insupportable en mathématiques que les nombres irrationnels; leur introduction en arithmétique est un véritable scandale : dans ce domaine si élémentaire, à côté de cette notion de nombre entier qui est la plus claire du monde, à côté de ces propositions si précises, de ces démonstrations si nettes que les plus grands mathématiciens ont pris à cœur d'accroître et de simplifier, et qui ont toute la beauté, toute la perfection de celles que les Grecs nous ont léguées, voici venir tout le cortège du transcendant et de l'infini. C'est là, non ailleurs, que sont condensées toutes les difficultés des idées de limite, de convergence, de continuité. Que faire pourtant, si l'on veut seulement écrire $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ ? Nous n'y pouvons rien, et c'est en vain qu'on se révoltera : cette idée de l'infini est dans la nécessité des choses; on la réduira, si l'on veut, à ses termes les plus simples, à dire qu'après un nombre entier il y en a un autre, on ne s'en débarrassera pas, pas plus en Arithmétique qu'ailleurs.

« A vrai dire, la sagesse est de reconnaître les difficultés là où elles sont, et l'honnêteté dans l'enseignement ne consiste pas à dire tantôt *on verra plus tard*, tantôt *on a déjà vu*, sans jamais rien montrer. Tout au moins, qu'on ait le courage de dire : il y a là un trou. Mais M. Humbert, qui écrivait aussi pour ceux qui doivent aller plus loin que le « trou », a eu raison d'essayer d'y faire pénétrer le plus de lumière possible, et de donner tous ses soins à bien éclairer la notion de nombre irrationnel. Son point de départ est le même que celui qu'il a pris pour les fractions, l'idée de longueur : à chaque longueur est attaché un nombre rationnel ou non; à chaque nombre rationnel ou non, une longueur est attachée : cette longueur sert à définir l'égalité, comme l'addition et la soustraction : d'ailleurs, on montre comment on peut se passer de cette considération concrète, au moyen d'opérations arithmétiques effectuées sur des nombres rationnels, et poursuivies jusqu'à l'infini.

« Ce procédé, qui a l'avantage de laisser un point d'appui à l'élève, de ne pas le noyer dans l'abstrait, suppose, comme le fait remarquer l'auteur, un postulat qui est étranger à l'idée de nombre, et qui n'est autre chose, quand on définit le nombre irrationnel abstraitement, que l'existence même d'un segment de droite mesuré

par ce nombre. Comme ce postulat est, en tout cas, absolument nécessaire, quand on veut appliquer l'algèbre à la géométrie, il n'y a rien à objecter à ce qu'on l'introduise.

« Enfin M. Humbert a voulu, avec raison, donner à son lecteur accès dans la théorie des nombres. Il importe, pour la bonne formation de l'esprit des étudiants, de leur montrer que la science n'est pas limitée, et qu'ils ne la possèdent pas dès qu'ils sont arrivés à la fin d'un livre. On trouvera dans celui-ci les propositions élémentaires concernant les congruences binômes, les restes quadratiques et le théorème relatif à la décomposition d'un nombre en quatre carrés.

« Je souhaite au livre de M. Humbert le succès qu'il mérite : il a été *pensé* avant d'avoir été écrit. »

*Sommaire.* Préliminaires. Livre I. *Nombres entiers. Premières opérations.* 1. Numération. 2. Addition. 3. Soustraction. 4. Multiplication. 5. Division et systèmes de numération. 6. Divisibilité.

Livre II. *Propriétés des nombres.* 1. Nombres premiers. 2. Plus grand commun diviseur et plus petit commun multiple. 3. Décomposition des nombres en facteurs premiers.

Livre III. *Nombres fractionnaires* (1-2). *Nombres décimaux* (3).

Livre IV. *Racines* (1. Carrée. 2. Cubique). *Nombres incommensurables* (50 pages).

Livre V. *Rapports et proportions. Règles de trois, d'intérêt, etc.*

Livre VI. 1. Erreurs. 2. Problèmes et théorèmes. 3. Système métrique décimal.

Voici maintenant quelques observations critiques. 1 (p. 14). La numération romaine n'avait pas la précision qui lui est attribuée ici. Les Romains désignaient, suivant les cas, 1620 ou 16020 par $\overline{\text{XVI}}$-XX.

2 (p. 118). Les tables de nombres premiers de Glaisher et Dase vont jusque 9 millions.

3. La théorie des fractions décimales périodiques nous semble trop compliquée.

4. Même observation pour la théorie des résidus quadratiques. En moins de pages, l'auteur aurait pu donner plus et même exposer la loi de réciprocité (démonstration de Zeller).

5 (p. 280). *Théorème de Bachet.* Il s'agit de la proposition : *Tout nombre entier est un carré, ou la somme de deux, de trois ou de quatre carrés*, cas particulier de l'un des plus beaux théorèmes de Fermat. M. Matrot et, après lui, M. Humbert, ont eu tort de donner à ce cas particulier le nom de Bachet, car Bachet n'a fait que soupçonner le théorème.

6 (p. 321). Il nous semble inexact d'affirmer que l'existence réelle des grandeurs incommensurables s'impose à l'esprit humain.

7. Toute la partie pratique (règles de trois, d'intérêt, etc.; système métrique) du livre de M. Humbert est assez maigre et très inférieure à la partie correspondante du livre de M. Gelin. (P. M.)

**Traité d'analyse** par ÉMILE PICARD, Membre de l'Institut, Professeur à la Faculté des Sciences. Tome II. Fonctions harmoniques et fonctions analytiques. Introduction à la théorie des équations différentielles. Intégrales abéliennes et surfaces de Riemann. Paris, Gauthier-Villars et fils, 1892 (XIV-512 pages in-8°). Prix : 15 fr. (*)

« La première partie de ce volume, dit M. Picard, est consacrée aux fonctions harmoniques et aux fonctions analytiques. L'étude des fonctions d'une variable complexe revient, comme on sait, à l'étude de l'équation de Laplace à deux variables. Toutefois, dans les écrits de Cauchy et de la plupart de ses disciples, l'équation précédente intervient peu et l'on raisonne sur la fonction complexe elle-même. La simplicité et l'uniformité des raisonnements font de cette théorie une des plus attrayantes et des plus parfaites de l'analyse mathématique. A la suite d'un mémoire fondamental de Riemann, l'étude des fonctions d'une variable complexe a été ramenée à sa véritable origine. Ce point de vue est assurément plus philosophique et il a le grand avantage de laisser de côté tout symbole. Aussi ai-je cru utile de l'adopter tout d'abord dans mon exposition. Dans ces conditions le problème dit de Dirichlet devait jouer un rôle essentiel ; je fais connaître la méthode de Neumann, celle de M. Schwarz, et enfin la méthode si originale employée par M. Poincaré pour le cas de l'espace et qui s'applique au cas du plan sans grande modification. On voit de plus que toute cette théorie n'est pas essentiellement bornée à l'équation si simple de Laplace, et l'on peut ainsi, sinon voir, du moins entrevoir des généralisations de la théorie des fonctions d'une variable complexe, sujet bien digne de fixer l'attention des analystes.

« Il ne faudrait pas cependant être exclusif. Le symbolisme a, dans certains cas, ses avantages, et des résultats très simples deviendraient quelquefois d'un énoncé compliqué si l'on voulait ne jamais introduire de quantités complexes. Aussi je reprends ensuite l'étude des fonctions analytiques au point de vue suivi généralement dans les ouvrages français.

« Dans les deux derniers Chapitres du volume, je commence l'étude des équations différentielles. J'insiste longuement sur le théorème relatif à l'existence des intégrales, dont je donne trois démonstrations différentes. Il est important, dans ces questions, de multiplier les points de vue ; ce ne sont pas là des curiosités inutiles, je veux dire dénuées d'applications. Au début de la Science, les théorèmes de ce genre sont admis sans difficulté. On peut avancer longtemps sans approfondir les questions d'existence, mais il arrive un moment où ce sont justement les circonstances singulières écartées au début qui deviennent intéressantes : il faut alors approfondir les principes et des démonstrations souvent très subtiles deviennent indispensables. On pourrait citer en témoignage bien des travaux récents ; qu'il nous suffise de rappeler les dernières recherches de notre illustre confrère M. Poincaré sur la Mécanique Céleste. »

---

(*) Dans la suite, nous nous contenterons de signaler la publication des volumes du *Traité d'analyse* de M. Picard, sans entrer dans le détail des sujets qui y seront traités, parce qu'ils sont en dehors du modeste programme de notre journal.

La seconde partie « traite des intégrales abéliennes et des surfaces de Riemann.

« On peut, par une représentation géométrique convenable, rendre intuitifs les principaux résultats de la théorie des surfaces de Riemann. Cette vue claire de la surface de Riemann une fois obtenue, toutes les applications se déroulent avec la même facilité que dans la théorie classique de Cauchy relative au plan simple. Mais il importe de juger à sa véritable valeur la belle conception de Riemann. Ce serait une vue incomplète que de la regarder seulement comme une méthode simplificative pour présenter la théorie des fonctions algébriques.... Le point essentiel de la théorie de Riemann est dans la conception *à priori* de la surface connexe formée d'un nombre limité de feuillets plans et dans le fait qu'à une telle surface conçue dans toute sa généralité correspond une classe de courbes algébriques. Nous nous sommes particulièrement attaché à la question difficile et capitale de l'existence des fonctions analytiques sur une surface de Riemann arbitrairement donnée. »

L'auteur a ensuite généralisé cette question pour une surface fermée quelconque et pour l'équation correspondante de Beltrami.

« Tout en accordant la préférence aux méthodes de Riemann, dit M. Picard, nous n'avons pas négligé le point de vue algébrique. »

Voici le sommaire des matières traitées dans ce volume, qui, en général, traite de questions tout à fait en dehors du programme de *Mathesis*, sauf quelques parties du chapitre I, du chapitre XI, et peut être du chapitre XIV.

CHAP. I. *Fonctions d'une variable complexe. Problèmes fondamentaux relatifs à l'équation de Laplace dans le plan.* Définition des fonctions d'une variable complexe. Dérivée. Intégrale. Fonction harmonique. Formule fondamentale. Les fonctions harmoniques sont analytiques. Détermination unique des fonctions harmoniques par leurs valeurs sur un contour fermé. Extension à l'équation linéaire générale du second ordre de quelques-uns des résultats obtenus par l'équation de Laplace. Problème de Dirichlet. Recherche de la fonction harmonique prenant des valeurs données sur un contour. Méthode de M. Neumann. — CHAP. II. *Développements en séries et prolongement analytique des fonctions harmoniques et des fonctions d'une variable complexe.* Développements en séries et extension des fonctions harmoniques. Fonctions harmoniques à l'infini. Problème de Dirichlet pour l'extérieur d'une aire. Développement en série des fonctions analytiques d'une variable complexe. Théorème de Cauchy. Fonctions élémentaires. — CHAP. III. *De la méthode alternée.* Procédé alterné de M. Schwarz. Application du procédé alterné à d'autres équations que l'équation de Laplace. — CHAP. IV. *Méthode de M. Poincaré pour la solution du problème de Dirichlet.* Propriétés fondamentales du potentiel logarithmique. Méthode de M. Poincaré — CHAP. V. *Étude directe des fonctions d'une variable complexe.* Théorèmes généraux de Cauchy. Pôles et points singuliers essentiels d'une fonction uniforme. Fonctions analytiques élémentaires d'une variable complexe. Sur les produits convergents. Décomposition en facteurs des fonctions uniformes. — CHAP. VI. *Applications des théorèmes généraux de Cauchy sur les fonctions d'une variable complexe.* Recherche de quelques intégrales définies. Développement en séries de fractions rationnelles. Méthode de Cauchy pour obtenir

la série de Fourier et des séries analogues. Nombre des racines d'une équation contenues dans un contour. Théorie des indices. — CHAP. VII. *Nombre de racines communes à deux équations simultanées.* — CHAP. VIII. *Intégrales de fonctions non uniformes.* Intégrales hyperelliptiques. Des intégrales de première espèce; réduction du nombre des périodes. Intégrale elliptique. — CHAP. IX. *Des fonctions de plusieurs variables indépendantes.* Généralités sur les fonctions de plusieurs variables complexes. Décomposition en facteurs d'une fonction de plusieurs variables. Fonctions implicites. Des intégrales multiples de fonctions de plusieurs variables complexes. Extension du théorème de Cauchy d'après M. Poincaré. — CHAP. X. *Sur la représentation conforme.* Quelques remarques générales. Arcs analytiques. Représentation conforme d'une aire simple sur un cercle. Exemples. Méthode de M. Schwarz pour le principe de Dirichlet. — CHAP. XI. *Théorèmes généraux sur les équations différentielles.* Première démonstration de Cauchy relative à l'existence des intégrales. Démonstration de l'existence de l'intégrale par une méthode d'approximations successives. Démonstrations au moyen du calcul des limites de Cauchy. Comparaison des domaines de convergence. Détermination unique d'un système d'intégrales par les valeurs initiales. Existence des intégrales des systèmes d'équations linéaires aux dérivées partielles. — CHAP. XII. *Quelques applications des théorèmes généraux.* Cas où le coefficient différentiel devient infini. Théorème de M. Poincaré sur les fonctions définies par une équation du premier ordre. Équation de Riccati et équation du premier ordre. Inversion de l'intégrale elliptique. Fonctions entières associées aux fonctions elliptiques. — CHAP. XIII. Généralités sur les fonctions algébriques d'une variable. Théorème de M. Noether. Surfaces de Riemann. — CHAP. XIV. *Des intégrales abéliennes.* Periodicité. Théorème d'Abel. Les trois espèces. — CHAP. XV. *Des fonctions uniformes sur une surface de Riemann.* — CHAP. XVI. *Théorèmes généraux relatifs à l'existence d'une fonction sur une surface de Riemann* (avec généralisation). — CHAP. XVII. *Courbes des genres zéro et un.* Généralités sur les fonctions doublement périodiques.

---

## SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

### Question 791.

(Voir *Mathesis* (2), t. II, p. 240.)

*On donne un quadrilatère* ABCD. *Par* A *et* B *on fait passer une circonférence* O, *par* C *et* D *une circonférence* I *coupant orthogonalement la précédente. Trouver* 1° *l'enveloppe de la ligne des centres des deux cercles;* 2° *celle de leur axe radical;* 3° *le lieu de l'intersection des deux circonférences;* 4° *le lieu du pied de l'axe radical;* 5° *le lieu du point de rencontre des tangentes menées en* A *et* C *respectivement aux deux cercles* O *et* I.

(DÉPREZ.)

*Solution par* M. A. Morel, *ingénieur au Creusot*. Prenons pour axes de coordonnées un côté AB et la perpendiculaire abaissée de C sur AB; soient alors $(p, 0)$, $(p', 0)$, $(0, q)$, $(r, q')$ les coordonnées de A, B, C, D. Les équations des circonférences O, I sont

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + h = 0, \quad x^2 + y^2 - 2a'x - 2b'y + h' = 0,$$

avec les conditions

$$a = \frac{p + p'}{2}, \quad h = pp', \tag{1}$$

$$q^2 - 2b'q + h' = 0, \quad r^2 + q'^2 - 2a'r - 2b'q' + h' = 0, \tag{2}$$

$$2(aa' + bb') - (h + h') = 0, \tag{3}$$

qui expriment que les deux lignes passent, respectivement, par A et B, par C et D et qu'elles sont orthogonales. On voit que $a$ et $h$ sont des constantes, que $b$, $a'$, $b'$, $h'$ sont des paramètres variables entre lesquels il existe les relations (2) et (3). Nous exprimons $h'$, $a'$, $b$ en fonction de $b'$, ce qui donne

$$h' = 2b'q - q^2, \quad a' = \frac{r^2 + q'^2 - q^2}{2r} + \frac{q - q'}{r} b' = \alpha + \beta b',$$

$$b = \gamma + \frac{\delta}{b'},$$

$\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ étant des constantes.

1° Cela posé, la ligne des centres des deux cercles a pour équation

$$(a' - a)y + (b - b')x + ab' - ba' = 0;$$

introduisant les valeurs de $a'$ et $b$, on obtient une équation de la forme

$$Mb'^2 + 2Nb' + P = 0, \tag{4}$$

où M, N, P sont des fonctions linéaires de $x$, $y$. L'enveloppe de la ligne des centres est donc la conique représentée par $N^2 - MP = 0$.

2° L'axe radical des deux cercles a pour équation

$$2x(a' - a) + 2y(b' - b) + h - h' = 0$$

ou

$$M'b'^2 + 2N'b + P' = 0, \tag{5}$$

M', N', P' désignant des polynômes du premier degré en $x$, $y$. L'enveloppe de cet axe est encore une conique.

3° Les équations des deux cercles peuvent être écrites ainsi :

$$x^2+y^2-2ax-2\gamma y+h=\frac{2\delta}{b'}y, \tag{6}$$

$$x^2+y^2-2\alpha x-q^2=2b'(\beta x+y-q); \tag{7}$$

les points d'intersection décrivent donc une quartique :

$$(x^2+y^2-2ax-2\gamma y+h)(x^2+y^2-2\alpha x-q^2)=4\delta y(\beta x+y-q).$$

4° Pour trouver le lieu du pied de l'axe radical on élimine $b'$ entre les égalités (4) et (5); on obtient une quartique.

5° Les équations des tangentes en A et C sont

$$px-a(p+x)=\frac{\delta}{b'}y,\quad qy-\alpha x=b'(\beta x+y).$$

Si l'on élimine $b'$, on trouve une équation du second degré; par conséquent les tangentes se coupent sur une conique.

---

## ×Question 824.

(Voir *Mathesis*, (2), III, p. 80.)

***Inscrire dans un cercle donné* O *un triangle isoscèle tel que la somme des distances du centre du cercle aux trois côtés du triangle soit égale à une longueur donnée m.***

***Discuter le problème et indiquer si le centre du cercle se trouve à l'intérieur ou à l'extérieur du triangle correspondant à une solution déterminée.*** (*Baccalauréat*, Rennes, 1892.)

*Solution par* MM. Delahaye, Bellens, Camus, François, Quint, Decamps. Soient AA′ un diamètre du cercle O, BC une corde perpendiculaire à AA′ en un point D situé entre O et A′. Si le triangle ABC résout le problème et qu'on mène OM perpendiculaire à AB, on a, dans le quadrilatère inscriptible BDOM,

$$AM.AB=AO.AD,\quad \text{ou}\quad 2\overline{AM}^2=R(R+OD),$$

d'où, en prenant pour inconnue $OM=x$,

$$OD=\frac{2\overline{AM}^2-R^2}{R}=\frac{R^2-2x^2}{R}.$$

L'équation du problème est donc

$$2x + \frac{R^2 - 2x^2}{R} = m, \quad \text{ou} \quad 2x^2 - 2Rx + R(m - R) = 0. \qquad (1)$$

Pour que OD soit positif, on doit avoir $x < \frac{R}{\sqrt{2}}$.

Si A'BC est le triangle cherché et que l'on projette O en M' sur A'B, on trouve

$$\overline{2A'M'}^2 = A'O.A'D, \quad \text{ou} \quad 2(R^2 - x^2) = R(R - OD);$$

par conséquent

$$OD = \frac{2x^2 - R^2}{R} \quad \text{et} \quad 2x + \frac{2x^2 - R^2}{R} = m,$$

ou

$$2x^2 + 2Rx - R(m + R) = 0. \qquad (2)$$

1° L'équation (1) donne

$$x = \tfrac{1}{2}[R \pm \sqrt{R(3R - 2m)}].$$

Le maximum de $m$ est $\frac{3}{2}R$ ; il correspond à $x = \frac{1}{2}R$, c'est-à-dire à un triangle équilatéral. Les deux valeurs de $x$ résolvent le problème si elles sont comprises entre 0 et $(R : \sqrt{2})$ ; d'après les propriétés du trinôme du second degré, le premier membre de (1) doit être positif pour $x = 0$ et $x = (R : \sqrt{2})$. On en conclut $m > R$ et $m > R\sqrt{2}$ ; donc le problème a deux solutions lorsque $R\sqrt{2} < m < \frac{3}{2}R$.

Une seule valeur de $x$ est comprise entre 0 et $(R : \sqrt{2})$, si le premier membre de (1) a des signes contraires pour $x = 0$ et $x = (R : \sqrt{2})$ ; ce qui exige $R < m < R\sqrt{2}$.

2° Les racines de l'équation (2) sont

$$x = \tfrac{1}{2}[-R \pm \sqrt{3R^2 + 2Rm}];$$

elles sont toujours réelles et de signes contraires.

Pour que la racine positive soit admissible, elle doit être comprise entre $(R : \sqrt{2})$ et R ; donc le premier membre de l'équation doit avoir des signes contraires pour $x = R$ et $x = (R : \sqrt{2})$, ce qui exige $R\sqrt{2} < m < 3R$.

En résumé, lorsque $R < m < R\sqrt{2}$, le problème a une solution dans laquelle O est intérieur au triangle ; lorsque $R\sqrt{2} < m < \frac{3}{2}R$, le problème a trois solutions, dont deux ont le centre O intérieur et le

troisième extérieur; il n'existe qu'une solution ayant le centre extérieur, lorsque $\frac{1}{2}\,R < m < 3\,R$, le problème est impossible si $m < R$ ou $> 3\,R$.

Les hypothèses $m = R$, $R\sqrt{2}$, $\frac{3}{2}\,R$, $3\,R$ donnent respectivement $x = 0$, $R\sqrt{2}$, $\frac{1}{2}\,R$ ou $\frac{1}{2}R(\sqrt{6}-1)$, $R$; le triangle se réduit en diamètre AA', devient rectangle isoscèle, équilatéral ou obtusangle, on se réduit au point A'.

---

## Question 826.

(Voir *Mathesis*, (2), III, p. 80.)

*Démontrer la formule*

$$\frac{q}{1-q} - \frac{q^2}{1-q^2} - \frac{q^3}{1-q^3} + \frac{q^4}{1-q^4} + \text{etc.}$$
$$= q + q^4 + q^9 + q^{16} + q^{25} + \text{etc.}$$

***Dans le premier membre, le terme en $q^a$ est pris avec le signe + ou le signe —, selon que $a$ est le produit d'un nombre pair ou d'un nombre impair de facteurs premiers. Il y a exception pour le premier terme.***

(Baschwitz.)

*Solution par M.* E. Cesàro. Si la décomposition de $n$ en facteurs premiers donne $n = u^\alpha v^\beta w^\gamma \ldots$, et que l'on pose $\lambda(n) = (-1)^{\alpha+\beta+\gamma+\cdots}$, on sait que la somme des valeurs de la fonction $\lambda$, étendue à tous les diviseurs $a, b, c, \ldots$, de $n$, est égale à zéro, excepté pour $n$ carré. Dans ce cas, elle est égale à l'unité. D'autre part, si l'on pose

$$f(a) + f(b) + f(c) + \cdots = F(n),$$

il est presque évident que

$$\sum_1^\infty \frac{q^i f(i)}{1-q^i} = qF(1) + q^2F(2) + q^3F(3) + \cdots$$

Donc

$$\sum_1^\infty \frac{q^i \lambda(i)}{1-q^i} = q + q^4 + q^9 + \cdots$$

Quant à la propriété de la fonction $\lambda$, énoncée en commençant, on peut la démontrer en remarquant d'abord que $\lambda(x)\,\lambda(y) = \lambda(xy)$. Il en résulte

$$\lambda(a) + \lambda(b) + \cdots = \sum_0^\alpha \lambda(u^i) \cdot \sum_0^\beta \lambda(v^i) \cdots$$

Tout facteur du second membre a la valeur 0 ou la valeur 1, suivant que

l'exposant $\alpha, \beta, \gamma, \cdots$ qui lui correspond est impair ou pair. Donc, pour que le premier membre ne soit pas nul, il faut et il suffit que tous les exposants soient pairs, c'est-à-dire que $n$ soit un carré (1).

---

## ×Question 832.

(Voir *Mathesis*, (2), III, p. 80.)

*Des équations*

$$\sqrt{l \sin A} + \sqrt{m \sin B} + \sqrt{n \sin C} = 0, \qquad (1)$$

$$-\frac{\cos^2 \frac{1}{2} A}{l} + \frac{\sin^2 \frac{1}{2} B}{m} + \frac{\sin^2 \frac{1}{2} C}{n} = 0, \qquad (2)$$

*déduire*

$$l \cos^2 \tfrac{1}{2} A = m \sin^2 \tfrac{1}{2} B + n \sin^2 \tfrac{1}{2} C. \qquad (3)$$

(A. C.)

*Solution par* M. Déprez. L'équation (1) peut s'écrire

$$\Sigma l^2 \sin^2 A - 2\Sigma lm \sin A \sin B = 0,$$

ou encore

$$(-l \sin^2 \tfrac{1}{2} A + m \cos^2 \tfrac{1}{2} B + n \cos^2 \tfrac{1}{2} C)(-l \cos^2 \tfrac{1}{2} A + m \sin^2 \tfrac{1}{2} B + n \sin^2 \tfrac{1}{2} C)$$
$$= mn \cos^2 \tfrac{1}{2} A - nl \sin^2 \tfrac{1}{2} B - ml \sin^2 \tfrac{1}{2} C;$$

d'où, à cause de l'équation (2), l'égalité (3) ou la suivante

$$-l \sin^2 \tfrac{1}{2} A + m \cos^2 \tfrac{1}{2} B + n \cos^2 \tfrac{1}{2} C = 0.$$

---

## ×Question 843.

(Voir *Mathesis*, (2), III, p. 128.)

*Sur les arêtes* AD, BD, CD, *d'un tétraèdre* ABCD, *on prend trois longueurs égales* $AA' = BB' = CC' = \lambda$. *Trouver le lieu décrit par le point d'intersection des plans* BCA', CAB', ABC' *lorsque* $\lambda$ *varie.*

---

(1) Les termes du produit effectué

$$(u^0 + u^1 + u^2 + \cdots + u^\alpha)\ (v^0 + v^1 + \cdots + v^\beta)\ (w^0 + w^1 + \cdots + w^\gamma) \cdots$$

sont les diviseurs de $n$. Remplaçons $u$ $v$, $w$, par $-1$; le produit effectué représente $\lambda(a) + \lambda(b) + \lambda(c) + \cdots$, tandis que les facteurs du produit non effectué ont pour valeur 0 ou 1 suivant que l'exposant de leur dernier terme $(\alpha, \beta, \gamma, \cdots)$ est impair ou pair. (J. N.).

*Solution par* M. Absolonne. Le point d'intersection I de BC′ et de CB′ décrit une droite $i$ dans le plan BCD ; le point dont on demande le lieu reste donc dans le plan déterminé par A et la droite $i$. Il appartient de même au plan passant par B et le lieu de I′ intersection de AC′ et de CA′; son lieu géométrique est donc une droite.

On remarque que les plans menés par A, B, C et les droites que parcourent I, I′, I″ se coupent suivant une même droite.

*Solution par* M. Servais. La question peut être généralisée. Prenons sur AD, BD, CD les longueurs

$$AA' = p\alpha, \quad BB' = q\alpha, \quad CC' = r\alpha$$

$\alpha$ étant une quantité variable et $p$, $q$, $r$ trois longueurs données.

Les droites CB′ et BC′ engendrent deux faisceaux projectifs, qui sont même perspectifs BC, étant sa propre homologue ; donc leur point d'intersection I décrit une droite qui rencontre les arêtes BD et CD en deux points $B_1$ et $C_1$ tels que $BB_1 : CD = BD : CC_1 = q : r$. L'intersection AI des plans ABC′, ACB′ décrit donc le plan $AB_1C_1$. Il résulte de là que le point commun aux trois plans ABC′, CBA′, ACB′ décrit une droite.

Note. Nous avons proposé la question 843 à nos jeunes lecteurs pour attirer leur attention sur le lieu analogue de la géométrie plane :

*Sur les côtés* AD, BD *d'un triangle* ABD, *on prend deux longueurs égales* $AA' = BB' = \lambda$. *Le lieu du point d'intersection* I *des droites* AB′, BA′ *est la bissectrice de l'angle* E *du parallélogramme* DAEB *construit sur* DA, DB.

On trouve immédiatement plusieurs points remarquables de ce lieu. Le point E correspond à $\lambda = \infty$ ; si l'on prend sur AD une longueur $AA_1 = DB$, sur BD une longueur $BB_1 = DA$, les points $A_1$, $B_1$ appartiennent au lieu ($\lambda =$ DB ou DA) ; les droites joignant A, B aux points de contact de DB avec le cercle exinscrit dans l'angle DAB, et de DA avec le cercle exinscrit dans l'angle DBA se coupent sur le lieu. La droite $A_1B_1$ est, on le voit facilement, parallèle à la bissectrice de l'angle ADB.

Voici deux démonstrations élémentaires empruntées au *Journal de Vuibert* (15 mars 1893). 1° Si AB′ coupe EB en F, des triangles semblables donnent :

$$\frac{EA}{EF} = \frac{BB'}{BF} = \frac{AA'}{BF} = \frac{AI}{FI}, \text{ etc.}$$

2° Construisons le parallélogramme A'D B'D' et désignons par G, H les points où B'D', A'D' rencontrent respectivement AE, BE.

La figure EGD'H étant un losange, ED' est la bissectrice de l'angle AEB ; je dis que cette droite passe par I. En effet, le triangle ADB' coupé par la transversale A'LB donne

$$\frac{IA}{IB'}\cdot\frac{A'D}{A'A}\cdot\frac{BB'}{BD}=-1, \quad \text{ou} \quad \frac{IA}{IB'}\cdot\frac{D'B'}{D'G}\cdot\frac{EG}{EA}=-1.$$

Donc les points I, D', E (considérés dans le triangle AB'G) sont en ligne droite.

Le point où EI coupe AB doit être considéré comme correspondant à $\lambda = 0$ ; c'est l'isotomique du pied de la bissectrice de l'angle ADB sur AB.

Dans la question 843, le point qui correspond à $\lambda = 0$ est à l'intersection des droites joignant A, B, C aux isotomiques des points de rencontre de BC, CA, AB avec les bissectrices des angles BDC, CDA, ADB. (J. N.)

---

## Questions 845 et 850.

(Voir *Mathesis*, (2), III, 128 et 152.)

**845.** *Par deux points fixes* D, E *pris sur le coté* AB *du triangle de référence* ABC, *on mène des tangentes à une parabole quelconque inscrite à ce triangle. Trouver le lieu du point d'intersection de ces tangentes.*

**850.** *On mène deux tangentes parallèles à deux directions données, à une parabole quelconque inscrite au triangle* ABC. *Trouver le lieu du point de rencontre de ces deux tangentes.* (V. Retali.)

*Solution par* M. Servais. Ces deux questions sont des particuliers du problème suivant : *Par deux points fixes* E, F *pris sur le coté* AB *du quadrilatère* ABCD, *on mène des tangentes à une conique inscrite dans ce quadrilatère. Trouver le lieu du point de rencontre* M *de ces tangentes.*

Soit G le point d'intersection des droites AD, BC, l'hexagone EGFDMC sera un hexagone de Pascal ; le lieu du point M est donc une conique déterminée par les cinq points E, G, F, D, C. Si DC est à l'infini, on a la question 845 ; la question 850 suppose au contraire le côté AB à l'infini.

Au moment de mettre sous presse, M. Jamet nous envoie une solution rattachant comme la précédente, la question 850, à un théorème plus général sur un faisceau tangentiel de coniques ; ce théorème se ramène par voie de dualité, à celui qui est établi par M. Jamet, *Mathesis*, (2), II, 105.

*Solution de la question 850, par* M. E. N. Barisien. Prenons le côté CA pour axe des $x$ et le côté CB pour axe des $y$, et posons $AC = a$, $BC = b$. L'équation d'une parabole tangente aux côtés CA et CB est

$$\sqrt{\frac{x}{\alpha}}+\sqrt{\frac{y}{\beta}}=1, \text{ ou } \left(\frac{x}{\alpha}-\frac{y}{\beta}\right)^2-2\left(\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}\right)+1=0; \qquad (1)$$

$\alpha$ et $\beta$ sont les distances des points de contact à l'origine C.

Pour que la parabole (1) soit tangente à la droite AB, on a

$$\frac{a}{\alpha}+\frac{b}{\beta}=1. \qquad (2)$$

L'équation du faisceau des tangentes à la parabole issues d'un point $(x_0\, y_0)$ est

$$\left[\left(\frac{x}{\alpha}-\frac{y}{\beta}\right)^2-2\left(\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}\right)+1\right]\left[\left(\frac{x_0}{\alpha}-\frac{y_0}{\beta}\right)^2-2\left(\frac{x_0}{\alpha}+\frac{y_0}{\beta}\right)+1\right]$$
$$-\left[\frac{x}{\alpha}\left(\frac{x_0}{\alpha}-\frac{y_0}{\beta}-1\right)+\frac{y}{\beta}\left(-\frac{x_0}{\alpha}+\frac{y_0}{\beta}-1\right)-\left(\frac{x_0}{\alpha}+\frac{y_0}{\beta}-1\right)\right]^2=0.$$

L'ensemble des termes du second degré de ce faisceau se réduit à

$$\frac{4}{\alpha\beta}\left[\frac{x^2y_0}{\alpha}+\frac{y^2x_0}{\beta}-xy\left(\frac{x_0}{\alpha}+\frac{y_0}{\beta}-1\right)\right],$$

de sorte qu'en posant $y = Mx$, l'équation aux coefficients angulaires du faisceau est

$$M^2\alpha x_0 - M(\beta x_0 + \alpha y_0 - \alpha\beta) + \beta y_0 = 0.$$

Si donc M′ et M″ sont les deux coefficients angulaires des directions données, on a

$$M' + M'' = \frac{\beta x_0 + \alpha y_0 - \alpha\beta}{\alpha x_0}, \quad M'M'' = \frac{\beta y_0}{\alpha x_0}. \qquad (3)$$

On aura donc le lieu des points $(x_0, y_0)$ en éliminant $\alpha$ et $\beta$ entre (2) et (3). Or, des égalités (3), on tire

$$\alpha = \frac{y_0^2 + M'M''x_0^2 - (M' + M'')\,x_0y_0}{M'M''x_0},$$

$$\beta = \frac{y_0^2 + M'M''x_0^2 - (M' + M'')\,x_0y_0}{y_0}.$$

Portant ces valeurs dans (2) et supprimant les indices, on trouve

$$y^2 + M'M''x^2 - (M' + M'')\,xy - aM'M''x - by = 0,$$

ou

$$(y - M'x)(y - M''x) - aM'M''x - by = 0. \qquad (5)$$

Le lieu est donc une hyperbole dont les asymptotes sont parallèles aux deux directions données, et qui est circonscrite au triangle ABC.

*Solution géométrique.* Si par un même point on mène les droites $a$, $b$, $c$, $d$, $d'$ parallèles à BC, CA, AB et aux directions données, et si l'on désigne par $\gamma$ le point de contact de AB avec l'une des paraboles, par $\delta$, $\delta'$ les points de rencontre de AB avec les tangentes menées à cette courbe parallèlement à $d$ et $d'$, le faisceau $abcdd'$ est projectif (homographique) avec la ponctuelle $BA\gamma\delta\delta'$, déterminée sur la tangente AB par les tangentes parallèles aux rayons du faisceau. Par conséquent, les trois points $\gamma$, $\delta$, $\delta'$ engendrent des ponctuelles projectives, et les tangentes parallèles à $d$, $d'$ se correspondent dans deux faisceaux parallèles projectifs. On en conclut que le lieu demandé est une hyperbole dont les asymptotes sont parallèles à $d$ et $d'$, et qui passe par A, B, C; car A et B sont des éléments doubles des ponctuelles projectives $(\delta)$, $(\delta')$.

Plus simplement, si $t$, $t'$ désignent les tangentes menées à l'une des paraboles parallèlement à $d$, $d'$, la connaissance de $t$ détermine la parabole et par suite $t'$; de même $t'$ détermine $t$, donc $t$ et $t'$ se correspondent dans deux faisceaux parallèles projectifs, etc. (J. N.)

---

## ×Question 853.

(Voir *Mathesis*, (2), III, p. 152.)

*A et B étant deux nombres positifs quelconques et m un nombre entier positif, démontrer que l'on a toujours*

$$(A + B)^m < 2^{m-1}(A^m + B^m).$$

*Solution par* M. M. Delahaeye *et* Droz-Farny. Posons $A = s + d$, $B = s - d$; alors $2s$ est la somme et $2d$ la différence des nombres donnés. Nous aurons

$$A^m + B^m = (s + d)^m + (s - d)^m = 2s^m + 2C_{m,1}s^{m-2}d^2 + \cdots > 2s^m;$$

donc $2^{m-1}(A^m + B^m) > 2^m s^m = (2s)^m$, ce qui démontre la proposition.

On voit aussi que, si la somme $A + B$ est donnée, le maximum de $A^m + B^m$ correspond à $A = B$.

Cette question a été aussi résolue par MM. VERDEYEN (athénée de Gand), et MANDART.

---

## Question CXXI.

(N. C. M., II, p. 190; LAISANT, IV, n° 165.)

***Soient*** ABC, A'B'C' ***deux triangles, situés d'une manière quelconque dans l'espace. Le lieu d'un point*** P, ***tel que les trois droites menées par*** P ***et s'appuyant respectivement sur les couples de droites*** (AB, A'B'), (BC, B'C'), (CA, C'A') ***sont situées dans un même plan, est l'hyperboloïde passant par les droites*** AA', BB', CC'. (J. NEUBERG.)

***Solution par*** M. E. GENTY. Soient $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$; $\alpha'$, $\beta'$ et $\gamma'$ les vecteurs des sommets des triangles ABC, A'B'C'.

Pour que les droites menées par l'origine et s'appuyant respectivement sur les couples de droites (AB, A'B'), (BC, B'C'), (CA, C'A') soient situées dans un même plan, il faut qu'on ait

$$(1) \qquad \mathrm{SV}(\mathrm{V}\beta\gamma\,\mathrm{V}\beta'\gamma')\,\mathrm{V}(\mathrm{V}\gamma\alpha\,\mathrm{V}\gamma'\alpha')\,\mathrm{V}(\mathrm{V}\alpha\beta\,\mathrm{V}\alpha'\beta') = 0.$$

De même, pour que l'origine soit située sur l'hyperboloïde déterminé par les trois droites AA', BB', CC', on doit avoir

$$(2) \qquad \mathrm{SV}\alpha\alpha'\,\mathrm{V}\beta\beta'\,\mathrm{V}\gamma\gamma' = 0.$$

Je dis que les conditions (1) et (2) sont équivalentes.

En effet, l'équation (2) développée donne :

$$\mathrm{S}\alpha\alpha'\gamma\mathrm{S}\beta\beta'\gamma' - \mathrm{S}\alpha\alpha'\gamma'\mathrm{S}\beta\beta'\gamma = 0.$$

Pour développer l'équation (1), il faut, dans l'équation qui précède, remplacer $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$ par $\mathrm{V}\beta\gamma$, $\mathrm{V}\gamma\alpha$ et $\mathrm{V}\alpha\beta$ respectivement, et $\alpha'$, $\beta'$ et $\gamma'$ par $\mathrm{V}\beta'\gamma'$, $\mathrm{V}\gamma'\alpha'$, $\mathrm{V}\alpha'\beta'$.

En faisant cette substitution, $\mathrm{S}\alpha x'\gamma$ est remplacé par

$$\mathrm{SV}\alpha\beta\mathrm{V}\beta\gamma\mathrm{V}\beta'\gamma' = \mathrm{S}\alpha\beta\gamma\mathrm{S}\beta\beta'\gamma';$$

de même $\mathrm{S}\beta\beta'\gamma'$ est remplacé par

$$\mathrm{SV}\gamma\alpha\mathrm{V}\gamma'\alpha'\mathrm{V}\alpha'\beta' = \mathrm{S}\alpha'\beta'\gamma'\mathrm{S}\alpha\alpha'\gamma;$$

et ainsi de suite. Donc on a

$$\mathrm{SV}(\mathrm{V}\beta\gamma\mathrm{V}\beta'\gamma')\,\mathrm{V}(\mathrm{V}\gamma\alpha\mathrm{V}\gamma'\alpha')\,\mathrm{V}(\mathrm{V}\alpha\beta\mathrm{V}\alpha'\beta') = \mathrm{S}\alpha\beta\gamma\mathrm{S}\alpha'\beta'\gamma'\mathrm{SV}\alpha\alpha'\mathrm{V}\beta\beta'\mathrm{V}\gamma\gamma,$$

ce qui démontre la proposition.

*Solution par* M. SOLLERTINSKY(*). Soient $P\alpha\alpha'$, $P\beta\beta'$, $P\gamma\gamma'$ trois droites s'appuyant sur les couples (BC, B'C'), (CA, C'A'), (AB, A'B') aux points $(\alpha, \alpha')$, $(\beta, \beta')$, $(\gamma, \gamma')$. Désignons par $A_1$, $B_1$, $C_1$ les points de rencontre des droites PA', PB', PC' avec le plan ABC. Les côtés du triangle $A_1B_1C_1$ coupent ceux du triangle ABC aux points $\alpha$, $\beta$, $\gamma$. Si les droites $P\alpha\alpha'$, $P\beta\beta'$, $P\gamma\gamma'$ sont situées dans un même plan, les points $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ sont en ligne droite. Les triangles ABC, $A_1B_1C_1$ sont donc homologiques : par suite, les droites $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$ concourent en un même point S.

Il résulte de là que les plans PAA', PBB', PCC' passent par une même droite PS, ou que PS est une génératrice de l'hyperboloïde (ou du paraboloïde) déterminé par les droites AA', BB', CC'.

Réciproquement, tout point P de cet hyperboloïde jouit de la propriété énoncée dans la question proposée.

Cette surface est donc le lieu demandé.

---

## QUESTIONS D'EXAMEN.

**571.** On donne un triangle ABC rectangle en A et les perpendiculaires en B et C au plan du triangle. Trouver sur ces perpendiculaires, d'un même côté du plan ABC, les points B', C' tels que l'angle B'AC' soit égal à un angle donné $\alpha$ et que l'aire du triangle B'AC' $= k^2$. (*St-Cyr*, 1892.)

Les côtés $a'$, $b'$, $c'$ du triangle B'AC' ont pour expressions

$$\sqrt{a^2+(x-y)^2},\quad \sqrt{b^2+x^2},\quad \sqrt{c^2+y^2},$$

où $x = CC'$, $y = BB'$. Substituons ces valeurs dans

$$\cos\alpha = \frac{b'^2+c'^2-a'^2}{2b'c'},\quad k^2 = \frac{1}{2}b'c'\sin\alpha;$$

nous aurons

$$\cos\alpha = \frac{xy}{\sqrt{(b^2+x^2)(c^2+y^2)}},\quad \sin\alpha = \frac{2k^2}{\sqrt{(b^2+x^2)(c^2+y^2)}},$$

d'où

$$xy = 2k^2\operatorname{cotg}\alpha,\quad c^2x^2+b^2y^2 = 4k^4-b^2c^2,\ \text{etc.}$$

**572.** Résoudre l'équation

$$\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x} = 1.$$

---

(*) Cette solution a été publiée dans *El Progreso Matemático*, 1892, t. II, p. 29.

Vérifier les solutions. On peut voir *à priori* que l'équation est impossible si l'on prend les radicaux avec le signe +.

Voir N. A. M, 1845, p. 520.

**572.** En chaque point M d'une ellipse, le rapport du cosinus de l'angle FMT de la tangente MT avec un rayon vecteur, au cosinus de l'angle MTF de la tangente avec l'axe focal est constant.

Cet énoncé nous a été communiqué par M. Barisien. On l'établit très facilement par la géométrie. Si MN est la normale en M, on a

$$\frac{\cos \text{FMT}}{\cos \text{MTF}} = \frac{\sin \text{FMN}}{\sin \text{MNF}} = \frac{\text{FN}}{\text{FM}} = \frac{\text{NF}'}{\text{MF}'} = \frac{\text{FN} + \text{NF}'}{\text{FM} + \text{F}'\text{M}}.$$

**574.** Résoudre l'équation

$$\text{arc tang } x^2 + \text{arc tang } \frac{1}{x} = \text{arc tang } \frac{1}{3}.$$

**575.** A un triangle ABC, on inscrit un second triangle A'B'C' (A' est sur BC, ...). Calculer les côtés du triangle A'B'C' en fonction des éléments du triangle ABC et des angles $\text{AB}'\text{C}' = \beta$, $\text{CA}'\text{B}' = \gamma$, $\text{BC}'\text{A}' = \alpha$.

**576.** Dans tout triangle ABC,

$$\frac{b - 2a\cos \text{C}}{a \sin \text{C}} + \frac{c - 2b\cos \text{A}}{b \sin \text{A}} + \frac{a - 2c\cos \text{B}}{c \sin \text{B}} = 0.$$

**577.** On donne quatre points en ligne droite A, B, C, D; trouver sur cette droite un cinquième point X tel, que l'on ait

$$\frac{\text{XA}}{\text{XB}} = \frac{\text{XC}}{\text{XD}}.$$

1° E étant un point quelconque du plan, mener CF, DF parallèles à AE, BE; EF passera par X. 2° E étant un point quelconque, les circonférences EAD, EBC se coupent en un second point F; EF rencontrera AB en X.

**578.** Si l'on a

$$\sin \text{C} = \cos \text{A} + \cos \text{B}, \quad \text{ou} \quad \sin \text{A} = \frac{\sin \text{B} + \sin \text{C}}{\cos \text{B} + \cos \text{C}},$$

le triangle ABC est rectangle.

**579.** Si $\sin \text{A} = 2 \sin \text{B} \cos \text{C}$, le triangle ABC est isoscèle.

**580.** Si $tg \text{ B} \sin^2 \text{C} = tg \text{ C} \sin^2 \text{B}$, le triangle ABC est isoscèle ou rectangle.

**581.** Trouver le nombre des côtés d'un polygone dont on connaît le nombre des diagonales ?

**882.** Sur le côté CD d'un parallélogramme ABCD, on prend le segment $CE = \frac{1}{n} CD$. La diagonale AC coupe BE en F. Prouver que

$$\frac{ADEFA}{n^2 + n - 1} = \frac{AFB}{n^2} = \frac{BFC}{n} = \frac{CFE}{1} \qquad \text{(Christie).}$$

**883.** Démontrer l'identité

$$(a^2 + b^2)(r^2 + s^2)^2 = [2ars + b(r^2 - s^2)]^2 + [2brs - a(r^2 - s^2)]^2,$$

on appliquant deux fois l'identité

$$(a^2 + b^2)(a'^2 + b'^2) = [aa' \pm bb']^2 + [ab' \mp a'b]^2 \quad \text{(Tebay).}$$

**884.** Résoudre le système d'équations

$$(y - z)^2 + l^2 = 2l(y + z), \quad (z - x)^2 + m^2 = 2m(z + x),$$
$$(x - y)^2 + n^2 = 2n(x + y) \qquad \text{(Lemoine.)}$$

Rép. $l = y + z \pm 2\sqrt{yz}$, d'où $\pm\sqrt{l} = \sqrt{y} \pm \sqrt{z}$, etc.

---

## QUESTIONS PROPOSÉES.

***885** (rectifié.) Si un nombre premier N a la forme $4\mu - 1$, $N^2$ est la somme de trois carrés. (E. Catalan.)

***886.** Déterminer $n$ de manière que $1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^n$ soit un carré. (de Rocquigny).

**887.** L'aire comprise entre la courbe

$$y^2(x^2 + a^2)^2 = a^2 x^2 (x^2 + b^2)$$

et son asymptote réelle est égale au périmètre de l'ellipse de demi-axes $a$ et $b$, multiplié par $a$. (F. N. Barisien.)

***888.** Soient O le centre du cercle circonscrit à un triangle, I le centre de son cercle inscrit. La perpendiculaire élevée en I à IO rencontre le cercle inscrit en deux points K et K'. Montrer que le périmètre du triangle CKK' est égal au diamètre du cercle circonscrit. (F. N. Barisien.)

**889.** Dans un triangle rectangle ABC, l'hypoténuse AB est fixe et le sommet C de l'angle droit variable. Soit P la projection de C sur AB. On prend entre A et B, sur AB, un point Q tel que $AQ = BP$. Montrer que la droite CQ enveloppe une parabole tangente à AB. (F. N. Barisien.)

*868. Soit $T_n$ le n^e^ nombre triangulaire, c'est-à-dire $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$. Démontrer que le produit

$$(T_n + T_{n+1})(T_p + T_{p+1})$$

est la somme de trois nombres triangulaires. (DE ROCQUIGNY.)

*869. Déterminer $n$ de telle sorte que la somme des $n$ premiers triangulaires soit aussi un nombre triangulaire. (DE ROCQUIGNY.)

*870. On partage les côtés BC, CA, AB d'un triangle ABC aux points A', B', C' dans un même rapport $p : q$; soient A'', B'', C'' les seconds points de rencontre des droites AA', BB', CC' avec la circonférence circonscrite au triangle ABC. Calculer en fonction des éléments du triangle ABC 1° les longueurs des cordes AA'', BB'', CC''; 2° les longueurs des cordes B''C'', C''A'', A''B''. (J. N.)

871. Soient, sur une circonférence O, A un point fixe, B un point variable. La circonférence décrite de A comme centre avec le rayon AB coupe la tangente menée en B au cercle O en un point M, et le rayon OB en un point N. Trouver les lieux des points M et N. (BROCARD.)

872. Trouver l'enveloppe et les trajectoires orthogonales des circonférences telles que les rayons aboutissant aux points où elles rencontrent une droite fixe $d$ passent par deux points fixes A, B, situés sur une perpendiculaire $d'$ à la droite considérée $d$. (E. CESARO.)

*873. Etant donné un triangle ABC, il existe trois autres triangles A'BC, B'CA, C'AB ayant un côté commun avec ABC et même point de Lemoine K. Démontrer que les droites AA', BB', CC' concourent en un même point. (SCHOUTE.)

Voir *Mathesis*, t. IV, p. 195.

874. Une courbe plane se déforme de telle sorte que l'abscisse de chaque point restant la même, l'ordonnée tourne d'un angle $\theta$ qui reste le même pour tous les points de la courbe. Trouver l'enveloppe de toutes les courbes ainsi obtenues, lorsque l'angle $\theta$ prend toutes les valeurs possibles. (LAISANT.)

La question est connue pour l'ellipse. Il est intéressant de déterminer géométriquement le point de contact de l'enveloppe avec la courbe mobile. (J. N.)

875. On donne, dans un même plan, une conique C et un cercle O. Soit AB la corde des contacts de la conique C avec un des cercles qui lui sont bitangents. L'axe radical de ce cercle et du cercle O coupe la droite

AB en un point M dont on demande le lieu géométrique. Quelle est l'enveloppe de cet axe radical. (V. JAMET.)

**876.** Étant donnés un angle $xOy$ et un point P, une sécante quelconque menée par P rencontre $Ox$ en A, $Oy$ en B. Sur la droite AB qui reste toujours sa propre homologue on construit une figure F de forme invariable.

1° Tout point C de F décrit une hyperbole.

2° Le centre de cette hyperbole forme une figure F′ semblable à celle du point C.

3° Le centre de similitude des figures F, F′ décrit une circonférence.

4° Le centre instantané de similitude de la figure F décrit une podaire d'hyperbole. (SOLLERTINSKY.)

×**877.** On décrit trois circonférences $O_1$, $O_2$, $O_3$ ayant pour diamètres l'hypoténuse BC et les côtés AB, AC d'un triangle rectangle.

1° La tangente en A à la première rencontre les deux autres circonférences en D et E; démontrer que les cordes AD, AE sont égales. 2° La droite joignant A au milieu de l'hypoténuse rencontre les circonférences $O_2$, $O_3$ en des points F, G diamétralement opposés à D et E et tels que les cordes AF, AG sont égales aux projections de AB, AC sur BC. 3° La somme des segments sous-tendus dans le cercle $O_1$ par les cordes AB, AC est égale à la somme des segments sous-tendus dans les cercles $O_2$, $O_3$ respectivement par les cordes BD, AE ou par les cordes AD, CE. (RENSHAW.)

×**878.** Appelons *pseudocarré* tout quadrilatère dont les diagonales sont égales et perpendiculaires. Démontrer que les carrés construits intérieurement sur deux côtés opposés AB et CD d'un pseudocarré ont même centre, et que ce point est le milieu de la droite joignant les centres des carrés construits extérieurement sur les deux autres côtés BC, DA.

(J. NEUBERG.)

×**879.** Les centres des carrés construits extérieurement sur les côtés d'un quadrilatère convexe sont les sommets d'un pseudocarré.

(H. VAN AUBEL.)

---

**Rectifications.** Page 173, ligne 13, lire 305, au lieu de 905. Supplément de la livraison de juin, p. 10, lignes 15 et 17, remplacer C'A par C'B, C'B par C'A.

## SUR QUELQUES THÉORÈMES DE MM. FOURET ET JAMET;

par M. E. Cesàro, professeur à l'Université de Naples (*).

Les questions résolues par M. Fouret dans deux communications à l'Académie des sciences (**) peuvent être traitées par une analyse très simple, que je me propose d'exposer ici. Il s'agit d'abord de *déterminer le rayon de courbure* $\rho$ *en un point* $m$ *d'une conique, connaissant trois points* $a_1$, $a_2$, $a_3$ *de la courbe, et la tangente* $mt$. Par rapport à cette tangente et à la normale correspondante l'équation de la conique est de la forme

$$2\rho y = x^2 + pxy + qy^2.$$

Elle doit être vérifiée par les coordonnées $x_i$, $y_i$ de $a_i$, $(i = 1, 2, 3,)$. Il faut donc que l'on ait

$$\begin{vmatrix} 2\rho y_1 - x_1^2 & x_1 y_1 & y_1^2 \\ 2\rho y_2 - x_2^2 & x_2 y_2 & y_2^2 \\ 2\rho y_3 - x_3^2 & x_3 y_3 & y_3^2 \end{vmatrix} = 0, \qquad (1)$$

c'est-à-dire

$$2\rho y_1 y_2 y_3 \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1^2 & x_1 y_1 & y_1^2 \\ x_2^2 & x_2 y_2 & y_2^2 \\ x_3^2 & x_3 y_3 & y_3^2 \end{vmatrix}.$$

On sait que le déterminant du premier membre représente le double de l'aire $\sigma$ du triangle $a_1 a_2 a_3$. L'autre déterminant a pour valeur, au signe près,

$$(x_2 y_3 - x_3 y_2)(x_3 y_1 - x_1 y_3)(x_1 y_2 - x_2 y_1) = 8\sigma^3 \mu_1 \mu_2 \mu_3,$$

---

(*) Nous sommes heureux de réparer ici un *lapsus memoriae* que nous avons commis dans notre note sur le rayon de courbure de certaines courbes planes (Suppl. de juin) : une formule que nous croyions nouvelle se déduit immédiatement d'une égalité signalée par M. Cesàro dans *Mathesis*, 1890, p. 190.

M. Gob nous a communiqué récemment une démonstration de la formule (2) de M. Cesàro, identique à celle que nous publions ci-après, et une démonstration géométrique que nous ferons connaître prochainement. (J. N.).

(**) *Comptes rendus*, 14 et 21 avril 1890.

$\mu_1, \mu_2, \mu_3$ étant les coordonnées barycentriques de $m$. Donc

$$\rho = -2\sigma^2 \frac{\mu_1\mu_2\mu_3}{y_1y_2y_3}. \qquad (2)$$

Nous retrouvons ainsi une formule obtenue ailleurs (*) par une voie tout à fait différente. Afin de mettre la relation (2) sous la forme que lui a donnée M. Fouret, remarquons que, si $u_i$, $\omega_i$ sont les coordonnées polaires de $a_i$, on a

$$y_i = u_i \sin\omega_i, \quad 2\sigma\mu_1 = -u_2u_3 \sin(\omega_3 - \omega_2), \text{ etc.}$$

En conséquence

$$\frac{1}{\rho} = \frac{4\sigma}{u_1u_2u_3} \cdot \frac{\sin\omega_1 \sin\omega_2 \sin\omega_3}{\sin(\omega_2 - \omega_3)\sin(\omega_3 - \omega_1)\sin(\omega_1 - \omega_2)},$$

ou bien

$$\frac{1}{\rho} = \frac{4 \text{ triangle } a_1a_2a_3}{ma_1 \cdot ma_2 \cdot ma_3} \cdot \frac{\sin a_1mt \cdot \sin a_2mt \cdot \sin a_3mt}{\sin a_2ma_3 \cdot \sin a_3ma_1 \cdot \sin a_1ma_2}.$$

C'est la formule de M. Fouret.

De même, si la conique, au lieu de *passer par les points* $a_1$, $a_2$, $a_3$, est assujettie à *toucher les droites* $a_2a_3$, $a_3a_1$, $a_1a_2$, on doit remplacer la condition (1) par celle-ci :

$$\begin{vmatrix} \rho(y_2 - y_3)^2 + 4\sigma\mu_1(x_2 - x_3) & \mu_1(y_2 - y_3) & \mu_1^2 \\ \rho(y_3 - y_1)^2 + 4\sigma\mu_2(x_3 - x_1) & \mu_2(y_3 - y_1) & \mu_2^2 \\ \rho(y_1 - y_2)^2 + 4\sigma\mu_3(x_1 - x_2) & \mu_3(y_1 - y_2) & \mu_3^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Le terme indépendant de $\rho$ est égal au produit de $4\sigma\mu_1\mu_2\mu_3$ par

$$\begin{vmatrix} \mu_1 & x_2 - x_3 & y_2 - y_3 \\ \mu_2 & x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \\ \mu_3 & x_1 - x_2 & y_1 - y_2 \end{vmatrix} = 2\sigma.$$

D'autre part, le coefficient de $\rho$ est décomposable en un produit de trois facteurs analogues à celui-ci :

$$\begin{vmatrix} \mu_1 & y_3 - y_1 \\ \mu_3 & y_1 - y_2 \end{vmatrix} = y_1.$$

---

(*) *Mathesis*, 1890, p. 190.

Donc

$$\rho = -8\sigma^2 \frac{\mu_1\mu_2\mu_3}{y_1y_2y_3}.$$

La comparaison avec (2) montre que *si, de deux coniques tangentes, l'une est inscrite et l'autre circonscrite à un même triangle, la courbure de la seconde conique est quadruple de celle de la première, au point de contact.*

M. Fouret se sert des résultats qui précèdent pour construire les rayons de courbure des *lignes anharmoniques*, c'est-à-dire des courbes caractérisées par la propriété suivante : *Toute tangente forme un rapport anharmonique constant avec les droites qui joignent le point de contact à trois points fixes.* On exprime cela en écrivant

$$\alpha_1 \cot\omega_1 + \alpha_2 \cot\omega_2 + \alpha_3 \cot\omega_3 = 0, \tag{3}$$

les nombres $\alpha$ étant assujettis à la condition

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0. \tag{4}$$

La différentiation de (3), faite en se rappelant que

$$\frac{d\omega_i}{ds} = -\frac{1}{\rho} + \frac{\sin\omega_i}{u_i},$$

donne

$$\frac{1}{\rho}\left(\frac{\alpha_1}{\sin^2\omega_1} + \frac{\alpha_2}{\sin^2\omega_2} + \frac{\alpha_3}{\sin^2\omega_3}\right) = \frac{\alpha_1}{y_1} + \frac{\alpha_2}{y_2} + \frac{\alpha_3}{y_3}. \tag{5}$$

D'ailleurs, les relations (3) et (4) montrent que $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$ sont proportionnels à

$$\cot\omega_2 - \cot\omega_3, \quad \cot\omega_3 - \cot\omega_1, \quad \cot\omega_1 - \cot\omega_2.$$

Or on a

$$\cot\omega_2 - \cot\omega_3 = \frac{\sin(\omega_2 - \omega_3)}{\sin\omega_2 \sin\omega_3} = -\frac{2\sigma\mu_1}{y_2y_3}. \tag{6}$$

Il en résulte

$$\alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3 = \mu_1y_1 : \mu_2y_2 : \mu_3y_3; \tag{7}$$

puis la relation (5) devient

$$\rho = \mu_1\frac{u_1^2}{y_1} + \mu_2\frac{u_2^2}{y_2} + \mu_3\frac{u_3^2}{y_3}. \tag{8}$$

On peut maintenant construire le rayon de courbure en transportant les masses coordonnées sur la normale, perpendiculairement aux droites qui joignent les sommets du triangle au point du contact. Dans leurs nouvelles positions *ces masses ont leur centre de gravité au centre de courbure*. Pour retrouver l'intéressante propriété, signalée par **M. Fouret**, il faut donner à la relation (8) une autre forme. On peut écrire

$$\rho = \mu_1 y_1 \cot^2\omega_1 + \mu_2 y_2 \cot^2\omega_2 + \mu_3 y_3 \cot^2\omega_3,$$

ou bien, en employant (6),

$$\rho = \frac{y_1 y_2 y_3}{2\sigma} \begin{vmatrix} 1 & \cot\omega_1 & \cot^2\omega_1 \\ 1 & \cot\omega_2 & \cot^2\omega_2 \\ 1 & \cot\omega_3 & \cot^2\omega_3 \end{vmatrix},$$

et, enfin,

$$\rho = -\frac{y_1 y_2 y_3}{2\sigma} \cdot \frac{\sin(\omega_2 - \omega_3)\sin(\omega_3 - \omega_1)\sin(\omega_1 - \omega_2)}{\sin\omega_1 \sin\omega_2 \sin\omega_3}.$$

Par conséquent, *le rayon de courbure en un point m d'une ligne anharmonique est le double* (la moitié) *du rayon de courbure de la conique circonscrite* (inscrite) *au triangle fondamental, qui touche en m la ligne considérée.*

Les segments détachés sur la tangente par les côtés du triangle, à partir du point de contact, sont

$$p_1 = -\frac{2\sigma x_1}{y_2 - y_3}, \quad p_2 = -\frac{2\sigma x_2}{y_3 - y_1}, \quad p_3 = -\frac{2\sigma x_3}{y_1 - y_2}.$$

Or on a, en vertu de la proportion (7),

$$\frac{x_1}{p_1} : \frac{x_2}{p_2} : \frac{x_3}{p_3} = y_1(y_2 - y_3) : y_2(y_3 - y_1) : y_3(y_1 - y_2).$$

Donc

$$\frac{x_1}{p_1} + \frac{x_2}{p_2} + \frac{x_3}{p_3} = 0. \qquad (9)$$

Nous aurions pu écrire immédiatement cette relation. Elle exprime, en effet, la propriété corrélative de la propriété de définition, à savoir : *Tout point de la courbe fait un rapport anharmonique constant avec les points où la tangente est rencontrée par trois droites fixes.* Il est d'ailleurs évident que les deux propriétés appartiennent à la même courbe. L'inté-

;ration de (9) conduit à l'équation barycentrique de nos lignes. Il faut l'abord se rappeler que, à cause des relations connues,

$$\frac{dx_i}{ds} = \frac{y_i}{\rho} - 1, \quad \frac{dy_i}{ds} = -\frac{x_i}{\rho},$$

on a aussi

$$\frac{d}{ds} \log \mu_i = -\frac{1}{p_i}.$$

Il est donc évident qu'en intégrant (9) on obtient

$$\mu_1^{\alpha_1} \mu_2^{\alpha_2} \mu_3^{\alpha_3} = \textit{constante}.$$

Toutes les propriétés qui précèdent sont renfermées comme cas particuliers dans un théorème de M. Jamet, concernant les courbes représentées par l'équation

$$\alpha_1 \mu_1^n + \alpha_2 \mu_2^n + \alpha_3 \mu_3^n = 0, \tag{10}$$

les coefficients $\alpha$ étant quelconques. Une première différentiation donne

$$\alpha_1 \mu_1^{n-1} (y_2 - y_3) + \alpha_2 \mu_2^{n-1} (y_3 - y_1) + \alpha_3 \mu_3^{n-1} (y_1 - y_2) = 0. \tag{11}$$

En différentiant encore une fois, on obtient

$$\frac{1}{\rho} [\alpha_1 \mu_1^{n-1} (x_2 - x_3) + \cdots] + \frac{1-n}{2\sigma} [\alpha_1 \mu_1^{n-2} (y_2 - y_3)^2 + \cdots] = 0. \tag{12}$$

Cela étant, on a, en vertu de (10) et de (11),

$$\alpha_1 \mu_1^{n-1} : \alpha_2 \mu_2^{n-1} : \alpha_3 \mu_3^{n-1} = y_1 : y_2 : y_3.$$

Il en résulte, par substitution dans (12),

$$(1 - n)\, \rho = \textit{constante},$$

pour toutes les courbes (10), qui se touchent en un point donné. On sait, du reste, que l'équation (10) représente une conique *circonscrite*, *inscrite* ou *conjuguée* au triangle fondamental suivant que $n = -1$, $n = \frac{1}{2}$, $n = 2$. Elle peut représenter aussi, pour $n = 0$, une *ligne anharmonique*, pourvu qu'il y ait, entre les coefficients $\alpha$, la relation (4). En effet,

$$\lim_{n=0} \frac{1}{n} \Sigma \alpha_i \mu_i^n = \lim \Sigma \alpha_i \frac{\mu_i^n - 1}{n} = \log \mu_1^{\alpha_1} \mu_2^{\alpha_2} \mu_3^{\alpha_3}.$$

Si l'on appelle $\rho'$, $\rho''$, $\rho'''$, $\rho^{IV}$ les rayons de courbure de ces quatre espèces de lignes, en leur point de contact, on a

$$4\rho' = \rho'' = -2\rho''' = 2\rho^{IV}.$$

En général,

$$\rho = \frac{2\rho'}{1-n}.$$

C'est le théorème de M. Jamet.

---

## QUESTIONS DE MÉCANIQUE,

par M. L. Meurice, docteur en sciences physiques et mathématiques.

1. Soient pris sur les trois côtés BC, CA, AB d'un triangle ABC trois couples de *points isotomiques* M et M', N et N', P et P'; ainsi M et M' sont symétriques par rapport au milieu de BC, etc. Désignons par X, Y, Z les milieux des droites N'P, P'M, M'N : *les droites* AX, BY, CZ *concourent en un même point et sont égales et parallèles aux côtés d'un même triangle.*

En effet, considérons six forces représentées en grandeur et en direction par AN', AP, BP', BM, CM', CN; elles se font équilibre comme étant opposées deux à deux. Mais les résultantes de AN' et AP, de BP' et BM, de CM' et CN sont dirigées suivant AX, BY, CZ et doubles de ces droites, donc elles concourent en un même point. De plus le polygone de ces trois résultantes partielles se ferme de lui-même.

On peut aussi observer que les triangles XYZ, ABC ont même centre de gravité, et que les droites joignant B et C respectivement aux milieux des droites P'M' et MN se coupent également sur AX(*).

2. Soient M et M', N et N', P et P', Q et Q' des couples de points isotomiques pris respectivement sur les côtés AB, BC, CD, DA d'un

---

(*) Si l'on pose $BM = \alpha$, $CN = \beta$, $AP = \gamma$, et $MC = \alpha'$, $NA = \beta'$, $PB = \gamma'$, les coordonnées normales du point de concours des droites AX, BY, CZ sont $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$; les droites joignant A, B, C, aux milieux des droites N'P, P'M', MN concourent en un point ayant pour coordonnées normales $\frac{1}{\alpha'}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$, etc. (J. N.).

quadrilatère plan; et soient X, Y, Z, U les milieux des droites M'N, N'P, P'Q, Q'M.

*Les droites* BX, CY, DZ, AU *représentent quatre forces en équilibre ;* autrement dit, *on peut former un quadrilatère dont les côtés sont égaux et parallèles à ces droites.*

Les deux quadrilatères ABCD, XYZU ont même centre des moyennes distances : les droites joignant les milieux des côtés opposés ou ceux des diagonales de l'un ou l'autre se coupent mutuellement en parties égales.

La démonstration de ce théorème est analogue à celle du premier.

**3.** La proposition précédente s'applique à un quadrilatère gauche. On en déduit que *les droites* BX, CY, DZ, AU *forment un quadruple hyperboloïdique* (*).

D'après un théorème connu, les faces homologues des tétraèdres BCDA, XYZU se coupent suivant quatre droites formant un quadruple hyperboloïdique.

**4.** Soient pris sur les six arêtes d'un tétraèdre AB, AC, AD, BC, CD, DB des couples de points isotomiques M et M', N et N', P et P', Q et Q', R et R', S et S' : *Les droites joignant les points* A, B, C, D *respectivement aux centres de gravité* X, Y, Z, U *des triangles* MNP, M'QS, Q'N'R, P'S'R' *sont les génératrices d'un même hyperboloïde, et l'on peut construire un quadrilatère dont les côtés sont égaux et parallèles à ces droites.*

En effet, la résultante de trois forces représentées par AM, AN, AP est dirigée suivant AX et égale à 3AX, etc. Les droites AX, BY, CZ, DU sont donc les résultantes partielles de douze forces représentées par $\frac{1}{3}$AM, $\frac{1}{3}$AN, $\frac{1}{3}$AP, etc., forces qui sont, deux à deux, opposées; donc le système des forces AX, BY, CZ, DU est en équilibre.

---

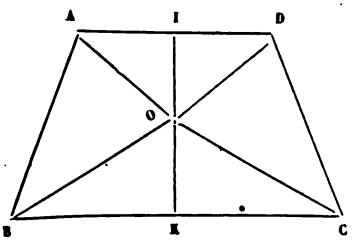
(*) Si les quatre forces BX, CY, DZ, AU, sont en équilibre, toute droite $m$ qui rencontre les lignes d'action des trois premières forces doit rencontrer celle de la quatrième; car si l'on suppose les forces appliquées à un solide qui ne peut que tourner autour de $m$, les trois premières sont détruites par la résistance de l'axe de rotation; par suite, l'équilibre exige que la quatrième le soit aussi.

## ENCORE QUELQUES PIÈGES MATHÉMATIQUES.

1. *Un piège géométrique.* Parmi les *pièges mathématiques* tels que ceux que vous signalez dans *Mathesis* (p. 169), connaissez vous le suivant, qui m'avait été communiqué il y a bien des années déjà par notre pauvre ami Edouard Lucas ? J'ignore si la question était de lui ; dans tous les cas elle est intéressante.

*Un quadrilatère ayant deux côtés opposés égaux* AB et CD, nous allons démontrer que *les deux autres sont parallèles.*

Sur les milieux I, K des deux côtés AD, BC élevons des perpendiculaires qui se rencontrent en O, et joignons OA, OB, OC, OD. Alors OA = OD, OB = OC, et comme AB = CD par hypothèse, les deux triangles OAB, OCD sont égaux. Les angles AOB, COD le sont donc aussi. Comme




$$IOD = IOA,\quad KOB = KOC,$$

il en résulte que

$$IOA + AOB + BOK = 180°,$$

c'est à dire que IOK est une ligne droite ; et les deux côtés AD, BC étant perpendiculaires à cette droite sont parallèles (Extrait d'une lettre de M. Laisant).

2. *Quelques paradoxes algébriques.* 1° Si $a$ est différent de $b$, $x - a$ est aussi différent de $x - b$, et $(x - a)^2$ différent de $(x - b)^2$. L'équation $(x - a)^2 = (x - b)^2$ semble donc impossible. Cependant, en effectuant les carrés, on a

$$x^2 - 2ax + a^2 = x^2 - 2bx + b^2, \quad \text{d'où} \quad x = \tfrac{1}{2}(a + b).$$

2° Soit l'équation

$$\frac{3x - b}{3x - 5b} = \frac{3a - 4b}{3a - 8b}.$$

Ces fractions sont évidemment différentes de l'unité. Cependant, en les soustrayant terme à terme, on trouve qu'elles sont égales chacune à

$$\frac{3x - 3a + 3b}{3x - 3a + 3b}$$

ou à 1.

3° Soit le système d'équations

$$\frac{x-a+c}{y-a+b}=\frac{b}{c},\quad \frac{x+c}{y+b}=\frac{a+b}{a+c}.$$

En soustrayant les fractions terme à terme, on trouve

$$\frac{x-a-b+c}{y-a+b-c}=\frac{b}{c},\quad \frac{x-a-b+c}{y-a+b-c}=\frac{a+b}{a+c}.$$

On a donc deux quantités

$$\frac{b}{c} \quad \text{et} \quad \frac{a+b}{a+c}$$

égales à une troisième sans être égales entre elles.

4° Soit l'équation

$$\frac{x+1}{a+b+1}=\frac{x-1}{a+b-1}.$$

Si de chaque antécédent on soustrait le conséquent, ou si de chaque conséquent on soustrait l'antécédent, on a

$$\frac{x-a-b}{a+b+1}=\frac{x-a-b}{a+b-1} \quad \text{ou} \quad \frac{x+1}{a+b-x}=\frac{x-1}{a+b-x}.$$

On a donc deux fractions égales, qui ont le même numérateur et des dénominateurs différents, ou le même dénominateur et des numérateurs différents.

5° L'identité $a^2-a^2=a^2-a^2$ peut s'écrire $a(a-a)=(a+a)(a-a)$ d'où en divisant par $a-a$, $a=a+a$ ou $a=2a$, et, en particulier, $1=2$. Ajoutant 1, on a ensuite $1+1=2+1$ ou $2=3$, puis $3=4$, et ainsi de suite. Donc *tous les nombres sont égaux.* (E. Gelin.)

---

## *LIMITE OU GÉNÉRATRICE.

On emploie, en mathématiques, les points suspensifs : ....., dans deux sens différents, le plus souvent sans définir nettement ni l'une ni l'autre signification attribuée à ce symbole. Il en résulte que dans la théorie des fractions périodiques, des progressions, des fractions continues, des séries, des produits infinis, beaucoup d'élèves comprennent imparfaite-

ment la vraie portée de certains raisonnements, où l'on se sert des points suspensifs.

Nous croyons donc utile de donner dans *Mathesis* quelques notions précises sur les deux significations de ces points.

Supposons que l'on divise le binôme $1+x$ par $1-x$, d'après le procédé habituel usité en algèbre. On trouvera

$$\frac{1+x}{1-x} = 1 + 2x + 2x^2 + \cdots\cdots + 2x^n + \frac{2x^{n+1}}{1-x} \qquad \text{(A)}$$

Si, pour une raison quelconque, on n'a besoin que de la loi de formation du quotient, et non du reste, on écrira plus simplement

$$\frac{1+x}{1-x} = 1 + 2x + 2x^2 + 2x^3 + \cdots\cdots \qquad \text{(1)}$$

Les points signifient que les termes du quotient se forment d'après la loi que les termes écrits explicitement mettent en évidence. Cette loi d'ailleurs suffit pour faire retrouver, sans peine, le reste et même la fraction algébrique qui a donné naissance au quotient illimité, comme on peut le voir dans les Traités d'Algèbre (Lefébure, *Algèbre*, ch. XXIV).

Dans le sens que nous venons d'indiquer, la formule (1) est vraie pour toute valeur de $x$, même pour $x = 1$. En effet, il n'est pas plus difficile de faire une division algébrique par $1-x$, quand $x = 1$, que si $x = \frac{1}{2}$, ou $x = -3$; car l'égalité (A), considérée comme exprimant le résultat d'une division algébrique, signifie que l'on a identiquement

$$1 + x = (1 + 2x + 2x^2 + \cdots + 2x^n)(1 - x) + 2x^{n+1}$$

et celle-ci subsiste pour toute valeur de $x$.

Mais on peut donner à l'égalité (1) un autre sens. *Si $x$, en valeur absolue, est plus petit que l'unité*, on a

$$lim \frac{x^{n+1}}{1-x} = 0,$$

pour $n$ croissant indéfiniment. Par suite, on a aussi

$$\frac{1+x}{1-x} = lim\,(1 + 2x + 2x^2 + \cdots + 2x^n) \qquad \text{(2)}$$

ce que l'on peut écrire, *par convention*, sous la forme

$$\frac{1+x}{1-x} = 1 + 2x + 2x^2 + 2x^3 + \cdots \qquad \text{(1)}$$

Les points remplacent ici le mot *limite* et les parenthèses de la relation (2).

L'expression

$$1 + 2x + 2x^2 + 2x^3 + \cdots$$

a donc deux sens distincts : elle représente ou bien la *limite* de

$$1 + 2x + 2x^2 + 2x^3 + \cdots + 2x^n,$$

dans le cas où $x$ est compris entre — 1 et 1 pour $n$ croissant indéfiniment, ou la fraction algébrique qui est la *fonction génératrice* d'un développement de la forme (1).

***

En arithmétique élémentaire, on rencontre les points suspensifs avec les deux sens indiqués plus haut, comme nous l'avons déjà fait remarquer (*Mathesis*, 1881, *Théorie des fractions périodiques*, I, pp. 103-106).

Quand on réduit $\frac{4}{9}$ en fraction décimale, on trouve

$$\frac{4}{9} = 0{,}444\ldots 4_n + \frac{4}{9 \times 10^n},$$

ce que l'on écrit, sous la forme

$$\frac{4}{9} = 0{,}444\ldots\ldots$$

$\frac{4}{9}$ est la fraction *génératrice* de 0,444..... On voit immédiatement que l'on a aussi

$$\frac{4}{9} = \lim (0{,}444\ldots 4_n)$$

et l'on peut encore écrire cette relation sous la forme

$$\frac{4}{9} = 0{,}444\ldots$$

Il en est de même dans tous les cas : la fraction *génératrice* d'une fraction décimale périodique est toujours égale à la *limite* de cette fraction périodique.

La réciproque est-elle vraie, *la limite d'une fraction périodique*, $0{,}44\ldots 4_n$ *ou* $0{,}539\ldots 9_n$ *peut-elle toujours être regardée comme la génératrice de cette fraction périodique?* Oui, car on peut prouver *directement*

que toute fraction périodique a une génératrice, et dès lors, elle a aussi une limite égale à cette génératrice, d'après la remarque faite plus haut.

On peut aussi prouver *directement* que toute fraction périodique a une limite, mais il est moins facile d'en déduire que la limite est aussi la génératrice de la fraction périodique(*).

***

Halphen a démontré(**) que la série d'Abel

$$\varphi(0) + x\varphi'(\beta) + x\frac{(x-2\beta)}{1.2}\varphi''(2\beta) + \cdots + x\frac{(x-n\beta)^{n-1}}{1.2..n}\varphi^n(n\beta) + \cdots$$

où $\beta$ est une quantité arbitraire, a toujours une limite différente de $\varphi(x)$, quand $\varphi(x)$ est une fraction rationnelle.

Dans ce cas remarquable, selon que l'on donne aux points suspensifs l'un ou l'autre de leurs deux sens, on trouve donc un résultat différent. *La limite de la série est toujours différente de la génératrice.*

Il faut donc se garder d'étendre à toutes les séries la remarque faite plus haut sur les fractions périodiques. Même quand la limite et la génératrice d'une suite illimitée sont finies, elles peuvent être distinctes.

Il faut se garder aussi de croire, sans examen préalable, qu'au siècle passé, Euler, Lagrange et Laplace ont manié des séries divergentes, chaque fois qu'ils ont employé des formules analogues à (1), quand $x$ surpasse l'unité; car ils se servaient des points suspensifs, non seulement dans le sens de *limite*, mais aussi dans celui de *génératrice*. (P. M.)

---

## REVUE BIBLIOGRAPHIQUE.

**Recueil de problèmes de mathématiques** par M. C. A. LAISANT, Docteur-ès-Sciences. Tome II. *Géométrie* et *Géométrie descriptive*. Paris, Gauthier-Villars et fils, 1893 (X-206 p. in-8°). Prix : 5 francs.

Ce volume contient les énoncés de toutes les questions (au nombre de 813) de *Géométrie* proprement dite, soit à deux, soit à trois dimensions et ceux de quelques exercices de *Géométrie descriptive*, qui ont été proposés dans les *Nouvelles Annales*,

(*) Dans une foule de traités élémentaires, on confond *génératrice* et *limite* et, par suite, on admet cette dernière proposition sans la démontrer.

(**) *Bulletin de la Société mathématique de France*, 1882, t. X, pp. 82-84).

la *Nouvelle Correspondance*, le *Journal de Mathématiques élémentaires et spéciales*, fondé par Bourget et continué par M. de Longchamps, et *Mathesis;* les énoncés sont suivis du renvoi à la solution lorsque celle-ci a paru dans l'une de ces publications. Un nombre relativement assez considérable de questions se rapportent aux coniques, mais elles ont un caractère élémentaire et peuvent être traitées synthétiquement.

Nous ne pourrions mieux recommander les qualités de ce livre qu'en empruntant ces paroles de la Préface :

« La très grande variété des questions de Géométrie contribuera, nous l'espérons à donner à ce Recueil une réelle utilité, en présentant aux professeurs un large choix d'exercices. Cette collection pourra fournir aussi à des élèves d'élite l'occasion de s'exercer spontanément à la solution des problèmes ; elle attirera enfin, sur certaines questions oubliées, une attention qui profitera à l'enseignement comme à la Science. »

---

**Saggio d'introduzione alla teoria delle quantita complesse geometricamente rappresentate** per B. CARRARA. Cremona, Premiata Tip. Lit. Fezzi, 1893. (XXV-152 pages in 8°). Prix : fr. 2,50.

L'*Introduction* (pag. V-XXV) renferme un historique assez complet de la représentation géométrique d'une quantité complexe (*).

La *Première Partie* est divisée en deux chapitres : l'un (pp. 7-28) expose les *notions fondamentales* sur les quantités imaginaires (représentation géométrique de $\alpha+\beta i$) ; l'autre (pp. 28-66), les opérations sur les quantités géométriques : addition, soustraction, multiplication, division, élévation aux puissances, extraction des racines, équations binômes et racines de l'unité.

La *Seconde Partie* comprend quatre chapitres : I. Sur quelques séries (pp. 69-87) (**) ; II. Fonctions d'une variable complexe (pp. 88-117) ; III. Équations algébriques (pp. 118-133) ; IV. Intégrales des fonctions synectiques (pp. 134-152).

Le livre de M. Carrara constitue une introduction claire et simple, mais peut-être çà et là, trop peu rigoureuse, à la théorie complète des quantités complexes ; il se rapproche beaucoup de la *Théorie élémentaire des quantités complexes* par Houël.

---

(*) Voici quelques petites erreurs qui se sont glissées dans cette introduction et que nous signalons à l'auteur. — P. VII. L'*Essai* d'Argand n'a pas été réimprimé, mais résumé et complété dans les *Annales de Gergonne*. — P. XII. Gauss est né en 1775. — P. XV. Le livre de Thomae (et non Tomae) a eu trois éditions. — P. XVII. L'ouvrage cité dans la note 2° est la seconde édition de celui qui est cité dans le texte, lequel est lui-même un remaniement d'un mémoire célèbre des deux auteurs, publié quelques années auparavant et beaucoup plus suggestif que les deux éditions citées. — P. XXI. Lisez Siebeck, Scheffler ; p XXII, Callandreau, Ruchonnet, de Saint Venant. Le dernier a écrit sur la composition des droites un mémoire original et de la plus grande portée qui vaut la peine d'être cité.

(**) Les raisonnements des § 4 et 5 ne sont pas suffisamment rigoureux. Il en est de même de ceux de plusieurs n°s suivants (105, 106, 120, 140). Sur ces points, le livre de M. Carrara doit être complété. Voir par exemple, la nouvelle édition du *Cours d'analyse* de Jordan.

**La risoluzione dei Problemi numerici e geometrici** per Dott. R. Bettazzi. — Torino-Roma-Milano-Firenze-Napoli, G. B. Paravia, 1893 (VIII-100 p. in-8°). Prix : 2 fr.

L'auteur a consulté les ouvrages suivants : *Des méthodes en géométrie*, par P. Serret; *Des méthodes dans les sciences de raisonnement*, par Duhamel ; *Traité de Géométrie*, par Rouché et de Comberousse ; *Méthodes et Théories pour la résolution des problèmes de géométrie*, par Petersen, *Avviamento alle risoluzione delle questioni geometriche*, par Pastore. Il s'étend longuement, peut-être trop, sur les généralités ; les exemples développés pourraient être plus nombreux et les exercices proposés font complètement défaut. Néanmoins, nous croyons que le livre de M. Bettazzi peut rendre des services aux professeurs et aux élèves des établissements italiens d'instruction moyenne, et qu'il sera lu avec profit aussi ailleurs qu'en Italie.

---

**Recueil de calculs logarithmiques à l'usage des candidats aux baccalauréats d'ordre scientifique et aux diverses écoles du gouvernement : Saint-Cyr, navale, centrale, polytechnique, mines, ponts et chaussées, etc.**, par P. Barbarin, professeur agrégé au lycée de Bordeaux. Paris, Nony, 1893 (258 p. in-4°). Prix : 8 fr. 50.

Voici la table des matières de cet excellent recueil que nous recommandons vivement aux professeurs et aux élèves.

Chap. I. Equations exponentielles. Intérêts composés, annuités : 8 exercices traités, 11 exercices proposés. — II. Équations trigonométriques : 14 ex. traités, 17 proposés. — III. Résolution des triangles rectangles et applications : 11 ex. traités, 14 proposés. — IV. Résolution des triangles quelconques. 1. On donne un côté et les angles : 4 ex. traités, 7 proposés. 2. On donne deux côtés et l'angle compris : 13 ex. traités, 21 proposés. 3. On donne les trois côtés : 6 ex. traités, 9 proposés. 4. On donne deux côtés et l'angle opposé à l'un : 4 ex. traités, 5 proposés. 5. On donne des éléments autres que les angles et les côtés : 10 ex. traités, 8 proposés. — V. Résolution des quadrilatères et problèmes divers : 6 ex. traités. — VI. Problèmes sur le terrain : 8 ex. traités. — VII. Cosmographie, 5 ex. traités ; table des logarithmes de $1 + \alpha t$ ; physique, 3 ex. traités. — VIII. Problèmes divers, 7 ex. proposés ; problèmes sur le terrain et cosmographie, 7 ex. proposés.

Les exemples traités ou proposés dans ce Recueil sont presque tous choisis parmi ceux qui ont été proposés aux concours et examens de ces dernières années.

Il faut, dit l'auteur dans la Préface, que les élèves parviennent à asseoir directement leurs calculs sur le papier, avec ordre et précision, et cela, sans faire aucun brouillon. Nous sommes persuadé qu'ils acquerront en peu de temps cette faculté s'ils refont quelques-uns des exemples traités par M. Barbarin et appliquent ensuite les mêmes méthodes à quelques exercices proposés (*).

---

(*) Le recueil de M. Barbarin sera d'autant plus utile aux jeunes gens qui veulent entrer dans les écoles spéciales belges que l'on exige, depuis 1891, à l'examen d'entrée, la résolution complète d'une question de trigonométrie, calculs numériques compris.

## SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES (*).

### Question 786.

(Voir *Mathesis*, (2), II, p. 216.)

*Les côtés* AB, BC, CD, DA *d'un quadrangle sphérique* ABCD *sont divisés aux points* E, F, G, H *de manière que*

$$\frac{\sin AE}{\sin BE} = \frac{\sin CF}{\sin BF} = \frac{\sin CG}{\sin DG} = \frac{\sin AH}{\sin DA} = \lambda.$$

*Démontrer que les arcs de grand cercle* EG, FH *se coupent en un point* I *de l'arc joignant les milieux* K, L *des diagonales* AC, BD. *Si ces diagonales sont égales, on a* $\frac{\sin KI}{\sin LI} = \lambda$. (J. Tate.)

*Solution par* M. Déprez. 1° Les arcs de grand cercle EL, GK se coupent sur le côté AD. En effet, si EL rencontre AD en Q, le triangle ABD coupé par l'arc transversal EL donne

$$\frac{\sin AE}{\sin BE} \times \frac{\sin BL}{\sin DL} \times \frac{\sin DQ}{\sin AQ} = 1,$$

d'où $\frac{\sin AQ}{\sin DQ} = -\lambda$. De même l'arc GK partage AD en deux segments dont le rapport des sinus est égal à $-\lambda$, etc.

2° Considérons maintenant le triangle QLK coupé par l'arc transversal EG ; si I est le point de rencontre de EG avec LK, nous aurons

$$\frac{\sin EL}{\sin EQ} \times \frac{\sin IK}{\sin IL} \times \frac{\sin GQ}{\sin GK} = 1. \qquad (1)$$

D'autre part, les triangles QDL, QAK coupés respectivement par les arcs AB, DC donnent

$$\frac{\sin LE}{\sin QE} \times \frac{\sin QA}{\sin DA} \times \frac{\sin DB}{\sin LB} = 1, \qquad (2)$$

$$\frac{\sin QG}{\sin KG} \times \frac{\sin KC}{\sin AC} \times \frac{\sin AD}{\sin QD} = 1. \qquad (3)$$

(*) Nous avons reçu, trop tard pour pouvoir les mentionner à la page 149, de bonnes solutions de la question 840, par MM. H. Brocard et Absolonne, des questions 845 et 850 par M. Absolonne.

Substituons dans (1) les valeurs des rapports $\frac{\sin LE}{\sin QE}$, $\frac{\sin QG}{\sin KG}$ tirées de (2) et (3); il vient

$$\frac{\sin IK}{\sin IL} \times \frac{\sin AD}{\sin AQ} \times \frac{\sin LB}{\sin DB} \times \frac{\sin AC}{\sin KC} \times \frac{\sin QD}{\sin AD} = 1,$$

relation qui, à cause de $\frac{\sin AQ}{\sin DQ} = -\lambda$, se réduit à

$$\frac{\sin IK}{\sin IL} = -\lambda \frac{\cos \frac{BD}{2}}{\cos \frac{AC}{2}}.$$

La forme même de cette égalité montre que l'arc FH rencontre LK au même point I.

*Autre solution.* Soit O le centre de la sphère. Attachons aux points A, C des masses égales à l'unité, et aux points B, D des masses égales à $\lambda$. Pour trouver le centre de gravité de ces quatre masses nous pouvons procéder de différentes manières.

1° Les masses attachées aux points A et C peuvent être remplacées par une masse égale à 2 et atttachée au milieu *k* de la droite AC; celles qui se trouvent en B et D, par une masse égale à $2\lambda$ et attachée au milieu *l* de la droite BD; enfin, les masses qui se trouvent en *k* et *l* ont pour centre de gravité le point *i* qui divise *kl* en deux segments proportionnels à $\lambda$ et 1. Mais O*k* passe par K, O*l* par L; donc O*i* est situé dans le plan OLK et rencontre l'arc LK en un certain point I.

2° On peut remplacer les masses fixées en A et B par une masse $1 + \lambda$ fixée au point *e* qui divise AB en deux segments A*e*, *e*B dans le rapport $\lambda : 1$; comme OA = OB, on a A*e* : *e*B = sin AO*e* : sin *e*OB et par suite, O*e* passe par E. Semblablement les masses fixées en CD peuvent être remplacées par une masse unique $1 + \lambda$, attachée au point *g* qui divise la droite CD dans le rapport $\lambda : 1$. Il résulte de là que le centre de gravité *i* des quatre masses est au milieu de la droite *eg;* donc l'arc EG passe par I.

3° En combinant d'abord les masses placées en B et C, puis celles des points A et D, on voit que *i* est au milieu de la droite joignant les points qui divisent les cordes BC, AD dans le rapport $1 : \lambda$; par conséquent, l'arc FH passe par I.

Si BD = AC, le triangle O*ik* est isoscèle et l'on a :

$$\lambda = \frac{ki}{il} = \frac{\sin \mathrm{KO}i}{\sin i\mathrm{OL}} = \frac{\sin \mathrm{KI}}{\sin \mathrm{IL}}.$$

Une remarque analogue est applicable lorsque AB = CD, ou AD = BC; I est alors au milieu de l'arc EG ou de l'arc FH. (J. N.)

---

## Question 827.

(Voir *Mathesis*, (2), III, p. 80.)

*On joint un point* M *d'une ellipse à l'un des sommets* A *du grand axe. Du point* P, *pôle de* MA *par rapport à l'ellipse, on abaisse une perpendiculaire* PQ *sur la parallèle au grand axe passant par* M, *et une perpendiculaire* PR *sur la parallèle au petit axe passant par le point* M', *symétrique de* M *par rapport au centre. Le rectangle des segments* PQ *et* PR *est équivalent à celui formé par l'ordonnée et l'abscisse du point* M, *relatives aux axes.* (E. N. Barisien.)

*Solution par* MM. Bellens, Quint, Déprez *et* Greenstreet.

Équation de l'ellipse :

$$a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2 = 0.$$

Coordonnées de M :

$$x' = a\cos\alpha, \quad y' = b\sin\alpha.$$

Tangente en M :

$$a\sin\alpha \,.\, y + b\cos\alpha \,.\, x - ab = 0.$$

Coordonnées de P :

$$a, \quad \frac{b(1-\cos\alpha)}{\sin\alpha}.$$

Distance PQ :

$$b\sin\alpha - \frac{b(1-\cos\alpha)}{\sin\alpha} = \frac{b\cos\alpha(1-\cos\alpha)}{\sin\alpha}.$$

Distance PR :

$$a + a\cos\alpha = a(1+\cos\alpha).$$

On a donc

$$\mathrm{PQ} \,.\, \mathrm{PR} = a \,.\, b \,.\, \sin\alpha \,.\, \cos\alpha = x'\,y'.$$

*Solution par* MM. Retali, Droz Farny, Vladimireau, Camus (Dinant) et Mˡˡᵉ de Haas. Soient $x'$, $y'$ les coordonnées de M; on a :
Équation de MP :

$$a^2yy' + b^2xx' = a^2b^2.$$

Coordonnées de P :

$$a, \quad \frac{a - x'}{a}\frac{b^2}{y'}.$$

Distance PQ :

$$y' - \frac{a - x'}{a}\frac{b^2}{y'} = \frac{ay'^2 + b^2x' - ab^2}{ay'}.$$

Distance PR :

$$a + x'.$$

On a donc

$$\text{PQ} \cdot \text{PR} = \frac{(a + x')(ay'^2 + b^2x' - ab^2)}{ay'}$$

$$= \frac{a^2y'^2 + b^2x'^2 - a^2b^2 + ay'^2x'}{ay'} = x'y'.$$

*Solution par* M. Brocard. Soient $(a, h)$ les coordonnées de P.
Équation de la polaire de P :

$$a^2hy + b^2ax = a^2b^2.$$

Coordonnées de M :

$$\alpha = a\frac{b^2 - h^2}{b^2 + h^2}, \quad \beta = \frac{2b^2h}{b^2 + h^2}.$$

On trouve ensuite

$$\text{PQ} = \beta - h = h\frac{b^2 - h^2}{b^2 + h^2}, \quad \text{PR} = \alpha + a = \frac{2b^2a}{b^2 + h^2},$$

$$\text{PQ} \cdot \text{PR} = \frac{2ab^2h(b^2 - h^2)}{(b^2 + h^2)^2} = \alpha\beta.$$

Remarque. Le théorème s'applique aussi à l'hyperbole. (Déprez.)

## ×Question 838.

(Voir *Mathesis*, (2), III, p. 127.)

*Si* $N-1$ *et* $N+1$ *sont premiers, le nombre* $2N^2+2$, *somme de deux carrés, est aussi la somme de trois carrés, la somme de quatre carrés, la somme de cinq carrés.* (E. CATALAN.)

*Solution par* M. MANDART. Tout nombre premier étant de la forme $6m \pm 1$, nous pouvons poser $N-1=6m-1$, $N+1=6m+1$. Il en résulte

$$\begin{aligned} 2N^2+2 &= (N+1)^2+(N-1)^2 = 72m^2+2 \\ &= 64m^2+(2m+1)^2+(2m-1)^2 \\ &= 36m^2+4m^2+(4m-1)^2+(4m+1)^2 \\ &= 9m^2+9m^2+4m^2+(5m-1)^2+(5m-1)^2 \end{aligned}$$

On peut encore observer que

$$\begin{aligned} 72m^2+2 &= 25m^2+25m^2+4m^2+(3m+1)^2+(3m-1)^2 \\ &= 49m^2+4m^2+m^2+(3m+1)^2+(3m-1)^2 \\ &= 25m^2+16m^2+9m^2+4m^2+(3m+1)^2+(3m-1)^2 \\ &= 16m^2+16m^2+9m^2+9m^2+4m^2+(3m+1)^2+(3m-1)^2. \end{aligned}$$

(J. N. et J. M.).

---

## Question 842.

(Voir *Mathesis*, (2), III, p. 128.)

*Trouver*

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{arc\,tg}(x\sin\theta)\,d\theta.$$

(GREENSTREET).

*Solution par* M. V. JAMET. Soit $z$ l'intégrale cherchée. On trouve :

$$\frac{dz}{dx} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\theta\,d\theta}{1+x^2\sin^2\theta} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\theta\,d\theta}{1+x^2-x^2\cos^2\theta}$$

$$= \frac{1}{2x\sqrt{1+x^2}}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\sin\theta\,d\theta}{\sqrt{1+x^2}+x\cos\theta} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\sin\theta\,d\theta}{\sqrt{1+x^2}-x\cos\theta}\right)$$

$$= \frac{1}{2x\sqrt{1+x^2}}\left[\log\frac{\sqrt{1+x^2}-x\cos\theta}{\sqrt{1+x^2}+x\cos\theta}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{-1}{2x\sqrt{1+x^2}}\log\frac{\sqrt{1+x^2}-x}{\sqrt{1+x^2}+x}$$

$$= \frac{-1}{x\sqrt{1+x^2}}\log\left(\sqrt{1+x^2}-x\right).$$

Soit maintenant $\sqrt{1+x^2} - x = t$. Pour toute valeur positive de $x$, $t$ sera positive et inférieure à 1; et à deux valeurs de $x$ égales et de signes contraires, répondront deux valeurs de $z$, égales et de signes contraires si toutefois on se borne à considérer la valeur de $z$ qui s'annule avec $x$. Nous nous proposons d'exprimer $z$ au moyen d'une série dont chaque terme sera une fonction de $t$, série convergente pour toute valeur de $t$ comprise entre zéro et 1. A cet effet, nous observons que, $z$ étant nul avec $x$, le résultat précédent équivaut à :

$$z = -\int_0^x \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}} \log(\sqrt{1+x^2} - x).\, dx = 2\int_1^t \frac{\log t.\, dt}{1-t^2}$$

$$= 2\int_1^t (1 + t^2 + t^4 + \cdots + t^{2(n-1)}) \log t\, dt + 2\int_1^t \frac{t^{2n} \log t}{1-t^2}\, dt.$$

Si $u$ varie de 1 à $t$, la fonction $\dfrac{\log u}{1-u^2}$, égale à $-\dfrac{1}{2}$ pour $u = 1$, est finie pour toute autre valeur de $u$; il y a donc un nombre $\mu$, indépendant de $n$, au-dessous duquel reste constamment la valeur numérique de cette fonction, et l'intégrale

$$\int_1^t \frac{t^{2n} \log t}{1-t^2}\, dt$$

est numériquement inférieure à

$$\left| \mu \int_1^t t^{2n}\, dt \right| \quad \text{ou à} \quad \frac{\mu(1-t^{2n+1})}{2n+1}.$$

On en conclut que $z$ est égale à la somme de la série

$$2\sum_{p=0}^{p=\infty} \int_1^t t^{2p} \log t\, dt$$

si toutefois cette série est convergente. Or

$$\int_1^t t^{2p} \log t\, dt = \frac{t^{2p+1} \log t}{2p+1} - \frac{1}{2p+1} \int_1^t t^{2p}\, dt$$

$$= \frac{t^{2p+1} \log t}{2p+1} - \frac{t^{2p+1}}{(2p+1)^2} + \frac{1}{(2p+1)^2}.$$

Donc la série que nous voulons étudier est égale à la somme des trois termes suivants :

$$\log t \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{t^{2p+1}}{2p+1} - \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{t^{2p+1}}{(2p+1)^2} + \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{1}{(2p+1)^2},$$

et chacun d'eux est égal à une série dont la convergence est évidente. D'ailleurs, deux de ces séries peuvent être sommées très facilement. On sait, en effet, que

$$\sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{t^{2p+1}}{2p+1}$$

est le développement de

$$\frac{1}{2}\log\left(\frac{1-t}{1+t}\right) \quad \text{et que} \quad \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8},$$

comme l'indique la comparaison des développements de cos $x$ en série entière et en produit infini. Donc enfin

$$z = \log t . \log\frac{1-t}{1+t} + \frac{\pi^2}{4} - 2\sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{t^{2p+1}}{(2p+1)^2}.$$

Quant à la série qui figure dans cette dernière expression, il ne me paraît pas possible d'exprimer sa somme en fonction de $t$, sans signe d'intégration. En effet, c'est une fonction de $t$ dont la dérivée est égale à

$$\sum_{p=0}^{p=\infty} t^{2p}$$

ou bien à

$$\frac{1}{t}\log\frac{1-t}{1+t}.$$

Or, cette fonction s'annule avec $t$. Donc elle est égale à

$$\int_0^t \frac{1}{t}\log\left(\frac{1-t}{1+t}\right)dt.$$

Ajoutons que, pour les valeurs de $x$ comprises entre $-1$ et $+1$, la fonction $z$ est susceptible d'un développement en série entière. En effet, pour de telles valeurs de $x$ :

$$\text{Arc tang}(x \sin\theta) = \frac{x}{1}\sin\theta - \frac{x^3}{3}\sin^3\theta + \frac{x^5}{5}\sin^5\theta - \cdots$$

et, par conséquent :

$$z = x\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\, d\theta - \frac{x^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\theta\, d\theta + \frac{x^5}{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5\theta\, d\theta - \cdots$$

**Mais**

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p+1}\theta\, d\theta = \frac{2.4.6\ldots 2p}{3.5.7\ldots(2p+1)}.$$

Donc, dans l'hypothèse actuelle,

$$z = x + \sum_{p=1}^{p=\infty} \cdot \frac{2.4.6\ldots 2p}{3.5.7\ldots 2p+1} \cdot \frac{x^{2p+1}}{2p+1} \cdot (-1)^p,$$

série convergente, même pour $x = \pm 1$, comme le montre l'application de la règle de Duhamel.

---

## ×Question 854.

(Voir *Mathesis*, (2), III, p. 252.)

*Soient* O *le centre du cercle circonscrit,* I *le centre du cercle inscrit au triangle* ABC, A′ *le symétrique de* A *par rapport à* O. *Démontrer* 1° *que la somme des carrés des tangentes menées de* A *et* A′ *au cercle* I *est égale à* $4R^2 - 4Rr - 2r^2$, R *et* r *désignant les rayons des cercles* O *et* I; 2° *que la circonférence décrite de* A′ *comme centre avec le rayon* A′I *coupe la circonférence* O *en un point* L *tel que* $AL = \sqrt{AB \cdot AC}$. (Tucker.)

*Solution par* MM. Droz-Farny et Thiry. 1° En appelant $t$ et $t'$ les tangentes en question, on a

$$t^2 = \overline{AI}^2 - r^2, \quad t'^2 = \overline{A'I}^2 - r^2,$$

d'où

$$t^2 + t'^2 = \overline{AI}^2 + \overline{A'I}^2 - 2r^2. \tag{1}$$

Mais

$$AI^2 + \overline{A'I}^2 = \overline{2IO}^2 + 2R^2 = 2(R^2 - 2Rr) + 2R^2, \tag{2}$$

donc

$$t^2 + t'^2 = 4R^2 - 4Rr - 2r^2. \qquad C.\,q.\,f.\,d.$$

2° $$\overline{AL}^2 = \overline{AA'}^2 - \overline{A'L}^2 = 4R^2 - \overline{A'I}^2. \tag{3}$$

Mais l'égalité (2) donne

$$\overline{A'I}^2 = 4R^2 - 4Rr - \overline{AI}^2.$$

L'égalité (3) devient donc

$$\overline{AL}^2 = \overline{4R}^2 - (4R^2 - 4Rr - \overline{AI}^2)$$
$$= 4Rr + \overline{AI}^2 = \frac{abc}{p} + \frac{bc(p-a)}{p} = bc. \qquad C.\,q.\,f.\,d.$$

Autre solution par MM. MANDART et DELEHAYE.

## QUESTIONS D'EXAMEN.

**585.** Le cercle circonscrit au rectangle des axes d'une ellipse rencontre une tangente quelconque à cette courbe en deux points M, M' tels que les droites OM, OM' sont des diamètres conjugués. (CLIFFORD).

Les coordonnées des points M, M' vérifient les équations

$$x^2 + y^2 = a^2 + b^2, \quad \frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} = 1;$$

par suite, l'égalité homogène

$$x^2 + y^2 - (a^2 + b^2)\left(\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2}\right)^2 = 0$$

donne deux valeurs du rapport $\frac{y}{x}$, dont le produit est

$$\frac{b^4 a^4 - (a^2 + b^2) x'^2}{a^4 b^4 - (a^4 + b^2) y'^2} = -\frac{b^2}{a^2},$$

$y'^2$ étant remplacé par $\frac{b^2}{a^2}(a^2 - x'^2)$.

**586.** Résoudre le système

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = p, \quad \operatorname{tg}(x+y) = -p.$$

Maximum et minimum de $p$.

## QUESTIONS PROPOSÉES.

**880.** On considère le triangle formé par les extrémités d'une corde d'une ellipse et le pôle de cette corde. Montrer que :

1° Si le pôle est sur une des diagonales du rectangle des axes, le cercle circonscrit au triangle passe par le centre de l'ellipse, et enveloppe en outre, une podaire du centre d'hyperbole.

2° Si le pôle est sur le cercle décrit sur la distance focale comme diamètre, le cercle circonscrit au triangle a son centre sur le grand axe.

(E. N. BARISIEN.)

**881.** On décrit une conique Δ ayant pour centre le point M et passant par les points d'incidence des normales abaissées de M sur une parabole donnée. Trouver le lieu de M par la condition que la conique Δ passe par le sommet de la parabole. (E. N. Barisien.)

**882.** Soient A un sommet d'une ligne cycloïdale, et M un point appartenant à la même boucle. Démontrer que le rayon du cercle directeur, qui passe par le centre de courbure correspondant à M, détermine sur la tangente en ce point un segment égal à l'arc AM. (E. Cesàro.)

***883.** $p$ étant un nombre premier; si $p$N est la somme de $p+1$ carrés, dont $p$ soient égaux, N jouit de la même propriété. (E. Catalan.)

**884.** Soient $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ quatre masses attachées aux sommets d'un tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$, et soient $B_1$ le centre de gravité des masses $(\mu_2, \mu_3, \mu_4)$, $B_2$ celui des masses $(\mu_3, \mu_4, \mu_1)$, etc.

Connaissant les points $B_1, B_2, B_3, B_4$ et les masses $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$, déterminer le tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$.

Calculer les arêtes du tétraèdre $B_1B_2B_3B_4$ en fonction de celles du tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$, et des masses $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$.

**885.** On donne une circonférence O et un diamètre fixe AB. D'un point variable P de O comme centre on décrit une circonférence tangente à AB. Soit C le point de contact.

On demande : 1° l'enveloppe de l'axe radical des circonférences O et P; 2° le lieu de l'intersection de cet axe radical avec le rayon de contact PC; 3° le lieu des points d'intersection de la tangente en P au cercle O avec le cercle P. (Droz-Farny.)

***886.** Le nombre

$$1.2..3...(p-1)\left\{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{p-1}\right\}$$

n'est divisible par $p^2$ que si $p$ est un nombre premier supérieur à 3.

(G. Osborn.)

---

**Rectifications.** P. 137, ligne 5, au lieu de *Bachwitz*, lire *Baschwitz*; ligne 6, au lieu de $(ab'+a'b)^2$, lire $(ab'-a'b)^2$. P. 168. L'identité de la ligne 18, est signalée par M. Catalan, dans ses *Théorèmes et Problèmes de géométrie*. P. 182, ligne 6, en remontant, porter plus bas $s=$; ligne 8, en remontant, au lieu de *charge* lire *change*. P. 183, ligne 7, au lieu de *épicicloïde*, *donc* lire *épicycloïde*, *dont*. P. 185, ligne 23, au lieu de *nombre*, lire *membre*.

## DÉMONSTRATION D'UN THÉORÈME DE M. APPELL;

par M. E. Cesàro, professeur à l'Université de Naples.

Le théorème dont il s'agit a été énoncé comme *question proposée*, sous le n° 1626, dans les *Nouvelles Annales*. Les rédacteurs de cette revue en ont publié(*) une démonstration très-simple, due à M. Soudée; mais nous ne croyons pas moins intéressantes (**) les deux démonstrations qui suivent.

Considérons deux séries divergentes, à termes positifs,

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots, \quad b_0 + b_1 + b_2 + b_3 + \cdots,$$

et supposons que les séries

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots, \quad b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots,$$

soient convergentes pour $|x| < 1$. Soient $f(x)$ et $g(x)$ leurs sommes. Si

$$\lim_{n=\infty} \frac{a_n}{b_n} = k,$$

on peut, après avoir fixé le nombre positif $\varepsilon$, arbitrairement petit, trouver un nombre $\nu$, tel que, pour $n > \nu$, on ait toujours

$$\left| \frac{a_n}{b_n} - k \right| < \varepsilon,$$

et, par suite,

$$\left| \frac{a_{n+1} + a_{n+2}x + a_{n+3}x^2 + \cdots}{b_{n+1} + b_{n+2}x + b_{n+3}x^2 + \cdots} - k \right| < \varepsilon,$$

$x$ étant positif. D'autre part, le rapport

$$\frac{1 - \dfrac{1}{g(x)}[b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n]}{1 - \dfrac{1}{f(x)}[a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n]} = \frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{b_{n+1} + b_{n+2}x + b_{n+3}x^2 + \cdots}{a_{n+1} + a_{n+2}x + a_{n+3}x^2 + \cdots}$$

a pour limite 1 lorsque, $n$ ayant été fixé, on fait tendre $x$ vers l'unité.

---

(*) Janvier-Février 1893.

(**) Quoique elles n'aient pu trouver place dans les *Nouvelles Annales*.

Donc, si petit que soit $\varepsilon' > 0$, on pourra trouver un nombre $\xi < 1$, tel que, pour $x > \xi$, on ait toujours

$$\frac{f(x)}{g(x)} = (k + \theta\,\varepsilon)(1 + \theta'\,\varepsilon'),$$

$\theta$ et $\theta'$ étant compris entre $-1$ et $1$. Il en résulte que, si l'on se donne arbitrairement le nombre positif $n$, il existe une valeur de $x$, à partir de laquelle on a

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - k\right| < n.$$

Il suffit de prendre, par exemple, $\varepsilon = k\varepsilon' = \frac{1}{3}n$, pourvu que $n < 3k$.

Donc

$$\lim_{x=1}\frac{f(x)}{g(x)} = k.$$

De cette proposition connue, on déduit aisément le théorème énoncé par M. Appell.

Supposons, en effet, que l'on ait

$$\lim_{n=\infty} n^p a_n = k.$$

A cause de la divergence de la série, dont le terme général est $a_n$, cela ne peut arriver que pour $p \leqq 1$.

Si l'on pose

$$g(x) = \frac{x}{1^p} + \frac{x^2}{2^p} + \frac{x^3}{3^p} + \cdots,$$

on a

$$\lim_{x=1}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{n=\infty} n^p a_n = k.$$

Soit, pour un instant, $f(x) = (1-x)^{p-1}$, de sorte que

$$a_n = \frac{(1-p)(2-p)\ldots(n-p)}{1.2.3.\ldots n}.$$

On obtient

$$\lim_{x=1}\frac{g(x)}{(1-x)^{p-1}} = \lim_{n=\infty}\frac{n!\,n^{-p}}{(1-p)(2-p)\ldots(n-p)} = \Gamma(1-p).$$

Donc

$$\lim_{x=1}(1-x)^{1-p}f(x) = \lim_{n=1}\frac{f(x)}{g(x)}\lim_{x=1}\frac{g(x)}{(1-x)^{p-1}} = k\Gamma(1-p).$$

C'est le théorème de M. Appell.

On parvient d'ailleurs d'une manière directe à ce dernier résultat en considérant la fonction

$$(1-x)^{1-p}f(x) = u_0 + u_1x + u_2x^2 + u_3x^3 + \cdots$$

D'après les propriétés des coefficients binomiaux, la somme des $n+1$ premiers coefficients dans le développement de $(1-x)^{1-p}$ est

$$\alpha_n = \frac{p(p+1)\ldots(p+n-k)}{1.2\ 3\ldots n},$$

et l'on a

$$\lim_{n=\infty} n^{1-p}\alpha_n = \lim_{n=\infty}\frac{p(1+p)(2+p)\ldots(n-1+p)}{n!\,n^{p-1}} = \frac{1}{\Gamma(p)};$$

puis, en vertu d'un théorème connu (*),

$$\lim_{n=\infty}(a_0\alpha_n + a_1\alpha_{n-1} + a_2\alpha_{n-2} + \cdots + a_n\alpha_0)$$
$$= \Gamma(p)\Gamma(1-p)\lim_{n=\infty} n^p a_n \cdot \lim_{n=\infty} n^{1-p}\alpha_n = k\Gamma(1-p).$$

Donc, si l'on observe que

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n = a_0\alpha_n + a_1\alpha_{n-1} + \cdots + a_n\alpha_0,$$

on peut écrire

$$\lim_{x=1}(1-x)^{1-p}f(x) = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots = k\Gamma(1-p).$$

---

## QUESTIONS DE MÉCANIQUE;

par M. Meurice, docteur en sciences physiques et mathématiques.

(*Suite*; voir *Mathesis*, p. 232).

**5.** Les théorèmes des n^os 2 et 3 peuvent être généralisés ainsi :

*Soient* $M_1$ *et* $M'_1$, $M_2$ *et* $M'_2$, ..., $M_n$ *et* $M'_n$ *des couples de points isotomiques pris respectivement sur les côtés* $A_1A_2$, $A_2A_3$, ..., $A_nA_1$ *d'un polygone plan ou gauche* $A_1A_2 \ldots A_nA_1$, *et soient* $X_1$, $X_2$, ... $X_n$ *les milieux des droites* $M'_1M_2$, $M'_2M_3$, ..., $M'_nM_1$. *On peut construire un polygone de n*

---

(*) *Bulletin de Darboux*, 1890, p. 117.

*côtés dont les côtés sont égaux et parallèles aux droites* $A_2X_1$, $A_3X_2$, ..., $A_1X_n$.

En particulier, si les couples $M_1M'_1$, $M_2M'_2$, ... coïncident avec les couples $A_2A_1$, $A_3A_2$, ..., on arrive au théorème suivant :

*Les droites qui joignent chaque sommet d'un polygone plan ou gauche au milieu de la diagonale passant par les secondes extrémités des deux côtés issus du sommet considéré sont, en grandeur et en direction, les côtés d'un nouveau polygone.*

6. Si l'on applique le théorème des moments, on arrive à cette proposition :

*On joint un point* O *de l'espace aux sommets* $A_1$, $A_2$, ..., $A_n$ *du polygone et aux points* $X_1$, $X_2$, ..., $X_n$ *et on projette tous ces points sur un même plan; soient* $o$, $a_1$, $a_2$, ..., $a_n$, $x_1$, $x_2$, ..., $x_n$ *les projections : la somme algébrique des aires des triangles* $ox_1a_2$, $ox_2a_3$, ..., $ox_na_1$ *est nulle.*

Si le polygone $A_1A_2$, ..., $A_n$ est plan et que le point O se trouve dans son plan, la somme des aires des triangles $OX_1A_2$, $OX_2A_3$, ..., $OX_nA_1$ est nulle.

---

## SUR LES LIGNES DE COURBURE DE L'ELLIPSOÏDE.

L'équation différentielle des projections horizontales de ces lignes est

$$mxyp^2 + (x^2 - my^2 - n)\,p - xy = 0, \qquad (1)$$

où

$$p = \frac{dy}{dz}, \quad m = \frac{a^2(b^2 - c^2)}{b^2(a^2 - c^2)}, \quad n = \frac{a^2(a^2 - b^2)}{a^2 - c^2}.$$

Comme les auteurs que j'ai pu consulter négligent ou interprètent mal la solution singulière de l'équation (1), la présente note présente un certain intérêt.

1. Si l'on multiplie l'équation (1) par $4xy$ et qu'on pose $x^2 = X$, $y^2 = Y$, $\frac{dY}{dX} = P$, on trouve

$$mXP^2 + (X - mY - n)\,P - Y = 0,$$

ou

$$Y = PX - \frac{nP}{mP + 1},$$

c'est-à-dire une équation de Clairaut. L'intégrale générale est

$$Y = CX - \frac{nC}{mC+1}, \quad \text{ou} \quad y^2 = Cx^2 - \frac{nC}{mC+1}; \qquad (2)$$

l'intégrale singulière, enveloppe des courbes (2), a pour équation

$$x \pm y\sqrt{-m} = \pm\sqrt{n}. \qquad (3)$$

2. Pour intégrer l'équation (1) par la méthode de Monge, on la dérive par rapport à $x$ après l'avoir divisée par $p$; le résultat, après quelques transformations, peut être écrit ainsi

$$(mp^2+1)\left(\frac{dx}{x} - \frac{dy}{y} - \frac{dp}{p}\right) = 0;$$

On en déduit la double solution

$$mp^2 + 1 = 0, \quad \frac{dx}{x} - \frac{dy}{y} - \frac{dp}{p} = 0;$$

ou

$$p = \pm\sqrt{-\frac{1}{m}}, \quad Cx = py.$$

Si l'on élimine $p$ entre chacune de ces équations et l'égalité (1), on retrouve la solution singulière (3) et la solution générale (3) de l'équation différentielle (1).

3. Pour chaque système de valeurs de $x$ et $y$, l'équation (1) donne deux valeurs de $p$ dont le produit a la valeur constante $-\frac{1}{m}$.

Par conséquent, *les projections horizontales des deux systèmes de lignes de courbure forment deux systèmes de courbes tels que les coefficients angulaires des tangentes menées en tout point du plan xy aux deux lignes qui passent par ce point ont un produit constant.*

Par une transformation affine ce produit peut devenir égal à $-1$, c'est-à-dire les deux systèmes de courbes représentées par (1) deviennent orthogonaux. En effet, si l'on remplace $y$ par $\frac{y}{\sqrt{m}}$, ce qui change $p$ en $\frac{p}{\sqrt{m}}$, l'équation (1) se transforme en

$$xyp^2 + (x^2 - y^2 - \lambda^2)p - xy = 0, \qquad (4)$$

$\lambda^2$ étant écrit pour $n$. On obtient ainsi l'équation différentielle des coniques homofocales.

Nous reproduisons ici, avec quelques modifications, l'élégante méthode d'intégration due à M. Pomey (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1888, p. 194); il serait facile de l'appliquer à l'équation (1).

L'équation (4) peut prendre la forme

$$xydy^2 + (x^2 - y^2)\,dxdy - xydx^2 = \lambda^2 dxdy,$$

ou

$$(xdx + ydy)(xdy - ydx) = \lambda^2 dxdy,$$

ou encore

$$\frac{xdx + ydy}{\lambda dx} = \frac{\lambda dy}{xdy - ydx}. \tag{5}$$

Une première transformation de la proportion (5) donne

$$\frac{(x+\lambda)\,dx + ydy}{(x-\lambda)\,dx + xdy} = \frac{(x+\lambda)\,dy - ydx}{-(x-\lambda)\,dx + ydx};$$

de cette nouvelle proportion, on déduit en faisant la somme des carrés des antécédents et celle des carrés des conséquents

$$\frac{(x+\lambda)\,dx + ydy}{(x-\lambda)\,dx + ydy} = \pm\frac{\sqrt{[(x+\lambda)^2 + y^2]\,(dx^2 + dy^2)}}{\sqrt{[(x-\lambda)^2 + y^2]\,(dx^2 + dy^2)}}. \tag{6}$$

De là, la double solution

$$dx^2 + dy^2 = 0, \tag{7}$$

$$\frac{(x+\lambda)\,dx + ydy}{\sqrt{(x+\lambda)^2 + y^2}} \mp \frac{(x-\lambda)\,dx + ydy}{\sqrt{(x-\lambda)^2 + y^2}} = 0. \tag{8}$$

L'équation (8) s'intègre immédiatement; on trouve

$$\sqrt{(x+\lambda)^2 + y^2} \pm \sqrt{(x-\lambda)^2 + y^2} = 2x. \tag{10}$$

L'équation (7) donne $p = \pm\sqrt{-1}$ et, par substitution dans l'égalité (4),

$$x \pm y\sqrt{-1} = \pm\lambda. \tag{11}$$

L'intégrale générale (10) représente une série de coniques homofocales; la solution singulière (11) représente les droites isotropes menées par les foyers. On sait que les coniques homofocales admettent ces droites pour tangentes communes.

La transformation affine change les coniques homofocales en d'autres ayant également quatre tangentes communes. (J. Neuberg.)

## NOTES MATHÉMATIQUES.

**24.** *Application de la formule du prismatoïde.* Soient $a$ et $b$ deux arêtes opposées d'un tétraèdre, $\alpha$ leur angle et $h$ leur plus courte distance. On peut considérer le tétraèdre comme étant un prismatoïde dont les bases sont formées par les arêtes $a$ et $b$; la section médiane est un parallélogramme de côtés $\frac{1}{2}a$ et $\frac{1}{2}b$ et d'angle $\alpha$. On a donc pour le volume du tétraèdre

$$V = \frac{1}{6}abh \sin \alpha.$$

On en déduit immédiatement une démonstration de ce beau théorème de Steiner :

*Soient deux droites* P *et* Q ; *un segment de longueur donnée a se meut sur* P *et un segment de longueur b se meut sur* Q. *Le tétraèdre ayant les extrémités des deux segments comme sommets conserve le même volume, quelle que soit la position des segments mobiles.* (Droz Farny.)

*Autrement.* Le volume du tétraèdre dont il est parlé plus haut est le sixième du volume du parallélépipède qui a pour ses trois arêtes $a$, $b$ et la droite qui joint une extrémité de $a$ à une extrémité de $b$. Or ce parallélépipède a pour mesure $abh \sin \alpha$. Donc, etc. (Communiqué par M. J. M.).

**25.** *Sur la trisection de l'angle.* 1° Considérons un triangle ABC rectangle en B, et sur le prolongement du côté AB, portons une longueur égale au double de AB. Par un point quelconque M du côté BC, menons la droite MA et la tangente MT au cercle construit sur BD comme diamètre. L'angle AMB sera le tiers de l'angle AMT. D'après cette remarque, on peut facilement réaliser un instrument composé d'une équerre évidée (dont AB soit un côté extérieur, BC un côté intérieur) et d'un demi-cercle solide, qui permette de diviser assez aisément un angle TMA en trois parties égales.

2° Faisons passer une circonférence de centre C par les sommets B, D des angles obtus B, D, d'un losange ABCD. Les côtés AB, AD du losange rencontrent la circonférence une seconde fois en E et F. L'angle ECF est le triple de l'angle A. Une parallèle à EF menée par C coupe AE en G, AF en H et l'on a AB = BG, AD = DH.

De là résulte un moyen de construire, par tâtonnement, l'angle BAD, tiers de l'angle au sommet ECF d'un triangle isocèle, au moyen d'une

règle sur laquelle sont marquées deux longueurs AB, BG égales entre elles et à CE. On tâche de placer cette règle de manière que le point A se trouve sur la hauteur du triangle ECF, le point G, sur la parallèle à EF, menée par le sommet C, puis on tire les lignes AE, AF. On peut varier cette construction de diverses manières (Extrait d'un article de M. A. Pegrassi, professeur à Trente).

**26.** *Une nouvelle quadrature du cercle.* M. Alphonse-Louis Poirier, commis aux Forges et Chantiers du Havre, vient de publier une brochure intitulée : *La solution vrai cherchée sans succès depuis* 2000 *ans ! donnée à la quadrature du cercle, c'est-à-dire le moyen de trouver au cercle son carré équivalent.* Cette solution peut se résumer ainsi : Le côté du carré est *sensiblement* égal à la corde qui sous-tend un arc de 124°48′20″,8 ou de $124° \frac{4}{5}$ ou égal aux $\frac{24}{75}$ de toute la circonférence ; un tel arc se détermine au moyen du simple rapporteur d'angles qui accompagne les boites de mathématiques, ou mieux au moyen du *rapporteur de précision*, avec alidade à vernier, qui donne les degrés et les minutes et même les 30 secondes par le vernier.

L'auteur démontre sa solution en résolvant, au moyen des tables de Callet, l'équation $2 \sin x = \sqrt{\pi}$, où $2x$ est l'arc qui sous-tend une corde égale au côté du carré équivalent au cercle.

On voit que M. Poirier est un *quadrateur raisonnable* ; le titre de sa brochure pourrait faire croire le contraire. (J. N.)

**27.** *Encore un quadrateur.* A-t-on jamais mentionné, dans l'histoire de la quadrature du cercle, l'ouvrage suivant : *Les quatre tables de la constitution numérale, formant les bases de l'enseignement universel de la numération et du calcul, sans lacunes et avec précision, par* J. B. J. Dessoye, *auteur de la découverte de la comptabilité universelle, de l'unité monétaire indiscutable, dès lors de la précision numérique et des preuves directes des quatre règles fondamentales de l'arithmétique ;* Paris, librairie centrale des Sciences, rue de Seine, 13, 1870 (12 pages in-4°)? A la page 10, l'auteur donne la valeur **3,14164** au rapport de la circonférence au diamètre.

Dans l'ouvrage du même auteur, *l'Absolu dans un principe et une révolution dans un seul chiffre, ou Magie numérale et mystères de la contradiction, découverte de la Comptabilité universelle, par* J. B. J. Dessoye, *membre de l'Académie nationale, auteur des* Études sur les propriétés et

l'emploi de l'acier, Paris, E. Lacroix, quai Malaquais, 15, 1863 (88 pages in-8°), on lit :

Page 5 : « Qu'est-ce que la COMPTABILITÉ UNIVERSELLE? C'est une manière spéciale de calculer, non-seulement tout ce que l'*on connaît à cette heure*, mais encore tout ce que l'*on ne connaît pas*, tout ce qui est *douteux* dans l'esprit des hommes, tout ce *qui est naturel* et tout ce *qui paraît surnaturel*. »

Page 48 : « Et de même que la vie est pour chaque être *le grand cercle* qui renferme tous ses calculs, son existence est le parallélogramme dans lequel il y a pour lui une multitude de carrés au milieu desquels il est constamment en LUTTE et à l'ÉTAT DE RENCONTRE et de PUISSANCE CROISÉE, à cause des rapports qu'il a nécessairement avec les choses et avec ses semblables, proportionnellement à ses besoins, à son activité et à ses entreprises. Ainsi, voilà qui doit être bien compris. Il faut en tout rapporter les progressions et les proportions des calculs au CERCLE, au DIAMÈTRE, à la CIRCONFÉRENCE en fonctions du temps, et aux RAYONS de la QUADRATURE, suivant laquelle un carré est la mesure de la circonférence d'une ellipse déterminée POUR TOUS et POUR CHACUN, en présence d'un AXE CENTRAL qui est DIEU, représenté par *l'unité de temps qui est la seconde* : 1″ ».

Page 62 :... « de telle façon que 94 — 18 = 76, soit exactement, en millimètres, la pression sous laquelle l'air pèse 1 gramme 299 milligr. par décimètre cube (Bouillet, *Dictionnaire des Sciences, des Lettres et des Arts*, article *air*). Le poids de l'air est dit par litre : 1 gramme 2935. Donc, si l'on écrit : 1,2935 et 1 pour le litre, on a 2936, soit, par réduction, 299 (*l'auteur additionne* 3 *et* 6), et, dès lors, rigoureusement, 1 gr. 299 mill^e ». Comme le dit l'auteur, c'est une manière spéciale de calculer. (E. GELIN.)

**38**. *Sur l'utilité de la géométrie non euclidienne.* M. H. Poincaré, dans sa *Notice sur ses Travaux scientifiques* (Paris, Gauthier-Villars, 1886) raconte qu'il a triomphé *aisément* d'une difficulté rencontrée par lui dans la théorie des fonctions fuchsiennes, grâce à la géométrie lobatchefskienne. Sans l'aide de celle-ci, dit-il, cette difficulté *l'aurait peut-être arrêté longtemps*. Cela prouve que la géométrie non-euclidienne ne présente pas seulement un intérêt spéculatif, mais qu'elle peut rendre des services même dans les parties les plus élevées de l'analyse. (P. M.)

## SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES(*).

### Question 802.

(Voir *Mathesis*, (2), III, p. 31.)

*Les normales en deux points,* P,P' *d'une conique coupent en* C,C' *l'axe focal. Soit* F *un foyer; les rayons vecteurs* PF, P'F *sont rencontrés, respectivement en* D, D' *par les parallèles à la corde* PP' *menées par* C', C. *Démontrer géométriquement que* FD = FD' *et que la droite* DD' *passe par le point d'intersection des normales* PC, P'C'. *Déduire de ce qui précède une construction du centre de courbure relatif au point* P. (Droz).

Solution par M. Sollertinsky. 1° Soit J le point à l'infini de la droite PP'; N l'intersection des normales PC, P'C'; F', J' les intersections des droites NF, NJ avec PP', CC'. On a

$$N(PP'F'J) = (CC'FJ') = (C'CJ'F)$$

d'où

$$F(PP'F'J) = J(C'CJ'F)$$

ce qui montre que les points D, D', N sont sur une même droite.

2° Soit Q l'intersection de PP' avec l'axe focal. On aura, à cause des parallèles,

$$\frac{FD}{FP} = \frac{FC'}{FQ}, \quad \frac{FD'}{FP'} = \frac{FC}{FQ};$$

or on sait que l'excentricité

$$e = \frac{FC}{FP} = \frac{FC'}{FP'}.$$

Donc

$$FD = \frac{FP.FC'}{FQ} = \frac{FP'.FC}{FQ} = FD'.$$

3° A la limite, lorsque P' vient coïncider avec P, C'D devient la perpendiculaire en C sur CP, DD' devient la perpendiculaire en D sur DP, et on retrouve ainsi une construction bien connue(**) du centre de courbure.

Note. Pour démontrer que les droites PC, PC', DD' concourent en un

---

(*) Nous avons reçu trop tard pour en faire mention dans le dernier numéro, une bonne solution de la question 842, par M. Vladimirescu.

(**) Voir par exemple, *Ch. Taylor*, An introduction etc. p. 222, ex. 601.

même point, M. Servais s'appuye sur le théorème suivant, cas particulier du théorème de Brianchon ;

*Etant données trois droites concourantes a, b, c et trois autres droites concourantes a', b', c', les droites qui joignent les couples de points (ab', a'b), (bc', b'c), (ca', c'a) concourent en un même point.*

Pour *a*, *b*, *c* il prend les parallèles CD', C'D, PP', et pour *a'*, *b'*, *c'* les droites FP, FP', CC'. Les autres parties de la question sont démontrées comme ci-dessus.

M. Déprez a également résolu la question 802, en démontrant le 1° par la théorie des transversales, les n^os 2 et 3 comme M. Sollertinsky.

---

## ×Question 808.

(Voir *Mathesis*, (2), III, p. 32.)

M *étant un point quelconque du plan d'un triangle* ABC, *soient* $H_a$, $H_b$, $H_c$ *les orthocentres des triangles* MBC, MCA, MAB. *Si les droites* $AH_a$, $BH_b$, $CH_c$ *sont concourantes*, M *est sur la circonférence circonscrite au triangle* ABC. *Quel est le lieu du point de concours des droites* $AH_a$, $BH_b$, $CH_c$.

(Lemoine).

*Solution par* M. Sollertinsky. L'orthocentre H de ABC et les points $H_a$, $H_b$, $H_c$ appartiennent à l'hyperbole équilatère MABC.

Mais, à cause des parallèles, on a

$$H(MABC) = M(HH_aH_bH_c). \qquad (1)$$

Donc, si les droites $AH_a$, $BH_b$, $CH_c$ concourent au même point O, la droite HM passe aussi par ce point.

La droite à l'infini, sur laquelle concourent les rayons homologues des faisceaux (1), étant la polaire de O par rapport à l'hyperbole équilatère MABC, ce point est le centre de la courbe, et HO = OM.

Ainsi, le lieu de O est le cercle des neuf points de ABC et, par suite, le lieu de M est le cercle circonscrit à ABC.

Note. M. Droz-Farny a donné une solution peu différente de la précédente. Après avoir observé que les points A, B, C, M, H, $H_a$, $H_b$, $H_c$, sont sur une même hyperbole équilatère, il conclut que les points A et $H_a$, B et $H_b$, C et $H_c$, situés par hypothèse sur trois droites concourantes,

déterminent une involution ; les droites MA et $MH_a$, MB et $MH_b$, MC et $MH_c$ se correspondent donc dans un faisceau involutif, et, par suite, les points d'intersection de $MH_a$, $MH_c$, $MH_b$ avec les côtés correspondants du triangle (ou les projections de M sur les côtés) sont en ligne droite, et M est sur la circonférence ABC. Soient A', B', C' les milieux de BC, CA, AB, et $\omega$ le centre du cercle ABC ; comme $AH = 2\omega A' = MH_a$, la droite $AH_a$ passe par le milieu O de HM, et il en est de même de $BH_b$, $CH_c$. Le point O parcourt évidemment la circonférence des neuf points du triangle ABC, etc.

*Solution analytique par* M. J. Déprez (professeur à l'athénée de Tournay). Soient $x'$, $y'$, $z'$ les coordonnées normales de M. Les droites $CH_c$, $BH_b$, respectivement perpendiculaires à MB et MC, ont pour équation

$$\frac{x}{y} = \frac{x'\cos B + z'}{x'\cos A - z'\cos C}, \quad \frac{z}{x} = \frac{x'\cos A - y'\cos B}{x'\cos C + y'};$$

d'où, par multiplication, l'équation de $AH_a$ :

$$z(x'\cos C + y')(x'\cos A - z'\cos C) = y(x'\cos B + z')(x'\cos A - y'\cos B).$$

De même les équations de $BH_b$, $CH_c$ sont

$$x(y'\cos A + z')(y'\cos B - x'\cos A) = z(y'\cos C + x')(y'\cos B - z'\cos C),$$
$$y(z'\cos B + x')(z'\cos C - y'\cos B) = x(z'\cos A + y')(z'\cos C - x'\cos A).$$

Pour que les droites $AH_a$, $BH_b$, $CH_c$ soient concourantes, on doit avoir

$$(x'\cos C + y')(y'\cos A + z')(z'\cos B + x') + (x'\cos B + z')(y'\cos C + x')(z'\cos C + y') = 0,$$

ou

$$2x'y'z'(1 + \cos A\cos B\cos C) + \Sigma x'(y'^2 + z'^2)\sin B\sin C = 0.$$

Si l'on remplace $1 + \cos A\cos B\cos C$ par $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C$, l'équation précédente peut prendre la forme

$$(x'\sin A + y'\sin B + z'\sin C)(y'z'\sin A + z'x'\sin B + x'y'\sin C) = 0.$$

On en conclut que le lieu du point M a pour équation

$$y'z'\sin A + z'x'\sin B + x'y'\sin C = 0; \qquad (1)$$

c'est donc la circonférence circonscrite au triangle ABC.

L'équation de $AH_a$ peut prendre la forme

$$z\,[x'^2 \cos A \cos C + x'y' \cos A - x'z' \cos^2 C - y'z' \cos C]$$
$$= y\,[x'^2 \cos A \cos B - x'y' \cos^2 B + x'z' \cos A - y'z' \cos B]$$

Remplaçons le produit $y'z'$ par sa valeur $-\dfrac{x'(y' \sin C + z' \sin B)}{\sin A}$ tirée de (1); il vient

$$z\,[x' \cos A \cos C \sin A + y' \sin B \cos (A - C) + z' \cos C \sin C \cos A]$$
$$= y\,[x' \cos A \sin A \cos B + y' \cos B \sin B \cos A + z' \sin C \cos (A - B)],$$

ou

$$z\,(\cos A \cos C \Sigma x' \sin A + y' \sin B \sin A \sin C)$$
$$= y\,(\cos A \cos B \Sigma x' \sin A + z' \sin A \sin B).$$

On en conclut, en observant que $\Sigma x' \sin A = 2R \sin A \sin B \sin C$,

$$\frac{y}{y' + 2R \cos A \cos C} = \frac{z}{z' + 2R \cos B \cos A} = \frac{x}{x' + 2R \cos B \cos C}, \quad (2)$$

$x$, $y$, $z$ désignant maintenant les coordonnées du point de concours M' des droites $AH_a$, $BH_b$, $CH_c$. Les trois rapports (2) ont pour valeur commune

$$\frac{\Sigma x \sin A}{\Sigma x' \sin A + 2R \Sigma \sin A \cos B \cos C} = \frac{2R \sin A \sin B \sin C}{4R \sin A \sin B \sin C} = \frac{1}{2};$$

par suite,

$$x' + 2R \cos B \cos C = 2x,$$
$$y' + 2R \cos C \cos A = 2y, \quad z' + 2R \cos A \cos B = 2z.$$

Tirons de là $x'$, $y'$, $z'$ pour substituer les valeurs obtenues dans l'équation (1); nous aurons

$$\Sigma \frac{\sin A}{x - R \cos B \cos C} = 0.$$

Si l'on égale à zéro les trois dénominateurs, on a les équations des droites qui joignent les milieux des segments AH, BH, CH, deux à deux; on en déduit que le point M' se meut sur la circonférence des neuf points du triangle ABC, propriété qu'on peut démontrer géométriquement.

Remarques I. M' est un centre de symétrie des deux quadrilatères ABCM, $H_aH_bH_cH$. On en déduit que la droite de Simson de H par rapport au triangle $H_aH_bH_c$ se confond avec celle de M par rapport à BC.

II. L'axe radical des deux cercles ABC, $H_aH_bH_c$, lorsque M par[court] la circonférence ABC, est perpendiculaire sur HM en M'; puisque [M] décrit la circonférence des neuf points de ABC, l'axe radical [enveloppe] une ellipse ayant pour foyers H et le centre du cercle AB[C] inscrite au triangle ABC.

III. Si l'on substitue au triangle ABC de la question 808 un triang[le] sphérique, le point M doit être tel que ses projections sur les côtés [du] triangle soient sur un même arc du grand cercle.

IV. On peut généraliser la proposition 808 en faisant une projec[tion] cylindrique de la figure. Les points $H_a$, $H_b$, $H_c$, seront remplacés par [les] anticomplémentaires d'un point fixe O par rapport aux triangles MBC, MAB, etc.

---

## Question 821.

(Voir *Mathesis*, (2), III, p. 79.)

*Discuter la fonction*

$$y = \frac{\operatorname{tg}^3 x}{\operatorname{tg} 3x}, \tag{1}$$

*$x$ variant d'une manière continue de $-\infty$ à $+\infty$.*

*Solution par* M. P. Decamps. En développant $\operatorname{tg} 3x$ on a

$$y = \frac{(1 - 3\operatorname{tg}^2 x)\operatorname{tg}^2 x}{3 - \operatorname{tg}^2 x}. \tag{2}$$

D'après cette valeur (2) de $y$, on voit que :

pour $x = 0$, $y = 0$;

pour $\operatorname{tg} x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ou $x = 30°$, $y = 0$;

pour $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ ou $x = 60°$, $y = \infty$;

pour $\operatorname{tg} x = \infty$ ou $x = 90°$, $y = \infty$.

Lorsque $x$ varie de 0° à 30°, $y$ est positif, et comme la valeur initiale et la valeur finale de $y$ sont nulles, $y$ passe par un maximum dans l'intervalle considéré.

Lorsque $x$ varie de 30° à 60°, $y$ est négatif; les valeurs extrêmes de $y$ étant 0 et $-\infty$, il n'y a ni maximum ni minimum de $y$ entre $x = 30°$ et $x = 60°$.

$x$ variant de 60° à 90°, $y$ est positif; les valeurs extrêmes de $y$ étant infinies, $y$ passe par un minimum.

De ce qui précède, on conclut facilement les variations de $y$ dans les intervalles (90°, 180°), (180°, 170°), etc.

L'équation (2) étant résolue par rapport à tg $x$, on trouve

$$\operatorname{tg}^2 x = \frac{y + 1 \pm \sqrt{y^2 - 34y + 1}}{6};$$

par suite, un maximum de $y$ est $17 - 12\sqrt{2}$; un minimum, $17 + 12\sqrt{2}$. Les valeurs correspondantes de $\operatorname{tg}^2 x$ sont $3 \mp 2\sqrt{2} = (\sqrt{2} \mp 1)^2$. Si l'on se rapporte à la discussion faite ci-dessus, on voit qu'entre $x = 0$ et $x = 30°$, pour $\operatorname{tg} x = \sqrt{2} - 1$, $y$ passe par un maximum $17 - 12\sqrt{2}$; entre $x = 60°$ et $x = 90°$, pour $\operatorname{tg} x = \sqrt{2} + 1$, $y$ passe par un minimum $17 + 12\sqrt{2}$.

De même, entre $x = 90°$ et $x = 120°$, pour $\operatorname{tg} x = -(\sqrt{2} + 1)$, $y$ passe par un minimum $17 + 12\sqrt{2}$, etc.

Prenons sur un axe $Ox$ les longueurs $OA = \frac{1}{6}\pi$, $OB = \frac{1}{3}\pi$, $OC = \frac{1}{2}\pi$ et menons les ordonnées correspondantes AA', BB', CC' dans le sens des $y$ positifs, les ordonnées AA'', BB'', CC'' dans le sens des $y$ négatifs. La courbe (1) présente une première partie ODA, avec une ordonnée maximum pour $x = \text{arc tg}(\sqrt{2} - 1)$; elle se continue ensuite du côté des $y$ négatifs en approchant asymptotiquement de BB''. Une seconde partie est comprise entre BB', CC'; elle a pour asymptotes BB', CC' et offre une ordonnée minimum pour $x = \text{arc tg}(\sqrt{2} + 1)$. Si l'on prend la figure symétrique de la précédente par rapport à C'C'', on a la courbe dans l'intervalle $\frac{1}{2}\pi$, etc.

Note. M. Morel figure les variations de $y$ au moyen de la courbe

$$\rho = \frac{\operatorname{tg}^3 \omega}{\operatorname{tg} 3\omega}. \qquad (3)$$

Soient $Ox$ l'axe polaire, $Oy$ une perpendiculaire à $Ox$, $Ou$ et $Ov$ les droites qui divisent l'angle $xOy$ en trois parties égales. La courbe (3) présente d'abord une foliole située dans l'angle $xOu$ et touchant en O les droites $Ox$, $Oy$; dans l'angle $uOv$, elle offre une partie infinie touchant $Ou$ en O et asymptotique à $Ov$(*); enfin, dans l'angle $vOy$, elle comprend

(*) Cette partie correspond aux valeurs de $\omega$ comprises entre 210° et 240°, la

une ligne asymptotique de $Ov$, $Oy$. Si l'on dessine la figure symétrique des deux précédentes par rapport à $Oy$, puis les symétriques des deux précédentes par rapport à O, on aura dessiné complètement la courbe (3).

Cette question 821, est ancienne. Voir N. A. M., 1850, IX, p. 41, aux questions d'examens de l'École Polytechnique en 1849, n° 106.

---

## ×Question 855.

(Voir *Mathesis*, (2), III, p. 175.)

***Si un nombre premier p n'est pas la somme de deux carrés, $p^2$ est la somme de trois carrés*** (*). (E. CATALAN.)

1° Supposons $p = a^2 + b^2 + c^2$. On a, identiquement,

$$p^2 = (a^2 + b^2 + c^2)^2 = (a^2 + b^2 - c^2)^2 + (2ac)^2 + (2bc)^2.$$

On ne peut avoir, ni $c = 0$, ni $c^2 = a^2 + b^2$; car, dans le premier cas, $p$ serait la somme de deux carrés; et, dans le second, ce nombre ***impair*** serait égal à $2(a^2 + b^2)$.

2° Soit, maintenant, $p = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$; puis

$$p^2 = (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 + 4(a^2 + b^2)(c^2 + d^2).$$

Le dernier terme est réductible à $(2f)^2 + (2g)^2$, si l'on fait

$$f = ac \pm bd, \quad g = ad \mp bc \ (**).$$

On ne peut supposer $c^2 + d^2 = a^2 + b^2$; car $p$ serait ***pair***.

Si $ac = bd$, on a

$$p = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \pm 2ac \mp 2bd, \text{ ou}$$
$$p = (a \pm c)^2 + (b \mp d)^2;$$

contre l'hypothèse. De même si $ad = bc$.

REMARQUES. I. Le nombre $p$ a la forme $4n - 1$; attendu que : ***tout nombre premier, de la forme $4n + 1$, est la somme de deux carrés*** (Fermat).

II. D'après le théorème de Bachet (ou de Fermat), il est inutile de supposer $p$ égal à une somme de *cinq* carrés, de ***six*** carrés, etc.

---

courbe symétrique de cette partie par rapport à O correspond à $\omega$ variant entre 30° et 60°.

(*) Dans les *Recherches sur quelques produits indéfinis* (1873), j'ai conclu ce théorème, de la considération des *séries elliptiques*. Il restait à le démontrer, d'une manière élémentaire.

(**) Théorème de Fibonacci.

III. Un nombre premier, de la forme $4n-1$, peut être, à la fois, la somme de *trois* carrés et la somme de *quatre* carrés.

*Exemple.* Soit $p=19$. On a $19=9+9+1=16+1+1+1$.

Dans ce même cas, $p^2$, somme de *trois* carrés, peut être la somme de *quatre* carrés.

*Exemple.* Soit encore $p=19$. On a $p^2=361=17^2+6^2+6^2=16^2+10^2+2^2+1^2$ (*).

(Octobre 1893). E. CATALAN.

---

## Question 856.

(Voir *Mathesis*, (2), III, p. 175).

*Soient* M, M′ *deux points infiniment voisins, pris sur une courbe* U; *soit* T *le point d'intersection des tangentes menées en ces points. Si au point* M, *les dérivées* $y''$, $y'''$,..., $y^{(n)}$ *sont nulles, le rapport* MT : M′T *a pour limite* $n$.

*Solution par* M. E. CESARO. Prenons comme axes la tangente et la normale en M. Soient Q le point de rencontre de la tangente en M′ avec l'axe des $y$, et Q′ la projection de M′ sur l'axe des $x$. On a

$$\lim\frac{MT}{M'T}=\lim\frac{MT}{TQ'}\cdot\lim\frac{TQ'}{M'T}=\lim\frac{MT}{TQ'}=\lim\frac{MQ}{M'Q'}=\lim\frac{xy'-y}{y}.$$

Cela étant, si l'on applique la règle de l'Hospital, en supposant que $y^{(n+1)}$ soit la première dérivée non nulle en M, et que $y^{(n+2)}$ reste finie en ce point, on obtient successivement

$$\lim\frac{xy'}{y}=1+\lim\frac{xy''}{y'}=2+\lim\frac{xy'''}{y''}=3+\lim\frac{xy^{IV}}{y'''}=\cdots\cdots$$

Donc

$$\lim\frac{MT}{M'T}=n+\lim\frac{xy^{(n+2)}}{y^{(n+1)}}=n.$$

---

(*) Dans la démonstration précédente, rien n'exprime que $p$ est un nombre *premier*. Donc :

*Si un nombre impair* N, *non carré, n'est pas la somme de deux carrés,* $N^2$ *est la somme de trois carrés;* puis, évidemment : *chacun des nombres* $N^4$, $N^8$, $N^{16}$, ... *est la somme de trois carrés.*

Autre solution par M. ABSOLONNE.

M. de Longchamps a signalé la proposition qui forme l'objet de la question 856, au congrès de Besançon (août 1893); nous l'avions trouvée de notre côté, mais nous la supposions déjà connue. Il n'est peut-être pas inutile de faire observer à nos jeunes lecteurs que la démonstration précédente suppose que $y''$, $y'''$,... $y^{(n)}$ restent nulles quand on soumet $x$ et $y$ à une transformation linéaire, ce qui est exact. (J. N.)

---

## Question 858.

(Voir *Mathesis*, (2, III, p. 175).

*Le lieu des points tels qu'en abaissant les quatre normales à une ellipse, la somme des carrés des six distances mutuelles des pieds des normales soit constante est une conique. Dans quel cas ce lieu se compose-t-il de lignes droites?* (E. N. BARISIEN.)

*Solution par* MM. DROZ-FARNY, ABSOLONNE, COLLETTE *et* MANDART. L'équation de l'ellipse étant $b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$, celle de l'hyperbole d'Apollonius du point P $(\alpha, \beta)$ est

$$c^2xy + b^2\beta x - a^2\alpha y = 0.$$

Éliminant $x$ entre ces deux égalités, on obtiendra l'équation aux ordonnées des pieds des normales :

$$c^4y^4 + 2c^2b^2\beta y^3 + y^2[b^2a^2\alpha^2 + b^4\beta^2 - b^2c^4] + \cdots - b^6\beta^2 = 0.$$

Soient $y_1, y_2, y_3, y_4$ les racines; on aura :

$$\Sigma y_1 = \frac{-2b^2\beta}{c^2}, \quad \Sigma y_1y_2 = \frac{b^2a^2\alpha^2 + b^4\beta^2 - b^2c^4}{c^4}, \tag{1}$$

$$\Sigma y_1^2 = \Sigma^2 y_1 - 2\Sigma y_1y_2 = \frac{2b^2(b^2\beta^2 - a^2\alpha^2 + c^4)}{c^4}. \tag{2}$$

De même,

$$\Sigma x_1x_2 = \frac{a^2b^2\beta^2 + a^4\alpha^2 - a^2c^4}{c^4}, \quad \Sigma x_1^2 = \frac{2a^2(a^2\alpha^2 - b^2\beta^2 + c^4)}{c^4}: \tag{3}$$

Posons

$$\Sigma[(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2] = m^2$$

ou

$$3\Sigma x_1^2 + 3\Sigma y_1^2 - 2\Sigma x_1x_2 - 2\Sigma y_1y_2 = m^2;$$

en tenant compte des égalités (1), (2), (3,) nous aurons

$$4b^2(2a^2 - b^2)\beta^2 + 4a^2(2b^2 - a^2)\alpha^2 = c^4(8a^2 + 8b^2 - m^2).$$

Le lieu proposé est donc une ellipse, une hyperbole ou un système de deux droites perpendiculaires au grand axe de l'ellipse donnée suivant que $b > c, < c$ ou $= c$. L'hyperbole se réduit à deux droites si $m^2 = 8(a^2 + b^2)$.

---

## Question CCCXXXIX.

(Voir N. C. M., n° 339 et LAISANT, IV, n° 889, p. 298.)

*A, B étant deux points d'une ellipse; P le point de concours des normales en ces points; C, D les pieds des deux autres normales qu'on peut mener par le point* P: 1° *Trouver le lieu que décrit le centre de l'hyperbole équilatère passant par les quatre points* A, B, C, D *quand la sécante* AB *se déplace parallèlement à elle-même;* 2° *Prouver que le point* D', *diamétralement opposé à* D, *se trouve avec* A, B, C *sur une même circonférence, et trouver le lieu du centre de cette circonférence, quand la droite* AB *se déplace comme dans le premier cas.* (CONCOURS ACADÉMIQUE de Lille, 1874.)

*Solution par* M. BARISIEN. Soient X, Y les coordonnées de P; l'hyperbole équilatère passant par les pieds A, B, C, D des normales issues de P a pour équation

$$c^2xy + b^2x\mathrm{Y} - a^2y\mathrm{X} = 0. \tag{1}$$

Représentons par

$$y - mx - p = 0, \quad y - m'x - p' = 0, \tag{2}$$

les cordes AB, CD. L'équation

$$\lambda(c^2xy + b^2x\mathrm{Y} - a^2y\mathrm{X}) + (y - mx - p)(y - m'x - p') = 0 \tag{3}$$

est celle de l'ellipse donnée, pourvu qu'on choisisse convenablement $\lambda$. On trouve facilement les égalités de condition

$$a^2mm' = b^2, \tag{4}$$

$$pp' = -b^{1'} \tag{5}$$

$$m + m' = \lambda c^2, \tag{6}$$

$$pm' + mp' = -\lambda b^2\mathrm{Y}, \tag{7}$$

$$p + p' = -\lambda a^2\mathrm{X}. \tag{8}$$

1° Par hypothèse, $m$ est constant; la relation (4) montre qu'il en est de même de $m'$.

Les coordonnées du centre de l'hyperbole (1) étant

$$x = \frac{a^2}{c^2}\mathrm{X}, \quad y = -\frac{b^2}{c^2}\mathrm{Y}, \tag{9}$$

le lieu de ce point est lié très simplement à celui du point P. Or les équations (7) et (8) donnent

$$p = -\lambda \frac{a^2 m X - b^2 Y}{m - m'}, \quad p' = \lambda \frac{a^2 m' X - b^2 Y}{m - m'};$$

substituant ces valeurs dans l'égalité (5) et éliminant $\lambda$ au moyen de (6), on trouve

$$(a^2 m X - b^2 Y)(a^2 m' X - b^2 Y) = b^4 c^4 \frac{(m - m')^2}{(m + m')^2},$$

ou, à cause de (4);

$$(X - m'Y)(X - mY) = \frac{c^4 (m - m')^2}{a^2 (m + m')^2}.$$

Telle est donc l'équation du lieu de P; elle représente une hyperbole concentrique à l'ellipse donnée et dont les asymptotes ont des directions symétriques de celles de AB et CD par rapport à la bissectrice de l'angle des axes de l'ellipse.

2° De l'équation (4), on déduit $mm' = \frac{b^2}{a^2}$; comme les coefficients angulaires de deux cordes supplémentaires vérifient la relation $mm' = -\frac{b^2}{a^2}$, on voit que la corde supplémentaire CD′ de CD et la corde AB sont également inclinées sur l'axe des $x$, mais en sens contraires. Donc, d'après un théorème connu, les quatre points A, B, C, D′ sont sur une même circonférence.

Soit

$$y = -mx + q$$

l'équation de la corde CD′. Si on la combine avec celle de CD pour trouver les coordonnées de C et qu'on substitue les valeurs obtenues dans l'équation de l'ellipse, on trouve

$$a^2(mp' + m'q)^2 + b^2(q - p')^2 = a^2 b^2 (m + m')^2. \qquad (10)$$

L'équation de la circonférence de cercle ABCD′ est de la forme

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 - a^2 b^2 - \mu (y - mx - p)(y + mx - q) = 0,$$

avec la condition

$$b^2 + \mu m^2 = a^2 - \mu, \quad \text{ou} \quad \mu = \frac{c^2}{1 + m^2}.$$

Les coordonnées du centre sont

$$\alpha = -\frac{\mu m(p+q)}{2(b^2+\mu m^2)} = -\frac{mc^2(p+q)}{2(a^2m^2+b^2)}, \qquad (11)$$

$$\beta = \frac{\mu(q-p)}{2(a^2-\mu)} = \frac{c^2(q-p)}{2(a^2m^2+b^2)}. \qquad (12)$$

Pour obtenir le lieu de ce point, il suffit d'éliminer $p$ et $q$ entre les égalités (10), (11) et (12), après avoir remplacé dans la première $p'$ par $\frac{b^2}{p}$, $m'$ par $\frac{b^2}{a^2m}$. On trouve

$$(a^2m^2+b^2)^4(\alpha^2-m^2\beta^2)^2 - m^2c^4(a^2m^2+b^2)^3(\alpha+m\beta)^2 + a^2b^2c^2m^6 = 0.$$

La courbe est donc une quartique.

On obtient le lieu des centres des circonférences CDA, CDB en remplaçant $m$ par $m'$ ou $\frac{b^2}{a^2m}$.

Remarques. I. *Le lieu des points de rencontre des cordes* AB, CD *est une hyperbole*, dont l'équation s'obtient en éliminant $p$ et $p'$ entre les égalités (2) et (5).

II. *Le lieu du point de rencontre des perpendiculaires élevées au milieu des droites* AB, CD *est l'hyperbole représentée par*

$$(x+my)(x+m'y) = -\frac{b^2c^4}{a^4(m+m')^2}.$$

---

## QUESTIONS D'EXAMEN.

**587.** $a$ et $a_1$ étant deux nombres positifs quelconques, trouver la limite des nombres définis par les égalités

$$a_2 = \frac{a+a_1}{2}, \quad a_3 = \frac{a_1+a_2}{2}, \quad a_4 = \frac{a_2+a_3}{2}, \ldots$$

Prenons sur une droite $Ox$ les segments $OA = a$, $OA_1 = a_1$, et soient $A_2$ le milieu de $AA_1$, $A_3$ celui de $A_1A_2$, $A_4$ celui de $A_2A_3$, etc...; nous aurons évidemment $a_2 = OA_2$, $a_3 = OA_3$,.... Cette construction donne, si $a < a_1$ et $a_1 - a = d$,

$$a_n = a + \frac{d}{2} - \frac{d}{4} + \frac{d}{8} - \ldots, \quad \lim a_n = a + \frac{d}{3} = \frac{2a+a_1}{2}.$$

Le point-limite des points $A_1$, $A_2$,... divise la droite $AA_1$ dans le rapport 1 : 2. (D'après Mad. Prime dans le *Periodico di Matematica*.)

**588.** On donne trois circonférences O, O′, O″ qui se touchent deux à deux aux points A, A′, A″. Une sécante quelconque menée par A rencontre les circonférences O′, O″ en B′, B″. Démontrer que les droites B′A″, B″A′ rencontrent la circonférence O aux extrémités C, D d'un même diamètre (KAHN).

En effet, d'après la théorie des centres de similitude des cercles, les rayons O′B′ et OC, O″B″ et OD, O′B′ et O″B″ sont parallèles.

**589.** Etant donné un triangle ABC, mener extérieurement au triangle, dans son plan, une parallèle DD′ au côté BC à une distance $x$ telle que si l'on fait tourner le triangle autour de DD′, l'aire décrite par BC soit moyenne proportionnelle entre les aires décrites par AB et CA.

(*Baccalauréat*, PARIS, 1893.)

Si BC passe entre A et DD′, l'équation du problème est

$$2ax = (2x + h)\sqrt{bc};$$

on doit avoir $a > \sqrt{bc}$. Si A est situé entre BC et DD′, on a l'équation

$$2ax = (2x - h)\sqrt{bc};$$

pour que la racine soit plus grande que $h$, on doit avoir

$$a < \sqrt{bc} \quad \text{et} \quad > \tfrac{1}{2}\sqrt{bc}$$

Lorsque DD′ passe entre A et BC, on trouve

$$2ax = \frac{x^2 + (h - x)^2}{h}\sqrt{bc}.$$

**590.** Construire la courbe définie par l'équation

$$y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4x + 5}.$$

La courbe coupe $Ox$ en deux points A, B ayant pour abscisses 1 et 2; elle n'a pas d'asymptote parallèle à $Oy$, les racines de $x^2 - 4x + 5 = 0$ étant imaginaires; elle a une asymptote parallèle à $Ox$, car pour $x = \pm\infty$ on trouve $\lim y = 1$. Un maximum $y = \dfrac{1 + \sqrt{2}}{2}$ correspond à $x = 3 + \sqrt{2}$, un minimum $y = \dfrac{1 - \sqrt{2}}{2}$ correspond à $x = 3 - \sqrt{2}$; le premier se trouve au delà de B, le second entre A et B. La courbe rencontre l'asymptote $y = 1$ en un point ayant pour abscisse $x = 3$; elle coupe $Oy$ au point défini par $y = \frac{2}{5}$. D'après cela il est facile de la tracer.

**591.** Sur les côtés AB, BC, CA d'un triangle ABC, on marque les points C′, A′, B′. Trouver la condition nécessaire pour que les parallèles

menées par C, A, B aux droites B'C', C'A', A'B' concourent en un même point.

Réponse :

$$\left(\frac{AB.AB'}{AC.AC'}-1\right)\left(\frac{BC.BC'}{BA.BA'}-1\right)\left(\frac{CA.CA'}{CB.CB'}-1\right)=1.$$

**592.** Trois marchands se sont associés pour fournir à un régiment, le premier 510 mètres de drap rouge, le second 2000 mètres de drap bleu et le troisième 3900 mètres de toile. La valeur du drap bleu est les $\frac{4}{5}$ de celle du drap rouge, et le prix de la toile est $\frac{1}{6}$ de celui du drap bleu. Que revient-il à chacun des trois négociants, sur un bénéfice total de 3750 fr. ? (*Arts et Métiers de Châlons*, 1892.)

**593.** Trouver, sans faire usage des tables, les angles d'un triangle dont les côtés sont proportionnels à $2\sqrt{3}$, $2\sqrt{2}$, $\sqrt{6}+\sqrt{2}$.

Dans la formule :

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},$$

faisons

$$a=2\sqrt{3},\quad b=\sqrt{6}+\sqrt{2},\quad c=2\sqrt{2};$$

nous aurons

$$\cos A=\tfrac{1}{2},\quad \text{d'où}\quad A=60^\circ.$$

On trouve de même

$$\cos C=\frac{1}{\sqrt{2}},\quad \text{d'où}\quad C=45^\circ.$$

---

## QUESTIONS PROPOSÉES.

**587.** On considère une ellipse (E) et un cercle (C) concentrique à l'ellipse. D'un point quelconque de (C) on mène les tangentes à (E). Le cercle passant par ce point et les points de contact M, M' des tangentes rencontre (E) en deux autres points N, N'. Montrer que 1° la droite NN' enveloppe une ellipse. 2° Cette droite et la polaire du point se rencontrent sur une kreuzcurve. (E. N. Barisien.)

**588.** Les traces d'un plan font avec la ligne de terre les angles $\alpha$ et $\beta$ ; les projections d'une droite font avec la ligne de terre les angles $\alpha'$ et $\beta'$. Démontrer que la condition de parallélisme du plan et de la droite est

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha'}{\operatorname{tg}\alpha}+\frac{\operatorname{tg}\beta'}{\operatorname{tg}\beta}=1.$$

En déduire les angles que font avec la ligne de terre les projections de

l'intersection de deux plans dont on donne les angles des traces avec la ligne de terre. (A. C.)

×889. Une montre a 3 aiguilles égales des heures, minutes, secondes et de même pivot. On demande s'il viendra un moment où les 3 aiguilles auront leurs extrémités aux sommets d'un triangle équilatéral?

890. On donne une courbe plane Δ. En un point quelconque M de Δ, on mène la tangente MT. O étant un point fixe, on construit l'angle MOT égal à un angle donné $\alpha$. Trouver par des considérations cinématiques ou infinitésimales la tangente en P à la courbe décrite par ce point lorsque M parcourt Δ. (J. Neuberg).

891. Etant donnés un polygone plan ABC ... KL et des nombres positifs, $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \varkappa, \lambda$, moindres que l'unité, on déduit, d'un point quelconque $L_0$ du plan la suite de points $A_1, B_1, C_1, \ldots, K_1, L_1$, en prenant sur le droite $AL_0$ le segment $AA_1 = \alpha . AL_0$, sur la droite $BA_1$ le segment $BB_1 = \beta . BA_1$, sur la droite $CB_1$ le segment $CC_1 = \gamma . CB_1$ etc. Le même procédé étant appliqué au point $L_1$, on obtient une seconde suite $A_2, B_2, \ldots, L_2$; le point $L_2$ conduit à une troisième suite $A_3, B_3, \ldots, L_3$, etc.

Démontrer que les points $A_n, B_n, \ldots, L_n$ tendent vers des positions-limites A', B', ... L'. Etant donnés les nombres $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ et l'un des polygones ABC ... L, A'B'C' ... L', comment peut-on trouver l'autre polygone?

Cette proposition généralise la question 3206 du *Journal de Vuibert*. (J. N.)

892. On donne, dans un même plan, une conique C et un cercle O. Soit AB la corde des contacts de la conique C avec un des cercles qui lui sont bitangents. L'axe radical de ce cercle et du cercle O coupe la droite AB en un point M dont on demande le lieu géométrique. Quelle est l'enveloppe de cet axe radical? (V. Jamet).

×893. Sur les côtés d'un triangle ABC on construit extérieurement les carrés BCDE, CAFG, ABHJ; sur les droites FJ, HE, DG, on construit extérieurement les carrés FJLM, HENO, DGPQ. Démontrer 1° que les droites QN, OL, MP sont parallèles aux côtés du triangle ABC et égales aux quadruples de ces côtés; 2° que les trapèzes EDQN, HJLO, FGPM sont égaux à cinq fois le triangle ABC. (Niyland).

894. On coupe un ellipsoïde par un plan perpendiculaire à un axe et l'on considère la développée de la section. Si le plan se déplace parallèlement à lui-même, la développée engendrera une surface. Trouver l'équation de cette surface et le volume qu'elle limite. (Petit-Bois).

## CONDITION POUR QUE DEUX ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ AIENT UNE RACINE COMMUNE;

par M. l'abbé E. GELIN, professeur au Collège Saint-Quirin à Huy.

1. Soient les deux équations

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a'x^2 + b'x + c' = 0.$$

En exprimant que l'une des racines de la première est égale à l'une des racines de la seconde, on a

$$\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b' + \sqrt{b'^2 - 4a'c'}}{2a'},$$

chaque radical étant pris avec le signe convenable. Cette égalité peut être écrite de l'une des trois manières :

$$ab' - ba' = a'\sqrt{b^2 - 4ac} - a\sqrt{b'^2 - 4a'c'},$$

$$ab' - ba' - a'\sqrt{b^2 - 4ac} = -a\sqrt{b'^2 - 4a'c'},$$

$$ab' - ba' + a\sqrt{b'^2 - 4a'c'} = a'\sqrt{b^2 - 4ac};$$

d'où, en élevant au carré et en simplifiant,

$$2ac' + 2ca' - bb' = \sqrt{(b^2 - 4ac)(b'^2 - 4a'c')},$$

$$b(ab' - ba') - 2a(ac' - ca') = (ab' - ba')\sqrt{b^2 - 4ac},$$

$$b'(ab' - ba') - 2a'(ac' - ca') = -(ab' - ba')\sqrt{b'^2 - 4a'c'};$$

puis, en élevant de nouveau au carré et en simplifiant,

$$(2ac' + 2ca' - bb')^2 = (b^2 - 4ac)(b'^2 - 4a'c'), \qquad (1)$$

$$a(ac' - ca')^2 - b(ab' - ba')(ac' - ca') + c(ab' - ba')^2 = 0, \qquad (2)$$

$$a'(ac' - ca')^2 - b'(ab' - ba')(ac' - ca') + c'(ab' - ba')^2 = 0. \qquad (3)$$

Telle est, écrite sous trois formes différentes, la condition nécessaire pour que les deux équations aient au moins une racine commune.

2. On peut aussi trouver cette condition en éliminant, entre les deux équations données, le premier, le second ou le troisième terme.

1° Si l'on élimine le premier terme, on a

$$x(ab' - ba') + ac' - ca' = 0,$$

d'où, pour la racine commune,

$$x = -\frac{ac' - ca'}{ab' - ba'}. \qquad (\alpha)$$

En remplaçant $x$ par cette valeur dans la première ou dans la seconde équation, on trouve la condition cherchée sous la forme (2) ou (3).

2° Si l'on élimine le second terme, on a

$$x^2(ab' - ba') + cb' - bc' = 0,$$

d'où, pour la racine commune,

$$x = \sqrt{\frac{bc' - cb'}{ab' - ba'}}. \qquad (\beta)$$

En remplaçant $x$ par cette valeur dans l'une des équations données, écrites sous la forme

$$(ax^2 + c)^2 = b^2x^2, \qquad (a'x^2 + c')^2 = b'^2x^2,$$

on trouve, pour la condition cherchée,

$$(ac' - ca')^2 = (ab' - ba')(bc' - cb'). \qquad (4)$$

3° Si l'on élimine le troisième terme, on a

$$x^2(ac' - ca') + x(bc' - cb') = 0,$$

d'où, pour la racine commune (*),

$$x = -\frac{bc' - cb'}{ac' - ca'}. \qquad (\gamma)$$

En remplaçant $x$ par cette valeur dans la première ou dans la seconde équation, on a la condition

$$a(bc' - cb')^2 - b(ac' - ca')(bc' - cb') + c(ac' - ca')^2 = 0, \quad (5)$$

$$a'(bc' - cb')^2 - b'(ac' - ca')(bc' - cb') + c'(ac' - ca')^2 = 0. \quad (6)$$

4° En égalant entre elles les valeurs $(\alpha)$ et $(\beta)$, $(\alpha)$ et $(\gamma)$, $(\beta)$ et $(\gamma)$ de la racine commune, on retrouve la condition (4).

**3.** Soient encore $x'$ et $x''$ les racines de la première équation, $x'$ et $x'''$ les racines de la seconde. On a

$$x' + x'' = -\frac{b}{a}, \quad x'x'' = \frac{c}{a},$$

$$x' + x''' = -\frac{b'}{a'}, \quad x'x''' = \frac{c'}{a'},$$

(*) Lorsque la racine commune est $x = 0$, on a $c = 0$, $c' = 0$, et réciproquement.

d'où, en éliminant $x'$,

$$x'' - x''' = \frac{ab' - ba'}{aa'}, \quad \frac{x''}{x'''} = \frac{ca'}{ac'}.$$

On tire de là

$$x'' = -\frac{c}{a} \cdot \frac{ab' - ba'}{ac' - ca'}, \quad x''' = -\frac{c'}{a'} \cdot \frac{ab' - ba'}{ac' - ca'};$$

puis on a

$$x' = -\frac{b}{a} - x'' = -\frac{b'}{a'} - x''' = -\frac{bc' - cb'}{ac' - ca'},$$

ou

$$x' = \frac{c}{ax''} = \frac{c'}{a'x'''} = -\frac{ac' - ca'}{ab' - ba'}.$$

En remplaçant $x''$ ou $x'$ dans la première équation, $x'''$ ou $x'$ dans la seconde, on trouve la condition cherchée sous les formes (2), (3), (5), (6).

En égalant entre elles les deux valeurs de $x'$, on retrouve la condition (4).

4. Il est aisé de vérifier l'équivalence des formules (1), (2), (3), (4), (5), (6).

La formule (1), par exemple,

$$(2ac' + 2ca' - bb')^2 = (b^2 - 4ac)(b'^2 - 4a'c'),$$

peut s'écrire successivement :

$$4(ac' + ca')^2 - 4bb'(ac' + ca') + b^2b'^2 = b^2b'^2 - 4acb'^2 - 4a'c'b^2 + 16aca'c',$$

$$(ac' - ca')^2 = bb'(ac' + ca') - acb'^2 - a'c'b^2,$$

$$(ac' - ca')^2 = (ab' - ba')(bc' - cb'),$$

c'est-à-dire qu'on retrouve la formule (4).

De même, la formule (2),

$$a(ac' - ca')^2 - b(ab' - ba')(ac' - ca') + c(ab' - ba')^2 = 0,$$

donne

$$a(ac' - ca')^2 = (ab' - ba')[b(ac' - ca') - c(ab' - ba')],$$

$$(ac' - ca')^2 = (ab' - ba')(bc' - cb'),$$

c'est-à-dire qu'on retrouve encore la formule (4).

5. Il reste à démontrer que la condition trouvée est *suffisante*, c'est-à-dire que, si elle est remplie, les deux équations données admettent une racine commune.

La condition trouvée peut s'écrire, en prenant $c'$ pour inconnue,

$$a^2c'^2 - c'[2aca' + b(ab' - ba')] + c^2a'^2 + cb'(ab' - ba') = 0,$$

d'où

$$c' = \frac{1}{2a^2}\left[2aca' + b(ab' - ba') \pm (ab' - ba')\sqrt{b^2 - 4ac}\right],$$

ou

$$c' = \frac{ca'}{a} - \frac{ab' - ba'}{a}\left(\frac{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right),$$

ou

$$-\frac{ac' - ca'}{ab' - ba'} = \frac{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

On trouverait de même, en cherchant la valeur de $c$,

$$-\frac{ac' - ca'}{ab' - ba'} = \frac{-b' \mp \sqrt{b'^2 - 4a'c'}}{2a'}.$$

On a donc

$$\frac{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b' \mp \sqrt{b'^2 - 4a'c'}}{2a'},$$

c'est-à-dire que l'une au moins des racines de la première équation est égale à l'une des racines de la seconde, ce qu'il fallait démontrer.

6. On peut aussi se proposer de former l'équation aux racines non communes des deux équations données. On a

$$x'' + x''' = -\frac{(ab' - ba')(ac' + ca')}{aa'(ac' - ca')}, \quad x''x''' = \frac{cc'}{aa'}\left(\frac{ab' - ba'}{ac' - ca'}\right)^2,$$

d'où, pour l'équation cherchée,

$$aa'(ac' - ca')^2x^2 + (ab' - ba')(a^2c'^2 - c^2a'^2)x + cc'(ab' - ba')^2 = 0.$$

7. Si les coefficients $a, b, c, a', b', c'$ sont *réels*, la racine commune et les deux racines non communes des deux équations sont aussi *réelles*.

C'est ce qui résulte des valeurs trouvées pour $x'$, $x''$, $x'''$, et ce que l'on peut d'ailleurs démontrer simplement de la manière suivante :

Si l'on avait l'égalité

$$\frac{-b + i\sqrt{4ac - b^2}}{2a} = \frac{-b' + i\sqrt{4a'c' - b'^2}}{2a'}, \quad (i = \sqrt{-1}),$$

on en déduirait, comme on le sait,

$$-\frac{b}{2a}=-\frac{b'}{2a'},\quad \frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}=\frac{\sqrt{4a'c'-b'^2}}{2a'},$$

d'où

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'};$$

c'est-à-dire que les deux équations seraient identiques, ou auraient les deux racines imaginaires communes.

On peut aussi faire voir directement que la condition

$$U=(2ac'+2ca'-bb')^2-(b^2-4ac)(b'^2-4a'c')=0$$

est impossible, lorsque les deux équations, sans être identiques, ont des racines imaginaires, c'est-à-dire lorsque les binômes $b^2-4ac$ et $b'^2-4a'c'$ sont négatifs.

Posons, en effet,

$$b^2-4ac=-\alpha^2,\quad b'^2-4a'c'=-\alpha'^2,$$

d'où

$$c=\frac{\alpha^2+b^2}{4a},\quad c'=\frac{\alpha'^2+b'^2}{4a'}.$$

On aura

$$U=\left[a\frac{\alpha'^2+b'^2}{2a'}+a'\frac{\alpha^2+b^2}{2a}-bb'\right]^2-\alpha^2\alpha'^2$$

$$=\frac{[a^2(\alpha'^2+b'^2)+a'^2(\alpha^2+b^2)-2aa'bb']^2-4a^2a'^2\alpha^2\alpha'^2}{4a^2a'^2}$$

$$=\frac{[a\alpha'+\alpha a')^2+(ab'-ba')^2][a\alpha'-\alpha a')^2+(ab'-ba')^2]}{4a^2a'^2}>0.$$

Si les coefficients $a, b, c, a', b', c'$, sont non seulement réels mais *rationnels*, la racine commune et les racines non communes des deux équations sont aussi *rationnelles*, et les expressions

$$b^2-4ac,\quad b'^2-4a'c',\quad \frac{bc'-cb'}{ab'-ba'},\quad (ab'-ba')(bc'-cb'),$$

sont des *carrés*(*).

(*) Par une distraction évidente, la question traitée dans cet article est ains

## ALBERT RIBAUCOUR (1845-1893).

Le compte rendu de la séance du 25 septembre 1893 de l'Académie des Sciences de Paris, contient les quelques lignes suivantes : « M. le Secrétaire perpétuel informe l'Académie de la perte que la Science vient de faire dans la personne de M. Albert Ribaucour, ingénieur en chef des ponts et chaussées, lauréat de l'Académie et auteur de travaux mathématiques très remarquables, mort à Philippeville [Algérie], le 13 septembre » (C. R., CXVII, p. 435).

A. Ribaucour a publié, dans le recueil dont *Mathesis* est la continuation, un travail remarquable intitulé : ***Mémoire sur les courbes enveloppes de cercles et sur les surfaces enveloppes de sphères*** (N. C. M., 1879, V, 257-263, 305-315, 337-343, 385-393, 417-425, 1880, VI, 1-7); il a été lauréat de l'Académie de Belgique en 1880, et auparavant de l'Académie des Sciences de Paris. Nous croyons donc que quelques détails biographiques et bibliographiques sur ce géomètre aussi modeste que distingué seront bien venus auprès de nos lecteurs.

Albert Ribaucour est né à Lille le 28 novembre 1845. Il est entré à l'École Polytechnique en 1865 avec le n° 17 sur 140, en est sorti, le sixième sur 133, en 1867 comme élève-ingénieur des Ponts et chaussées. Il fut nommé ingénieur ordinaire des Ponts et Chaussées à Rochefort-sur-Mer, le 1er novembre 1870, puis à Draguignan, le 1er juillet 1873, à Aix le 1er décembre 1878; il fut promu aux fonctions d'ingénieur en chef à Vesoul, le 1er septembre 1885, puis ingénieur en chef le 1er janvier suivant. Il résidait à Philippeville depuis le 1er juin 1886. C'est là qu'il

---

résolue dans un *Traité élémentaire d'Algèbre*, Bruxelles et Paris, 1880, page 140 : « *A quelles conditions les deux équations*

$$ax^2+bx+c=0 \quad et \quad a'x^2+b'x+c'=0$$

*ont-elles une racine commune?*

Si on égale les deux valeurs de $x$ dans ces équations, on a

$$\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-4a'c'}}{2a'}.$$

De cette équation, qui renferme des quantités rationnelles et irrationnelles, on tire :

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'} \quad \text{et} \quad \frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}.$$

c'est-à-dire que *les coefficients des deux équations doivent être proportionnels.* »

a été enlevé, en quelques heures, par un accès de fièvre pernicieuse, après une tournée sur ses chantiers, le 13 septembre 1893.

Les travaux remarquables qu'il exécuta dans l'arrondissement d'Aix et notamment ceux du bassin de décantation de Saint-Christophe, lui valurent, outre la croix de la Légion d'honneur, une médaille d'or à l'Exposition universelle de 1889.

Ribaucour a publié(*) dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques*, l'*Institut* et le *Bulletin de la Société philomatique*, les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, la *Nouvelle Correspondance mathématique*, etc., des notes originales portant la plupart sur la théorie des surfaces (enveloppes de sphères, développées, déformation des surfaces, lignes tracées sur les surfaces, etc.), et sur la théorie de la courbure.

Déjà à l'École Polytechnique, Ribaucour avait eu l'occasion de se révéler comme un géomètre aux conceptions hardies et originales. Il justifia bien les appréciations favorables portées sur lui dès cette époque par des juges compétents. Il fut nommé répétiteur de géométrie à l'École Polytechnique, le 25 novembre 1873, en remplacement de Laguerre, mais il donna sa démission, dès le 10 février 1874, pour reprendre ses fonctions à Draguignan et achever l'importante étude de géométrie qui devait lui valoir le titre si envié de lauréat de l'Institut. En 1876, l'Académie des Sciences de Paris, lui donnait le prix Dalmont pour un mémoire considérable sur la théorie des surfaces contenant nombre de résultats nouveaux ou plus généraux que ceux de ses devanciers. « M. Ribaucour, dit le savant rapporteur, M. de la Gournerie, représente une surface par une équation ordinaire en coordonnées rectangulaires contenant deux paramètres variables et pour leur donner une signification géométrique, il considère une surface de référence sur laquelle sont deux séries de courbes qui leur correspondent. Chaque système de valeurs des deux paramètres détermine sur la surface de référence un point qui est pris pour origine des coordonnées. Les axes sont la normale et généralement les bissectrices des courbes;

(*) Voici à ce sujet quelques indications nécessairement incomplètes. N. A. M. (2), IV, 41, 321, V. 170, VI, 471, VII, 171-176, 190, VIII, 563, IX, 429-430, X, 558. Institut (première section), XXXVII, 29-30, 124-125, 222-223, 371-372, 389, XXXVIII, 60-61, 141-142, 236-237; C. R. LXVII, 1334; LXX, 390; LXXIV, 1399-1403; 1489-1491, 1570-1572; LXXV, 533-536; LXXVI, 478-482; 890-893; 1247-1251; LXXX, 642-645; XCII, 233-235.

quelquefois cependant leurs tangentes quand elles sont rectangulaires .. La méthode peut être considérée comme nouvelle dans son ensemble, bien qu'on y retrouve diverses idées déjà émises par Gauss, Lamé, MM. Codazzi, Bertrand et Bonnet (C. R., 1877, Premier semestre, LXXXIV, pp. 811-812) ».

Le mémoire couronné par l'Académie de Paris n'a pas été publié ; mais la méthode qui avait été employée par Ribaucour dans ce travail lui servit encore dans sa remarquable *Étude des Élassoïdes ou surfaces à courbure moyenne nulle*, couronnée le 16 décembre 1880, par l'Académie royale de Belgique (Mémoires couronnés de l'Académie de Belgique, 1881, t. XLIV, VI-236 p. in-4°). Ce travail important, qui est l'œuvre capitale de Ribaucour, contient une solution nouvelle du problème de Monge (intégration de l'équation aux dérivées partielles des élassoïdes), trouvée en même temps par M. S. Lie et une solution géométrique complète du problème de Björling (inscrire dans une développable donnée un élassoïde passant par une ligne tracée sur la surface développable); puis un grand nombre de résultats nouveaux et de vues originales très suggestives relatives à la théorie des élassoïdes et à des questions apparentées. Nous citerons, en particulier, la théorie des congruences isotropes qui lui appartient en propre (*).

Avant de soumettre ce savant Mémoire à l'Académie de Belgique, Ribaucour en avait exposé les principaux résultats dans une série de conférences faites à la Faculté des Sciences de Marseille. Dans ces leçons, éminemment originales pour le fond comme pour la forme, il se servait, avec une habileté extraordinaire, de l'intuition géométrique, pour faire saisir à ses auditeurs la genèse de ses ingénieuses découvertes.

C'est que Ribaucour était un vrai géomètre, dans le sens strict du mot; il aurait pu prendre pour devise « *Ut pictura Mathesis* » tant il excellait à « rendre sensibles par les images de la Géométrie, les opérations intellectuelles de l'Analyse ». (P. M).

(*) Nous avons donné une analyse étendue de ce Mémoire dans le *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*, 1882, XIV, pp. 708-712 (Berlin, Reimer, 1885).

## SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

### Question 809.

(Voir *Mathesis*, (2), III, p. 32.)

*On joint les extrémités* C *et* D *d'un diamètre d'une conique à un foyer* F *de cette courbe, par des droites rencontrant le diamètre conjugué* C'D' *aux points* M *et* M'. *Si* O *est le centre de la conique, on a*

$$OM.OM' + OC^2 = \text{constante}.$$

*Si* $\alpha$ *est l'angle que la tangente au point* C *fait avec un rayon vecteur* CF, *on a*

$$OC' \sin\alpha = \text{constante}. \qquad \text{(Cl. Servais.)}$$

*Solution par* MM. Sollertinsky *et* Verbessem. Soient : F' l'autre foyer de la conique; $a$, $b$ les demi-axes; M'' le point d'intersection de CF', C'D'.

On sait que $CM = CM'' = a$(*). Donc, en grandeur et en signe,

$$OM.OM'' = OC^2 - a^2,$$

d'où

$$a^2 = OC^2 - OM.OM'' = OM.OM' + OC^2.$$

Dans le triangle COM,

$$a \sin\alpha = OC.\sin COC';$$

d'où

$$a.OC' \sin\alpha = OC.OC' \sin COC' = ab,$$

et, par suite,

$$OC' \sin\alpha = b.$$

*Solution par* MM. Droz-Farny, Barisien et Delville. Soient $a\cos\varphi$, $b\sin\varphi$ les coordonnées de C; celles de C' sont $a\sin\varphi$, $-b\cos\varphi$, et l'on a

$$\overline{OC}^2 = a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi, \quad \overline{OC'}^2 = a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi.$$

Les droites OC', CF ayant pour équations

$$bx\cos\varphi + ay\sin\varphi = 0, \quad y = \frac{b\sin\varphi}{a\cos\varphi - c}(x - c),$$

(*) Prolongeons F'C de CK = CF; la tangnte en C est perpendiculaire au milieu L de la droite FK; donc OL est parallèle à F'K et égale à $\frac{1}{2}$ FK ou à $a$, etc.

les coordonnées de leur point d'intersection M sont

$$x = \frac{ac \sin \varphi}{a - c \cos \varphi}, \quad y = -\frac{bc \sin \varphi \cos \varphi}{a - c \cos \varphi},$$

et l'on a

$$OM = \frac{c \sin \varphi}{a - c \cos \varphi} \sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi},$$

$$OM' = \frac{c \sin \varphi}{a + c \cos \varphi} \sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}.$$

Il en résulte

$$OM \cdot OM' + OC^2 = c^2 \sin^2 \varphi + a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi = a^2.$$

On sait que

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{b^2}{cy'} = \frac{b}{c \sin \varphi};$$

donc

$$\sin \alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{b}{\sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}}, \quad \text{ou} \quad OC' \sin \alpha = b.$$

MM. Bellens et Déprez ont résolu la même question. M. Vladimirescu a démontré le théorème pour l'ellipse et l'hyperbole en se servant d'un angle paramétrique.

---

## Question 852.

(Voir *Mathesis* (2) III, p. 152).

***On considère les triangles*** OAB ***formés par un rayon fixe*** OA ***d'un cercle donné et par un rayon variable*** OB. ***Trouver les lieux décrits par les centres des cercles tritangents, l'orthocentre, le centre du cercle des neuf points, les points de Brocard et les points de Lemoine.*** (Déprez.)

Solution par M. E. N. Barisien. 1° *Lieu des centres des cercles tritangents.* Soient $\omega$ le centre du cercle inscrit, $\omega_0$ le centre du cercle exinscrit dans l'angle BOA, $\omega_A$ le centre du cercle exinscrit dans l'angle BAO, $\omega_B$ le centre du cercle exinscrit dans l'angle ABO.

Soit aussi en P la projection du centre $\omega$ sur OA, et désignons par $a$ le rayon du cercle, par $2\theta$ l'angle BOA et par $r$ le rayon vecteur $O\omega$. On a alors

$$OP + PA = a.$$

Mais $OP = r\cos\theta$ et $PA = \frac{1}{2}AB = a\sin\theta$. L'équation en coordonnées polaires du lieu de $\omega$ est par suite

$$r\cos\theta + a\sin\theta = a \quad \text{ou} \quad r = \frac{a(1-\sin\theta)}{\cos\theta}. \tag{1}$$

On trouve de même pour le lieu de $\omega_0$ l'équation

$$r = \frac{a(1+\sin\theta)}{\cos\theta}. \tag{2}$$

Les équations (1) et (2) se rapportent à la même courbe qui est la strophoïde droite dont le sommet est en O et le point double en A.

Les centres $\omega$ et $\omega_0$ sont donc sur la même strophoïde. Le cercle passant par les quatre points A, $\omega$, B, $\omega_0$ est tangent en A à OA, et l'on a bien

$$O\omega \times O\omega_0 = a^2$$

ce qui résulte de la définition géométrique de la strophoïde. On démontre facilement par la géométrie que la perpendiculaire en A sur AO divise le triangle $\omega A\omega_0$ en deux triangles isoscèles.

Dans le triangle $\omega_A OB$, l'angle en B vaut $45^\circ + \frac{\theta}{2}$, l'angle en O vaut $90^\circ - \theta$: il en résulte que l'angle en $\omega_A$ a pour valeur

$$180^\circ - (90^\circ - \theta) - \left(45^\circ + \frac{\theta}{2}\right) = 45^\circ + \frac{\theta}{2}$$

Par conséquent, le triangle $OB\omega_A$ est isoscèle(*); donc

$$O\omega_A = OB = a$$

On trouverait de même que $O\omega_B = a$. Le lieu des centres $\omega_A$ et $\omega_B$ est donc le cercle donné.

2° *Lieu de l'orthocentre.* Soit H l'orthocentre et posons $HO = r$. Exprimons que les projections de BO et HO sur AO sont égales. On a ainsi

$$a\cos 2\theta = r\cos\theta.$$

L'équation en coordonnées polaires du lieu de H est donc

$$r = \frac{a\cos 2\theta}{\cos\theta};$$

---

(*) On le démontre plus simplement en observant que la bissectrice extérieure $O\omega_A$ du triangle isoscèle OAB est parallèle à la base AB. (J. N.)

ou, en transformant en coordonnées rectilignes,

$$y = x\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}.$$

C'est la strophoïde droite dont le sommet est en A et le point double en O. Pour établir ce résultat il suffit de démontrer que OH, AH et la perpendiculaire en O sur OA forment un triangle isoscèle.

3° *Lieu du centre du cercle des neuf points.* Si C est le centre de ce cercle et D le milieu de AB, on a

$$OC = OD - CD.$$

Mais $r$ et $\theta$ étant les coordonnées polaires de C, on a

$$OD = a\cos\theta, \quad CD = \frac{a}{4\cos\theta}.$$

Le lieu de C est donc la courbe

$$r = a\cos\theta - \frac{a}{4\cos\theta};$$

ou, en coordonnés rectilignes,

$$y = x\sqrt{\frac{3a-4x}{4x+a}}.$$

C'est une cubique du même genre que la strophoïde droite(*). Le point double est en O, et les tangentes en ce point double font entre elles un angle de 60°.

4° *Lieu du point de Lemoine.* Soit K le point de Lemoine et déterminons ce point par la condition que ses distances aux côtés du triangle soient proportionnelles aux côtés. Si L est la projection de K sur OA, on doit avoir

$$\frac{KL}{OA} = \frac{KD}{AB}. \tag{3}$$

Mais $r$ et $\theta$ étant les coordonnées polaires de K, on a

$$KL = r\sin\theta, \quad KD = a\cos\theta - r, \quad OA = a, \quad AB = 2a\sin\theta.$$

Ces valeurs portées dans la relation (3) donnent l'équation du lieu de K

$$r = \frac{a\cos\theta}{1+2\sin^2\theta};$$

(*) Cette courbe est la trisectrice de Maclaurin (voir J. M. S., 1885, p. 178; 1888, pp. 205 et 255; 1891, p. 246). (J. N.).

ou, en coordonnées rectilignes,

$$x^2 + 3y^2 - ax = 0.$$

Le lieu du point de Lemoine est donc l'ellipse dont les sommets du grand axe sont O et A, et dont le petit axe a pour longueur $a : \sqrt{3}$.

5° *Lieu des points de Brocard.* Les deux points de Brocard Ω et Ω′ sont définis par les relations angulaires

$$\Omega AB = \Omega BO = \Omega OA, \quad \Omega' AO = \Omega' OB = \Omega' BA.$$

*Lieu du point* Ω. Désignons ici par $r$ et $\theta$ les coordonnées polaires de Ω et par $2\alpha$ l'angle AOB. Les rapports des côtés aux sinus des angles opposés, dans les deux triangles OAΩ et OBΩ, donnent les relations

$$\frac{r}{\cos(\alpha + \theta)} = \frac{a}{\cos\alpha}, \quad \frac{r}{\sin\theta} = \frac{a}{\sin 2\alpha}. \tag{4}$$

Le lieu de Ω s'obtiendra en éliminant $\alpha$ entre ces égalités. Par division on obtient

$$\frac{\cos(\alpha + \theta)}{\sin\theta} = \frac{1}{2\sin\alpha}, \quad \text{ou} \quad \sin 2\alpha \cos\theta + \cos 2\alpha \sin\theta = 2\sin\theta. \tag{5}$$

De (4) et (5) on déduit

$$\sin 2\alpha = \frac{a\sin\theta}{r}, \quad \cos 2\alpha = 2 - \frac{a\cos\theta}{r}.$$

En élevant au carré et ajoutant, on obtient l'équation du lieu

$$3r^2 - 4ar\cos\theta + a^2 = o,$$

ou en coordonnées rectilignes

$$3(x^2 + y^2) - 4ax + a^2 = o,$$

ou encore

$$\left(x - \frac{2a}{3}\right)^2 + y^2 = \frac{a^2}{9}.$$

Le lieu de Ω est donc un cercle de rayon $\frac{a}{3}$ et ayant son centre sur OA à la distance $\frac{2a}{3}$ du point A.

*Lieu du point* Ω′. Le point Ω′ est évidemment symétrique du point Ω par rapport à la hauteur abaissée de O sur AB. Par suite, le rayon vecteur de Ω′ est égal à celui de Ω, et si $\omega$ est l'angle que OΩ′ fait avec OA, on a $\theta = 2\alpha - \omega$, $2\alpha = \theta + \omega$.

Les relations (4) et (5) deviennent alors

$$\frac{r}{\sin\theta} = \frac{a}{\sin(\theta+\omega)}, \quad \sin(2\theta+\omega) = 2\sin\theta, \tag{6}$$

et c'est entre ces deux relations qu'il faut éliminer $\theta$ pour avoir le lieu de $\Omega'$. De la première, on déduit

$$tg\,\theta = \frac{r\sin\omega}{a - r\cos\omega};$$

et, par conséquent,

$$\sin\theta = \frac{r\sin\omega}{\sqrt{r^2 - 2ar\cos\omega + a^2}}, \quad \cos\theta = \frac{a - r\cos\omega}{\sqrt{r^2 - 2ar\cos\omega + a^2}},$$

$$\sin 2\theta = \frac{2r\sin\omega\,(a - r\cos\omega)}{r^2 - 2ar\cos\omega + a^2}, \quad \cos 2\theta = \frac{(a - r\cos\omega)^2 - r^2\sin^2\omega}{r^2 - 2ar\cos\omega + a^2}.$$

En portant ces valeurs dans la seconde des équations (6),

$$\sin 2\theta\cos\omega + \cos 2\theta\sin\omega = 2\sin\theta,$$

et réduisant, on arrive à l'équation

$$a^2 - r^2 = 2r\sqrt{r^2 - 2ar\cos\omega + a^2};$$

ou, en faisait disparaître le radical,

$$3r^4 - 8ar^3\cos\omega + 6a^2r^2 - a^4 = 0.$$

Enfin, en coordonnées rectilignes,

$$3(x^2+y^2)^2 - 8ax(x^2+y^2) + 6a^2(x^2+y^2) - a^4 = 0.$$

Le lieu est une quartique, passant par le point A (point triple) et par le point situé sur l'axe des $x$ d'abscisse $x = -\frac{1}{3}a$.

---

## *QUESTIONS D'EXAMEN.

**594.** Si $a$ et $b$ sont deux nombres premiers entre eux, les deux expressions $11a + 2b$, $18a + 5b$ sont à la fois divisibles ou non divisibles par 19; elles n'ont d'autre facteur commun que 19.

**595.** Si d'un point d'un côté d'un triangle on mène des parallèles aux deux autres côtés, la racine carrée de l'aire de ce triangle est égale à la somme des racines carrées des aires des deux triangles déterminés par les deux parallèles.

**596.** Les nombres 11, 12, 13, 22 sont les seuls nombres de deux chiffres dont les carrés sont tels que retournés ils soient les carrés des nombres retournés(*). (N. GOFFART.).

**597.** Résoudre un triangle ABC connaissant les sommes $a^2 + m^2$, $b^2 + m'^2$, $c^2 + m''^2$, où $m$, $m'$, $m''$ désignent les trois médianes.

Soient $A^2$, $B^2$, $C^2$ les trois sommes; on a

$$A^2 = a^2 + m^2 = a^2 + \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4} = \frac{3a^2 + 2b^2 + 2c^2}{4}, \text{ etc.}$$

Résoudre les trois équations ainsi obtenues.

**598.** Résoudre le système d'équations :

$$\frac{k^2 x}{x^2 + y^2} = a, \quad \frac{k^2 y}{x^2 + y^2} = b.$$

Construire les solutions en supposant que les données $a$, $b$, $k$ représentent trois longueurs. Cas particulier où $b = 0$. (BACCALAURÉAT, 1892.)

**599.** Démontrer que si $a$ est compris entre 2 et 5, l'expression

$$x^2 - 4ax + 3a^2 + 7a - 10$$

sera positive pour toute valeur de $x$. (BACCALAURÉAT, 1892.)

**600.** Dans un triangle on donne $a$, A et le produit $b(b + c) = k^2$. 1° Déterminer par le calcul $b$ et $c$. — Discussion. — 2° Traiter la même question géométriquement.

Eliminant $c$ entre les équations

$$b(b + c) = k^2, \quad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A,$$

on trouve

$$4b^4 \cos^2 \tfrac{1}{2} A - b^2 (a^2 + 4k^2 \cos^2 \tfrac{1}{2} A) + k^4 = 0,$$

$$8b^2 \cos^2 \tfrac{1}{2} A = a^2 + 4k^2 \cos^2 \tfrac{1}{2} A \pm \sqrt{a^4 + 8a^2 k^2 \cos^2 \tfrac{1}{2} A - 16k^4 \cos^2 \tfrac{1}{2} A \sin^2 \tfrac{1}{2} A};$$

le radical s'annule pour $a^2 = -4k^2 \cos^2 \tfrac{1}{2} A \pm 4k^2 \cos \tfrac{1}{2} A$, donc les valeurs de $b^2$ ne sont réelles que si $a^2 > 4k^2 \cos \tfrac{1}{2} A (1 - \cos \tfrac{1}{2} A)$. Cette condition est suffisante pour que les valeurs de $b^2$ soient en même temps positives. Les valeurs correspondantes de $c$ doivent être positives, ce qui entraîne $k^2 > b^2$; si l'on remplace $b^2$ par sa valeur, on voit que le radical doit être pris avec le signe — et l'on trouve la condition $a^2 > 2k^2 \sin^2 \tfrac{1}{2} A$.

Prolongeons BA de AD = AC; dans le triangle BDC on connaît l'angle BDC = $\tfrac{1}{2}$ A le côté BC = $a$ et le produit des côtés BD. DC = $2k^2 \cos \tfrac{1}{2} A$. Sur une

(*) Les trois questions 594, 595, 596 sont extraites du *Journal de Vuibert*.

corde BC = $a$ on construira un segment capable de l'angle $\frac{1}{2}$A ; si R est le rayon du cercle, la hauteur abaissée de D sur BC sera égale à $\frac{BD.DC}{2R} = \frac{R^2 \cos\frac{1}{2}A}{R}$. Cette hauteur doit être moindre que la flèche du segment capable ou $R(1+\cos\frac{1}{2}A)$, et plus grande que la distance du centre à BC, etc.

---

## QUESTIONS PROPOSÉES.

**892bis.** On donne une quadrique de révolution et une sphère. Sur le plan qui contient le centre de la sphère et l'axe de la quadrique on projette l'intersection de ces deux surfaces. On sait que la projection est un arc de parabole, et l'on propose de trouver graphiquement, à l'aide de la question 875 (p. 215) : 1° le sommet de cette parabole ; 2° le point où la tangente à cette parabole a une direction donnée. (V. JAMET.)

Supprimer la question 892, p. 264, déjà publiée, p. 215, n° 875.

×**895.** Résoudre le système

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}=z, \quad 2x+2y+p=0, \quad z^4+pz^2+q=0,$$

et chercher les conditions pour que les valeurs des trois inconnues soient réelles. (*Baccalauréat*, POITIERS, 1893).

×**896.** Le plus petit multiple $1, 2, 3, \ldots 2n$ est égal à celui de $(n+1), (n+2), \ldots 2n$. (E. CATALAN.)

**897.** Soient S l'aire d'une ellipse, $S_1$ celle de la podaire du centre de cette ellipse, $S_2$ celle de l'anti-podaire du centre de la même ellipse. Montrer que l'on a la relation $3S^2 - S_1^2 = 2SS_2$. (E. N. BARISIEN.)

**898.** Soient P, Q les projections d'un point M d'une ellipse sur les axes principaux. Trouver l'aire de l'enveloppe de l'axe radical des cercles décrits sur MP et MQ comme diamètres. (E. N. BARISIEN.)

**899.** Les droites telles que le centre des moyennes distances de leurs points d'intersection avec une parabole semi-cubique, soit sur l'axe de la courbe, enveloppent une autre parabole semi-cubique. (E. N. BARISIEN.)

×**900.** Soient A′, B′, C′ les pieds des bissectrices intérieures des angles d'un triangle ABC, et soient A″, B″, C″ les symétriques de ces points par rapport aux sommets correspondants A, B, C. Trouver le rapport des surfaces des triangles A″B″C″, ABC en fonction des côtés de ABC.

---

**Rectification.** — Page 244, ligne 22, lire $dx$ au lieu de $dz$.

# TABLE DES MATIÈRES(*).

## ×ARITHMÉTIQUE; ANALYSE INDÉTERMINÉE.


Pages.

Sur une équation indéterminée; par M. E. Catalan . . . . . 105
Questions d'arithmologie; par M. de Rocquigny . . . . . 112, 165
Théorème d'arithmétique (J. N.) . . . . . 137, 168
Question 775; solution par M. E. Fauquemberghe . . . . . 70
Question 801; solution par MM. Bergmans, Boutin, etc. . . . . 144
Question 838; solution par M. Mandart. . . . . 235
Question 855; solution par M. E. Catalan . . . . . 256


## ALGÈBRE ET TRIGONOMÉTRIE.


×Sommation des sinus et des cosinus d'angles en progression arithmétique; par M. L. Meurice. . . . . 19
×Égalités entre quantités proportionnelles; par M. J. Wasteels. . . . . 57
×Résolution trigonométrique de l'équation du second degré; par M. Bloume . 64
Fonction représentative des coefficients du binône; par M. Laisant. . . . 153
×Récréations et pièges mathématiques . . . . . 184, 224
×Limite ou génératrice (P. M.) . . . . . 225
×Condition pour que deux équations du second degré aient une racine commune; par M. E. Gelin . . . . . 265
Question 17; solution par M. Fauquemberghe. . . . . 48
×Question 571; solution par MM. Joachimescu et Vladimirescu. . . . . 50
×Question 798; solution par MM. Delahaye et Listray . . . . . 55
Question 754; solution par M. Servais . . . . . 67
×Question 794; solutions par MM. Van Dorsten et Catania . . . . . 96
×Question 796; solution par M. Mandart. . . . . 97
×Question 807; solution par Sollertinsky . . . . . 123, 196


(*) Pour les rectifications voir pp. 32, 80, 128, 216, 240, 280. Les articles marqués d'une croix n'exigent pour être compris que la connaissance des mathématiques élémentaires.

Pages.

×Question 840; solution par M. Lippens. . . . . 142
×Question 820; solution par MM. Retali, Quint, etc. . . . . 173
×Question 832; solution par M. Déprez . . . . . 206
×Question 853; solution par MM. Delahaye et Droz . . . . . 210
Question 821; solution par M. Decamps . . . . . 254

## ×GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE.

Sur le cercle orthocentroïdal; par Mme Prime . . . . . 33
Sur le plan; par M. J. Delbœuf . . . . . 47, 135
Sur la construction d'une moyenne proportionnelle . . . . . 32, 47, 136
Sur le théorème de Stewart (d'après M. Mackay) . . . . . 63
Propriétés de deux triangles; par M. J. Wasteels . . . . . 89
Un nouveau quadrateur. . . . . 137
Volume et centre de gravité du prismatoïde; d'après M. Frétille . . . 138, 169
Sur quelques propriétés du triangle; par M. E. Bertrand. . . . . 155
Sur les Brocardiens d'un point par rapport à une ligne; par M. Socoloff . . 166
Pièges mathématiques . . . . . 169, 184, 224
Questions de mécanique; par M. Meurice . . . . . 222, 243
Application de la formule du prismatoïde; par M. Droz . . . . . 247
Trisection de l'angle; d'après M. Pegrassi . . . . . 247
Une nouvelle quadrature du cercle . . . . . 248
Encore un quadrateur; par M. E. Gelin. . . . . 248
Question 774; solutions par MM. Droz-Farny, Emmerich, etc. . . . . 24
Question 787; solution par MM. Déprez, etc.. . . . . 27
Question 788; solutions par MM. Delville, etc.. . . . . 118
Question 797; solution par M. Sollertinsky . . . . . 121
Question 812; solutions par MM. Brocard, Quint, etc. . . . . 123
Question 793; solution par M. Delville . . . . . 142
Question 801; solution par M. Brocard . . . . . 170
Question 824; solution par MM. Quint, Camus, etc. . . . . 203
Question 843; solutions par MM. Absolonne, Servais, etc. . . . . 206
Question 786; solutions par MM. Déprez et Neuberg. . . . . 231
Question 854; solution par MM. Droz et Thiry . . . . . 238
Question 808; solutions par MM. Sollertinsky, Déprez, etc . . . . . 251

## COURBES ET SURFACES DU SECOND DEGRÉ; GÉOMÉTRIE PROJECTIVE.

Sur un nouveau groupe de trois paraboles; par M. Mandart . . . . . 10
Une propriété des quadriques et sur la polhodie; par M. Cl. Servais . . 14, 64
Théorèmes sur les courbes et les surfaces du second ordre; par M. Barbarin . 69
Sur l'hyperbole de Feuerbach (J. N.) . . . . . 81
Sur l'hyperbole équilatère (J. N.). . . . . 92
Sur deux paraboles circonscrites à un quadrangle donné; par M. Kluyver. . 108

Pages.

Sur les coniques homofocales; par M. Cl. Servais . . . . . 129
Une propriété des quadriques homofocales (J. N.) . . . . . 136
Sur les quadriques homofocales, par MM. Servais et Neuberg . . . . . 186
Sur quelques théorèmes de MM. Fouret et Jamet; par M. E. Cesáro . . . 217
Question 743; solution par M. Cl. Servais . . . . . 21
Question 771; solution par M. Sollertinsky . . . . . 23
Question 787; solution par MM. Mandart, Droz, etc. . . . . 29
Question 781; solutions par MM. Mandart, Droz, etc. . . . . 71
Question 805; solution par M. Schoute . . . . . 171
Question 810; solution par MM. Quint, Déprez, etc. . . . . 172
Questions 845, 850; solutions par MM. Servais et Neuberg . . . . . 208
Question 827; solution par MM. Bellens, Quint, etc. . . . . 233
Question 802; solution par MM. Sollertinsky . . . . . 250
Question 858; solution par MM. Droz, Mandart, etc. . . . . 258
Question 809; solutions par MM. Sollertinsky, Droz, etc. . . . . 273
Question CCCCXI (N. C. M.); solution par M. E. Barisien . . . . . 75
Question CCCCXIV (N. C. M.); solution par M. E. Barisien . . . . . 98
Question CXIX (N. C. M.); solution par M. E. Barisien . . . . . 150
Question CCCCXXIII (N. C. M.); solution par M. E. Barisien . . . . . 173
Question CXXI (N. C. M.); solutions par MM. Genty et Sollertinsky . . . 211
Question CCCXXXIX (N. C. M.); solution par M. Barisien . . . . . 259

COURBES ET SURFACES D'ORDRE SUPÉRIEUR.

Sur certaines courbes du quatrième ordre; par M. Balitrand . . . . . 5
Question 780; solution par MM. Droz et Déprez . . . . . 52
Question 776; solution par M. Droz . . . . . 70
Question 779; solution par M. Fraipont . . . . . 95
Question 819; solution par M. Gob . . . . . 144
Question 791; solution par M. Morel . . . . . 201
Question 852; solution par M. Barisien . . . . . 274
Question DXXXVIII (N. C. M.); solution par M. E. Genty . . . . . 100
Question CCCXXVIII (N. C. M.); solution par M. Barisien . . . . . 125

CALCUL DIFFÉRENTIEL; CALCUL INTÉGRAL; THÉORIE DES SÉRIES.

Sur la formule de Leibniz (P. M.) . . . . . 36
Aire de la cycloïde; d'après Holzmüller . . . . . 166
Détermination d'une intégrale; d'après Walton . . . . . 167
Question de géométrie infinitésimale (Q. 792); par M. E. Cesáro . . . 177. 186
Démonstration d'un théorème de M. Appell; par M. E. Cesáro . . . . . 241
Sur les lignes de courbure de l'ellipsoïde (J. N.) . . . . . 244
Question 777; solution par M^me^ Prime et M. Lisbray . . . . . 26
Question 795; solutions par MM. P. Delville, Mandart, etc. . . . . 73

Question [illegible], solution par M. [illegible] . . . . . . . [illegible]
Question [illegible], solutions par MM. [illegible] . . . [illegible]
Question [illegible], solution par M. [illegible] . . . . . . . . [illegible]
Question [illegible], solution par M. [illegible] . . . . . . . . [illegible]
Question [illegible], solution par M. [illegible] . . . . . . . . . . [illegible]
Question [illegible], solution par un abonné . . . . . . [illegible]

BIBLIOGRAPHIE; BIOGRAPHIE; ETC.

M. Cantor. Geschichte der Mathematik [illegible] . . . . . [illegible]
J. Casey. A Treatise [illegible] . . . . . . . . . . [illegible]
Annuaire du bureau des longitudes . . . . . . . . . . . . . [illegible]
Antomari. Cinématique et dynamique (J. N.) . . . . . . . . . . [illegible]
[illegible] Géométrie descriptive (P. M.). Réponse [illegible] . . . . . . . [illegible]
Notes sur [illegible] . . . . . . . . . . . . . . . . . [illegible]
W. Ball. Mathematical Recreations . . . . . . . . . . . . . . [illegible]
F. Müller. Zeittafeln zur Geschichte der Mathematik, etc. . . . . . . [illegible]
A. Laisant. Recueil de problèmes de mathématiques (J. N.) . . . . . . [illegible]
E. Lebon. Géométrie descriptive . . . . . . . . . . . . . . [illegible]
E. Lucas. Récréations mathématiques, III (H. Brocard) . . . . . . . . [illegible]
Revue semestrielle des publications mathématiques (P. M., J. N.) . . . . . [illegible]
Carvallo. Mécanique (J. N.) . . . . . . . . . . . . . . . . [illegible]
Fontené. L'hyperespace . . . . . . . . . . . . . . . . . . [illegible]
J. Tannery et J. Molk. Fonctions elliptiques, I . . . . . . . . . . . [illegible]
La catastrophe de Lobatchefsky . . . . . . . . . . . . . . . [illegible]
P. Sauvage. Lieux géométriques (J. N.) . . . . . . . . . . . . 117, [illegible]
A. Rebière. Mathématiques et mathématiciens . . . . . . . . . . . [illegible]
H. Vuibert. Annuaire de la jeunesse . . . . . . . . . . . . . [illegible]
Index du répertoire des sciences mathématiques . . . . . . . . . . 138
Une curieuse coïncidence . . . . . . . . . . . . . . . . 138
J. Jamet. Mécanique . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 139
G. de Longchamps. Supplément au cours de mathématiques spéciales . . 162
E. Humbert. Arithmétique (J. Tannery et P. M.). . . . . . . . . . 168
A. Picard. Traité d'analyse, II. . . . . . . . . . . . . . . . 196
B. Carrara. Teoria delle quantità complesse. . . . . . . . . . . . 199
R. Bettazi. Rizolutione dei Problemi . . . . . . . . . . . . . 229
P. Barbarin. Calculs logarithmiques . . . . . . . . . . . . . 230
Sur l'utilité de la géométrie non euclidienne (P. M.) . . . . . . . . 230
Ribaucour. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 249
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 270

QUESTIONS D'EXAMEN.

Questions 541-548, 549, 550-551, 551*-560, 561-565, 566-568, 569-570, 571-584, 585-586, 587-593, 594-600 . pp. 30, 55, 78, 101, 126, 151, 175, 210, 239, 261, 286

Pages.
Concours de l'École Polytechnique de Paris. . . . . 139, 187
Concours pour l'admission à Saint-Cyr . . . . . 190

SUPPLÉMENT.

I. Rayon de courbure de certaines courbes planes par M. J. Neuberg. . pp. 1-13
II. Essai de géométrie analytique générale ; par M. J. De Tilly . . . pp. 1-80

QUESTIONS(*).

| | POSÉE (1) I ou (2) I | RÉSOL (2) II |
|---|---|---|
| 17 | 30 (28) | 48 |
| 95 | 206 (28) | |
| | (1) III ou (2) I | |
| 252 | 143 (28) | |
| 267 | 175 (28) | |
| | (1) IV ou (2) I | |
| ×333 | 119 (29) | |
| 353 | 159 | R |
| ×357 | 159 | R |
| 383 | 231 (29) | |
| 387, 2e p. | 231 (29) | |
| | (1) V ou (2) I | |
| 411 | 23 (29) | |
| 415 | 46 | |
| | (1) VI ou (2) I | |
| 505, 2e p. | 23 (30) | |
| ×513 | 71 (30) | |
| | (1) VII ou (2) I | |
| ×571 | 126 (30) | 50 |
| 594 | 264 (31) | |
| 597 | 280 | R |
| 598 | 280 (31) | |
| | (1) VIII ou (2) I | |
| ×634 | 279 | R |
| ×635 | 279 (31) | |
| | (1) X | |
| ×677 | 72 | R |
| ×681 | 95 | R |
| 699 | 279 | R |
| | (2) I | |
| 743 | 263 | 20 |
| | (2) II | |
| 754 | 32 | 67 |
| 765 | 104 | 93 |

| | POSÉE (2) II | RÉSOL (2) III |
|---|---|---|
| 767 | 128 | R |
| 771 | 152 | 23 |
| ×774 | 152 | 24 |
| ×775 | 176 | 70 |
| 776 | 176 | 70 |
| 777 | 176 | 26 |
| 778 | 176 | |
| 779 | 215 | 95 |
| 780 | 215 | 52 |
| 781 | 215 | 71 |
| 782 | 215 | |
| ×783 | 216 | R |
| 784 | 216 | R |
| 785 | 216 | |
| ×786 | 216 | 231 |
| ×787 | 216 | 28 |
| ×788 | 240 | 119 |
| ×789 | 240 | R |
| 790 | 240 | R |
| 791 | 240 | 201 |
| 792 | 240 | 120, 140 177, 186 |
| ×793 | 263 | 142 |
| ×794 | 264 | 96 |
| 795 | 264 | 72 |
| ×796 | 264 | 97 |
| 797 | 264 | 121 |
| ×798 | 281 | 55, 58 |
| ×799 | 281 | |
| 800 | 281 | R |
| | (2) III | |
| ×801 | 31 | 170 |
| 802 | 31 | 250 |
| ×803 | 31 | |
| ×804 | 31 | 144 |
| 805 | 32 | 171 |
| 806 | 32 | R |

| | POSÉE (2) III | RÉSOL (2) III |
|---|---|---|
| ×807 | 32 | 122 |
| ×808 | 32 | 251 |
| 809 | 32 | 273 |
| 810 | 55 | 172 |
| ×811 | 55 | |
| ×812 | 56 | 123 |
| 813 | 56 | R |
| ×814 | 56 | |
| 815 | 56 | |
| ×816 | 56 | |
| 817 | 56 | R |
| 818 | 56 | R |
| 819 | 78 | 144 |
| ×820 | 79 | 172 |
| ×821 | 79 | 254 |
| ×822 | 79 | R |
| 823 | 79 | R |
| ×824 | 80 | 203 |
| 825 | 80 | |
| 826 | 80 | 205 |
| 827 | 80 | 233 |
| ×828 | 103 | |
| 829 | 103 | R |
| 830 | 103 | R |
| 831 | 103 | |
| ×832 | 104 | 206 |
| 833 | 104 | R |
| 834 | 104 | R |
| ×835 | 104 | |
| 836 | 104 | R |
| 837 | 127 | R |
| 838 | 127 | 235 |
| ×839 | 128 | R |
| ×840 | 128 | 149 |
| ×841 | 128 | |
| 842 | 128 | 235 |
| ×843 | 128 | 206 |
| 844 | 128 | R |
| 845 | 128 | 208 |

(*) La rédaction de *Mathesis* a en portefeuille de bonnes solutions des questions marquées de la lettre R ; elle engage ses collaborateurs à porter de préférence leurs efforts sur les autres questions.

| | POSÉE (2) III | RÉSOL (2) III |
|---|---|---|
| 846 | 151 | R |
| 847 | 151 | R |
| 848 | 152 | |
| 849 | 152 | R |
| 850 | 152 | 209 |
| ×851 | 152 | R |
| 852 | 152 | 274 |
| ×853 | 152 | 210 |
| ×854 | 152 | 238 |
| ×855 | 175, 214 | 256 |
| 856 | 175 | 257 |
| 857 | 176 | R |
| 858 | 176 | 258 |
| 859 | 176 | R |
| ×860 | 176 | R |
| ×861 | 176 | R |
| ×862 | 176 | R |
| ×863 | 176 | R |
| ×864 | 214 | |
| 865 | 214 | R |
| ×866 | 214 | R |
| 867 | 214 | R |
| ×868 | 215 | R |
| ×869 | 215 | R |
| ×870 | 215 | R |
| 871 | 215 | R |
| 872 | 215 | R |
| ×873 | 215 | R |
| 874 | 215 | R |
| 875 | 215 | R |
| 876 | 216 | |
| ×877 | 216 | R |
| ×878 | 216 | R |
| ×879 | 216 | R |
| 880 | 239 | R |
| 881 | 240 | R |
| 882 | 240 | |
| ×883 | 240 | R |
| 884 | 240 | |
| 885 | 240 | R |
| ×886 | 240 | |
| 887 | 263 | |
| ×888 | 263 | R |
| ×889 | 264 | R |
| 890 | 264 | R |
| 891 | 264 | R |
| 892 | 264, 288 | |
| 898 | 264 | R |
| 894 | 264 | R |
| ×895 | 288 | |
| ×896 | 288 | |
| 897 | 288 | |
| 898 | 288 | |
| 899 | 288 | |
| ×900 | 288 | |

### QUESTIONS DE LA NOUVELLE CORRESPONDANCE.


| No | PAGE. |
|---|---|
| 104 | 124 |
| 119 | 150 |
| 121 | 211 |
| 338 | 125 |
| 339 | 259 |
| 411 | 75 |
| 414 | 98 |
| 423 | 173 |
| 528 | 100 |


# TABLE DES NOMS.


Abel, 37, 200.
Abonné, 124, 144, 150.
Absolonne, 207, 233, 258.
Ancellin, 101.
Antonari, 39.
Appell, 241.
Arago, 138.
Archimède, 16.
Argand, 229.
Bachet, 16, 198.
Balitrand, 5.
Barbarin, 60, 230.
Barisien, 75, 80, 98, 104, 125, 128, 149, 150, 152, 173, 176, 208, 215, 233, 239, 240, 258, 259, 263, 273, 274, 288
Baschwitz, 32, 80, 122, 137, 168, 205.
Bellach, 102.
Bellens, 120, 143, 172, 203, 233, 274.
Beltrami, 135.
Benedetti, 16.
Bergmans, 144.
Bernoulli, 183.
Bertrand (E.), 155.
Bertrand (J.), 272.
Besso, 56, 104.
Bettazi, 230.
Billy (de), 16.
Bierens de Haan, 132.
Björling, 272.
Bloume, 64.
Bobillier, 24.
Bombelli, 16.
Bonnet (Ossian), 18, 272.
Bordage, 32.
Bouquet, 151.
Bouquet de la Grye, 18.
Boutin, 81, 144.
Brasseur, 40.
Brianchon, 251.
Briggs, 16.
Briot, 151.
Brocard, 18, 56, 91, 93, 95, 98, 121, 123, 140, 149, 170, 215, 231, 234.
Bürgi, 16.
Callandreau, 229.
C. (A.), 104, 119, 206, 264.
Camus, 203, 234.
Cantor, 16, 66.
Cardinaal, 92.
Carrara, 219.
Carvallo, 39, 105, 163.
Casey, 17, 33.
Cassanac, 46.
Catalan, 31, 32, 47, 50, 56, 72, 80, 103, 105, 124, 127, 136, 137, 138, 144, 151, 175, 214, 235, 240, 254, 280.
Catania, 97, 119, 143.
Cavalieri, 16.
Cauchy, 48, 200.
Césaro (E.), 23, 70, 177, 186, 205, 215, 217, 240, 241, 257.
Chasles, 64.
Chomé, 40.
Christie, 214.
Codazzi, 272.
Clausen, 137.
Coelingh, 92.

Collette, 258.
Comberousse (de), 47, 134, 230.
Cornu, 18.
Cremona, 101.
De Boer, 92.
Decamps, 55, 96, 98, 143, 172, 173, 263, 254.
de la Gournerie, 271.
Delahaye, 55, 143, 169, 203, 210, 239.
Delannoy, 91.
Delaunay, 36, 163.
Delbœuf, 47, 134.
Delisle, 46.
Delville. 67, 72, 98, 119, 142, 144, 273.
Denys, 53, 67, 96.
Déprez, 24, 26, 28, 31, 52, 54, 67, 70, 72, 96, 104, 118, 119, 121, 124, 143, 152, 172, 173, 176, 201, 206, 231, 233, 251, 252, 274.
Deruyts (J.), 132.
Descartes, 16.
Desargues, 16.
Dessoye, 248.
Droz Farny, 23, 24, 28, 31, 52, 67, 70, 71, 96, 119, 123, 143, 144, 171, 172, 210, 234, 238, 240, 247, 250, 251, 258, 273.
Duhamel, 230, 238.
Dwoling, 17.
Emmerich, 25, 69.
Escher, 92.
Euclide, 17, 117.
Euler, 105.
Falisse (Fr.), 17.
Faye, 18.
Fauquembergue, 48, 70, 144.
Fermat, 16, 65.
Feuerbach, 81.
Fibonacci, 256.
Folie, 132.
Fontené, 116.
Fouret, 217.
François, 143, 203.
Fraipont, 26, 95.
Fretille, 138.
Galilée, 16.
Gauss, 117, 229, 272.
Gelin (E.), 198, 225, 249, 265.
Genty, 101, 211.
Genocchi, 36.
Gergonne, 23, 46, 83.
Gerono, 46, 132.
Ghuys, 94.
Girard, 16.
Giudice, 128.
Gob, 140, 144, 217.
Goedseels, 43.
Goffart, 279.
Gouzy, 32.
Graindorge, 132.
Greenstreet, 96, 124, 128, 151, 173, 233, 235.
Grégoire de St-Vincent, 16.
Guldin, 16.
Haas (C. de), 124, 172, 173, 234.
Halsted, 138.
Hamilton, 65.
Harriot, 16.
Heller, 66.
Helmholtz, 135.
Hermite, 37.
Holzmuller, 167.
Hoppe, 100.
Houël, 229.
Hudde, 16.
Humbert. 195.
Jacobi, 37, 137.
Janssen, 18.
Jamet, 20, 152, 186, 208, 216, 221, 235, 264, 280.
Jerabek, 53, 143.
Joachimescu, 50, 93.
Kahn, 262.
Kapteyn, 92, 132.
Kepler, 16.
Klein (F.), 135.
Kluyver, 92, 106.
Korteweg, 95.
Kummer, 168.
Kunze, 136.
Labenne, 79, 143.
Lagrange, 37, 165.
Lagrange (Ch.), 132.
Laisant, 66, 91, 97, 153, 185, 215, 224, 228.
Lamé, 272.
Lantshere (de), 79.
Langley. 24.
Latars, 138.
Lebon, 67.
Legendre, 47.
Leibniz, 16, 36.
Lembourg, 121.
Lemoine, 29, 32, 34, 47, 81, 90, 103, 136, 158, 224, 251.
Lie, 272.
Lippens, 249.
Listray, 26. 55, 143, 144.
Lobatschefsky, 117, 193.
Locwy, 18.
Longchamps (de), 23, 63, 169, 192.
Lopez, 137.
Lucas (Ed.), 70, 90, 98, 121, 224.
Mackay, 48, 63.
Maclaurin, 276.
M'Cay, 87.
Maleyx, 151.
Mandart, 10, 26, 28, 32, 53, 55, 72, 73, 79, 81, 96, 97, 120, 140, 142, 144, 169, 171, 177, 211, 235, 239, 258.
Mannheim, 40.
Mansion, 18, 39, 40, 47, 75, 92, 121, 134, 136, 140, 228, 249, 272.
Mantel, 92.
Massau, 40, 132.
Matrot, 198.
Maurolycus, 16.
Mennesson, 75, 131.
Metius, 16.
Meurice, 19, 31, 174, 185, 222, 243.
Mister, 139, 140, 235, 247.
Mittag-Leffler, 116.
Molenbroek, 92.
Molk, 116.
Monge, 21, 40.
Morel, 31, 52, 56, 170, 172, 202.
Muller, 66.
Mydorge, 16.
Nagel, 23, 86.
Neil, 16.
Neper, 16.
Neuberg, 6, 17, 21, 28, 29, 32, 66, 76, 78, 81, 92, 93, 103, 115, 120, 131, 132, 136, 137, 152, 169, 176, 187, 190, 206, 208, 210, 211, 215, 216, 222, 233, 235, 246, 248, 258, 264, 275, 276; supp. I.
Neumann, 200.
Newton, 16.
Nicolaïdes, 150.
Noether, 200.
Niyland, 244.
Ocagne (d'), 134.
Osborne, 240.
Ozanam, 185.
Pareira, 92.
Pascal, 16, 145.
Pastore, 230.
Pegrazzi, 248.
Perrier, 18.
Perrin, 185.

Petersen, 101, 280.
Petit-Bois, 264.
Pfaff, 36.
Picard (E.), 199.
Poincaré, 134, 199, 249.
Poinsot, 64.
Poirier, 248.
Pomey, 246.
Poncelet, 42.
Prime (Mad.), 26, 28, 33, 96, 261.
Quint, 124, 172, 173, 203, 233.
Rahusen, 92.
Ramus, 16.
Rebière, 132, 184.
Renshaw, 216.
Retali, 128, 152, 173, 208, 234.
Ribaucour, 270.
Riemann, 135, 199.
Roberval, 16, 163.
Rocquigny (de), 105, 112, 164, 215.
Romanus, 16.
Rouché, 46, 47, 134, 230.
Rouse Ball, 65.
Ruchonnet, 229.
Saint-Venant (de), 229.
Salmon, 130.
Sauvage, 186.
Schaar, 75.
Schering, 135.
Schoner, 16.
Schoute, 24, 56, 92, 132, 171, 215.
Schouten, 92.
Schwarz, 199.
Schwenter, 16.
Servais, 14, 20, 32, 68, 71, 129, 186, 207, 251, 273.
Siebeek, 229.
Simson, 63.
Sluse, 16.
Smeets, 132.
Snellius, 16.
Socoloff, 167.
Sollertinsky, 23, 25, 121, 123, 128, 176, 212, 216, 250, 251, 273.
Steiner, 93.
Stevin, 16.
Stewart, 63.
Strode, 47, 136.
Sturm, 132.
Tacquet, 16.
Tannery (J.), 106, 195.
Tate, 231.
Tesch, 92.
Tebay, 214.
Thiry (Cl.), 64, 238.
Thomae, 229.
Tilly (De) 132, 135, supp. II.
Tisserand, 18.
Torricelli, 16.
Tucker, 28, 152, 156, 238.
Ueberweg, 135.
Uhlig, 136.
Van Aller, 92.
Van Aubel (H.), 102, 216.
Van Ceulen, 16.
Van den Broek, 50.
Van Dorsten, 95, 96.
Van Heuraet, 16.
Van Mourik, 92.
Vassilief, 118.
Verbessem, 273.
Verbiest, 132.
Verdeyen, 211.
Versluys, 92.
Viète, 16.
Vinot, 185.
Vladimirescu, 50, 170, 172, 234, 250, 274.
Vries (de), 92.
Vuibert, 30, 64, 133, 192, 207, 278.
Wallis, 16, 47, 136.
Walton, 168.
Wasteels, 57, 89, 121.
Weierstrass, 116.
Winkler, 37.
Wijthoff, 92.
Wolf, 66.
Xylander, 16.
Zeemann, 92.
Zeller, 198.

# RAYON DE COURBURE

DE

# CERTAINES COURBES PLANES (*)

PAR

**J. NEUBERG,**

Correspondant de l'Académie royale de Belgique.

Plusieurs mathématiciens (**) se sont occupés récemment de la détermination géométrique du centre de courbure des coniques et de quelques autres courbes comprenant les coniques comme cas particulier. Nous allons traiter la même question en faisant usage de considérations cinématiques très simples.

---

(*) Extrait des *Bull. de l'Acad. roy. de Belgique*, 3e sér., t. XXV, n° 4, pp. 374-386, 1893.

(**) Fouret, *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, 14 et 21 avril 1890; *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XX, p. 60. — Godefroy, *Bulletin de la Société mathématique*, t. XXI, p. 20; *Nouvelles Annales de mathématiques*, 3e série, t. XII, p. 85; *Journal de l'École polytechnique*, LXIIe cahier. — Jamet, *Annales de l'École normale supérieure*, 3e série, t. IV, suppl., p 19. — Mannheim, *Bulletin de la Société mathématique*, t. XVIII, p. 155. — De Longchamps et Demoulin, *Association française pour l'avancement des sciences*. Congrès de Marseille, 1891.

Pour plus de clarté, nous rappelons le principe de notre méthode (*).

Soit D une droite qui se déplace d'une manière continue dans un même plan (fig. 1). Prenons sur cette droite le point quelconque A et, par une translation qui rende commune à tous les autres points la vitesse A$a$ du point A, assujettissons celui-ci à décrire sa propre trajectoire.

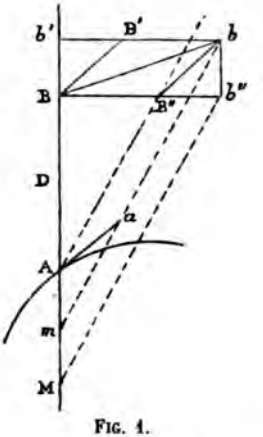



Fig. 1.

Comme la droite change à chaque instant de direction, son mouvement effectif peut s'obtenir en composant la translation empruntée au point A avec une rotation effectuée autour de ce point comme s'il était fixe. La vitesse d'un point quelconque B est donc la résultante B$b$

(*) Voir Lamarle, *Exposé géométrique du calcul différentiel et intégral, précédé de la cinématique du point, de la droite et du plan.* (Mémoires couronnés et autres mémoires publiés par l'Académie royale de Belgique, t. XI et t. XV de la collection in-8°.)

d'une vitesse BB' égale et parallèle à A$a$, et d'une vitesse BB'' perpendiculaire à D; le lieu du point B'' est une droite passant par A. Décomposons la vitesse B$b$ en deux vitesses dirigées, l'une B$b'$ suivant D et dite *vitesse de glissement*, l'autre B$b''$ à angle droit sur la première et dite *vitesse de circulation*. Les vitesses de glissement des différents points de D sont toutes égales et de même sens; comme les droites B''$b$, B''$b''$ sont constantes en grandeur et en direction, les lieux des points $b$, $b''$ sont des droites $mb$, M$b''$, parallèles à AB''. Le point M où la dernière coupe D a une vitesse M$m$ dirigée suivant D; on l'appelle *centre de circulation* : le mouvement effectif de D peut être considéré comme résultant du glissement de la droite sur elle-même, combiné avec une rotation autour de M.

Pour obtenir le centre de circulation, il suffit de connaître les vitesses de deux points de D; car la droite qui joint les extrémités de leurs composantes normales à D, passe par le point cherché. Cette construction est encore applicable lorsqu'on donne les vitesses de deux points qui, assujettis à rester sur la droite D, ont un mouvement propre sur cette droite; car celui-ci n'affecte pas leur vitesse de circulation.

Le centre de circulation décrit une courbe tangente à chaque instant à la droite D.

1. Ces préliminaires étant posés, nous nous occupons d'abord du centre de courbure d'une conique.

Soient O$x$, O$y$ un diamètre d'une parabole et la tangente à son extrémité (fig. 2). La tangente en un point M ayant pour abscisse OP rencontre les axes en des points A, B tels, que AO = OP. Par suite, les points A et P ont sur O$x$ des vitesses égales et de sens contraires; nous les représentons par AO et PO. La vitesse correspondante de M

sur la parabole est MB, et la vitesse de circulation du point A considéré sur la tangente AB est la projection AV de AO sur une perpendiculaire à AB. Le centre de courbure de la parabole au point M est le centre de circulation I

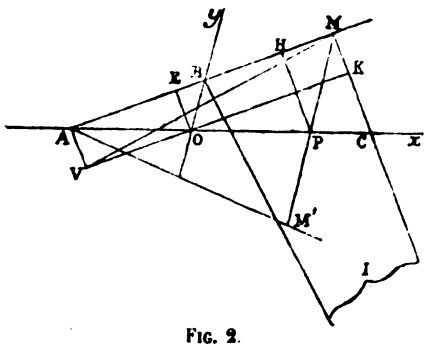



Fig. 2.

de la normale MC. Les droites AB, MC étant constamment perpendiculaires, leurs vitesses angulaires, qui ont respectivement pour expression AV : MA, MB : MI, sont égales; on en conclut

$$\rho = \frac{MA \cdot MB}{h}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$\rho$ désignant le rayon de courbure MI, et $h$ la distance OE du point O à la tangente.

On démontre facilement que BI est perpendiculaire à MV. Si l'on projette O en K sur la normale, les points A, B, K, I sont sur une même circonférence.

2. Soient (fig. 3) A, B les points de rencontre des asymptotes $Ox$, $Oy$ d'une hyperbole avec la tangente au point M, I le centre de courbure en M. Comme $OA = 2OP$, on peut représenter les vitesses des points P, A sur $Ox$

par PO, AO; la vitesse de M sur l'hyperbole sera MB, et la vitesse de circulation du point A, considéré comme appartenant à AB, sera la ligne AV, égale et parallèle à la perpendiculaire EO abaissée de O sur AB. On en conclut la formule (1); de plus, BI est perpendiculaire à MV, l'angle KAI est droit et les points A, B, K, I sont sur une même circonférence, K étant la projection de O sur MC.

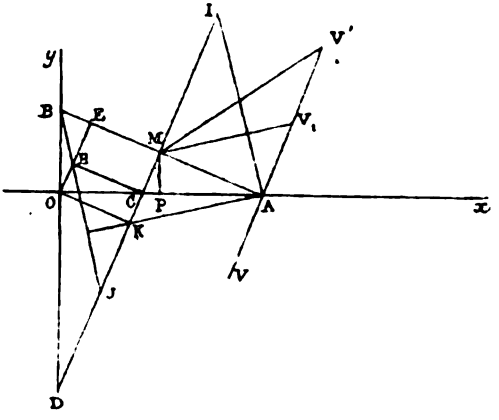



FIG. 3.

3. Soient maintenant A, B les points de rencontre de deux diamètres conjugués d'une conique avec la tangente menée en M, MCD la normale, et J le centre de courbure (fig. 3); soient $x = OP$, $\alpha = OA$ les abscisses des points M, A; on a

$$\alpha x = a'^2,$$

d'où, en différentiant,

$$\frac{d\alpha}{\alpha} = -\frac{dx}{x}.$$

Il en résulte que les vitesses des points P et A sur $Ox$

peuvent être représentées par PO et $Ax = OA$. La vitesse de M sur la conique sera MB, et la vitesse de circulation du point A, considéré comme appartenant à la tangente, sera le segment $AV_1$, égal et parallèle à la perpendiculaire OE abaissée de O sur AB. On en conclut

$$\rho = -\frac{MA \cdot MB}{h}, \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

pourvu qu'on applique la règle des signes, d'une part aux segments MA et MB, d'autre part aux segments parallèles OE, JM.

On voit facilement que BJ est perpendiculaire à $MV_1$ ou à sa parallèle AK; donc J est l'orthocentre du triangle KAB.

Lorsque $Ox$, $Oy$ sont les axes principaux, on a aussi

$$\rho = \frac{MC \cdot MD}{MK}.$$

Voici deux remarques qui se déduisent immédiatement de ce qui précède.

*Il existe une infinité de coniques ayant pour diamètres conjugués* Ox, Oy *et touchant* AB; *le lieu du centre de courbure au point de contact de* AB *est une parabole passant par* A, B, O *et ayant pour axe la perpendiculaire menée au milieu de* AB.

*Une ellipse et une hyperbole homofocales se coupent au point* M : *les rayons de courbure des deux courbes en ce point sont entre eux comme les distances du centre aux normales correspondantes.*

Si $Ox$, $Oy$ sont les axes principaux,

$$OC = \frac{c^2}{a^2} OP;$$

on peut donc représenter les vitesses de C et P sur $Ox$ par CO, PO. Alors MB est la vitesse de M sur la courbe, CH est la vitesse de circulation de C considéré comme point de la normale ; par suite, BH passe au centre de courbure J.

4. La construction trouvée ci-dessus peut être étendue à toutes les courbes dans lesquelles les abscisses $OP = x$, $OA = \alpha$ d'un point M de la courbe, et du point où la tangente AB rencontre l'axe $Ox$, vérifient une relation de la forme

$$\alpha = px^n,$$

$n$ et $p$ étant des constantes. En effet, cette égalité donne

$$\frac{d\alpha}{\alpha} = n\frac{dx}{x};$$

donc les vitesses des points P, A sur $Ox$ peuvent être représentées par les segments $PO = -x$, $Ax = -n\alpha$. La vitesse de M est alors MB et la vitesse de circulation de A, considéré comme point de la tangente, est $AV' = n.OE$. Le rayon de courbure MJ a pour expression

$$\rho = \frac{MA \cdot MB}{nh},$$

et BJ est perpendiculaire à MV'.

L'égalité $\alpha = px^n$ donne

$$x - \frac{y}{y'} = px^n,$$

ou

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x(1 - px^{n-1})}.$$

Si $n = 1$, l'intégrale de la dernière équation est

$$y^{1-p} = ax,$$

$a$ étant une constante. L'hyperbole rapportée à ses asymptotes, la parabole rapportée à un diamètre et à la tangente correspondante, la développée de la parabole rentrent dans ce cas.

Soit $n \lessgtr 1$ ; l'équation différentielle de la courbe est

$$\frac{dy}{y} = \frac{x^{n-2}dx}{x^{n-1}(1-px^{n-1})} = \frac{1}{n-1}\frac{dz}{z(1-pz)} = \frac{1}{n-1}\left(\frac{dz}{z} + \frac{pdz}{1-pz}\right).$$

$z$ désignant $x^{n-1}$. On en conclut

$$y^{n-1} = a\frac{x^{n-1}}{1-px^{n-1}}, \qquad \text{ou} \qquad x^{1-n} - ay^{1-n} = p,$$

équation de la forme

$$ax^m + by^m = c.$$

Les courbes correspondantes sont appelées *courbes de Lamé*; leur rayon de courbure a pour expression

$$\rho = -\frac{MA \cdot MB}{(m-1)h}.$$

Comme cas particuliers, on peut remarquer les coniques rapportées à deux diamètres conjugués, les paraboles touchant les axes de coordonnées ($m = \frac{1}{2}$), les hyperboles passant par O et ayant pour asymptotes des parallèles aux axes de coordonnées ($m = -1$), la développée de l'ellipse et l'hypocycloïde à quatre rebroussements ($m = \frac{2}{3}$), la *kreuzcurve* ($m = -2$), etc.

5. Supposons que la tangente AB se déplace de manière que $OB = px^n$; on trouve, en raisonnant comme ci-dessus,

$$\rho = \frac{\overline{MB}^2}{nh}.$$

L'équation différentielle de la courbe est

$$y - xy' = px^n,$$

ou

$$\frac{ydx - xdy}{x^2} = px^{n-2}dx.$$

Si $n = 1$, on trouve

$$y = x(a - plx).$$

Si $n \gtrless 1$, la courbe a pour équation

$$y = ax + bx^n,$$

$a$ et $b$ étant des constantes.

6. Soit M $(x, y, z)$ un point quelconque de la *courbe triangulaire symétrique*, représentée par l'équation

$$ax^m + by^m + cz^m = 0;$$

et soient A', B', C' les points où la tangente en M rencontre les côtés BC, CA, AB du triangle de référence (fig. 4).

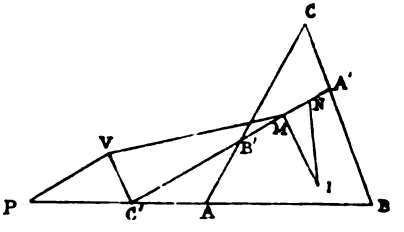



Fig. 4.

Pour trouver le rayon de courbure MI $= \rho$, il suffit de connaître les vitesses simultanées MN $= v$, C'P $= v_1$ de M sur la courbe et de C' sur AB. La vitesse de circulation de C' considéré comme point de la tangente A'B' étant C'V, les triangles MC'V, IMN sont semblables; donc NI est perpendiculaire à MV, et

$$\rho = \frac{v}{v_1} \frac{MC'}{\sin C'},$$

A', B', C' désignant les angles de la tangente avec BC, CA, AB.

La tangente en M ayant pour équation

$$ax^{m-1}X + by^{m-1}Y + cz^{m-1}Z = 0, \quad . \quad . \quad . \quad (A)$$

les coordonnées de C' vérifient l'égalité

$$ax^{m-1}X = -by^{m-1}Y;$$

d'où, par différentiation,

$$(m-1)\left(\frac{dx}{x} - \frac{dy}{y}\right) + \frac{dX}{X} - \frac{dY}{Y} = 0.$$

Les différentielles $dx$, $dy$ sont proportionnelles aux projections de MN sur les coordonnées $x$, $y$ de M (*), et les différentielles $dX$, $dY$ sont proportionnelles aux projections de C'P sur les coordonnées X, Y de C'. Donc les quotients

$$\frac{dx}{x}, \quad \frac{dy}{y}, \quad \frac{dX}{X}, \quad \frac{dY}{Y}$$

sont entre eux comme les quantités

$$\frac{v}{MA'}, \quad \frac{v}{MB'}, \quad \frac{v_1}{C'A}, \quad \frac{v_1}{C'B},$$

et l'on a

$$(m-1)v\left(\frac{1}{MA'} - \frac{1}{MB'}\right) + v_1\left(\frac{1}{C'A} - \frac{1}{C'B}\right) = 0.$$

Cette relation fait connaître le rapport $v : v_1$; on trouve ensuite

$$\rho = \frac{1}{m-1}\,\frac{AB.MA'.MB'.MC'}{B'A'.C'A.C'B\sin C'}.$$

Pour transformer cette expression, désignons par $\alpha$, $\beta$, $\gamma$

(*) Les coordonnées $x$, $y$, $z$ sont les perpendiculaires abaissées de M sur BC, CA, AB.

les perpendiculaires abaissées de A, B, C sur la tangente, par R le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC. Au moyen des relations

$$x = MA' \sin A', \quad y = MB' \sin B', \quad z = MC' \sin C',$$

$$\alpha = C'A \sin C', \quad \beta = C'B \sin C', \quad \gamma = \frac{B'A' \sin A' \sin B'}{\sin C},$$

$$2R = \frac{AB}{\sin C},$$

on obtient cette formule élégante et peut-être nouvelle :

$$\rho = 2R \frac{xyz}{(m-1)\alpha\beta\gamma}.$$

Soient $\rho_1, \rho_2, \rho_3$ les rayons de courbure en M des trois coniques qui touchent A'B' en M, et dont la première est circonscrite au triangle ABC, la seconde inscrite, la troisième conjuguée; ces courbes correspondent aux valeurs $m = -1$, $m = \frac{1}{2}$, $m = 2$. On a

$$\rho_1 = -R\frac{xyz}{\alpha\beta\gamma}, \quad \rho_2 = 4\rho_1, \quad \rho_3 = -2\rho_1;$$

pour la courbe triangulaire d'exposant $m$, on obtient

$$\rho = \frac{2\rho_1}{1-m},$$

formule de M. Jamet (*loc. cit.*, p. 19).

La formule précédente est également applicable aux *courbes anharmoniques* représentées par l'équation

$$x^p y^q z^r = \text{const.},$$

où $p + q + r = 0$; car l'équation de la tangente,

$$\frac{pX}{x} + \frac{qY}{y} + \frac{rZ}{z} = 0,$$

rentre dans l'équation (A) pour $m = 0$.

Si deux des exposants $p$, $q$, $r$ sont égaux, on a le théorème suivant :

*Une conique est tangente à une droite donnée* m *au point* M *et touche deux côtés du triangle* ABC *aux extrémités du troisième côté : son rayon de courbure en* M *est double du rayon de courbure en* M *de la conique circonscrite au triangle* ABC *et touchant* m *en* M.

7. Soient $MO = r$, $MP = u$ les distances d'un point M d'une courbe à un point fixe O et à une droite fixe $PQ$ (fig. 5). Supposons que l'on ait

$$r = pu^n,$$

$p$ et $n$ étant des constantes. Cette équation donne

$$\frac{dr}{r} = \frac{ndu}{u}.$$

Menons $Ox$ perpendiculaire à QP. Les vitesses de glissement de M sur le rayon vecteur MO et sur une parallèle à $Ox$ peuvent être représentées par $MO = r$ et $ME = \frac{u}{n}$. La règle du quadrilatère des vitesses donne pour la vitesse de M sur sa trajectoire le segment MT, les angles MOT et TEM étant droits.

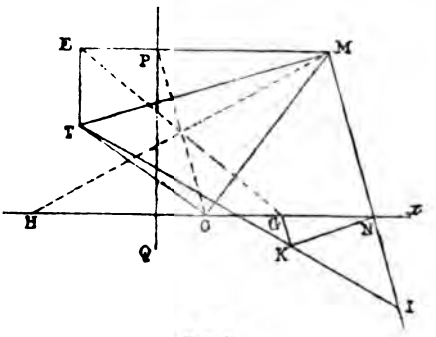



Fig. 5.

Menons la normale MN. Le quadrilatère MOTE étant inscriptible, on voit facilement que les triangles OME, NOM sont équiangles; on en déduit

$$\overline{OM}^2 = ON \cdot ME, \qquad \text{ou} \qquad r^2 = \frac{\alpha u}{n}.$$

$\alpha$ désignant ON. Par différentiation on obtient

$$2\frac{dr}{r} = \frac{du}{u} + \frac{d\alpha}{\alpha}.$$

Les différentielles $dr$, $du$, $d\alpha$ sont proportionnelles aux vitesses de M sur MO, de M sur MP et de N sur $Ox$. Pour la première vitesse, nous avons déjà pris $MO = r$, et pour la seconde $ME = \frac{u}{n}$; nous en concluons que la troisième est égale à $\alpha\left(2 - \frac{1}{n}\right)$. Soit NG la vitesse de N (*); si la vitesse de circulation du point N considéré comme appartenant à la normale est NK, la droite TK rencontre MN au centre de courbure.

---

(*) On porte OH = NO et l'on tire les droites MH, PO qui se coupent en L; la droite EL rencontre $Ox$ en G.

---

Bruxelles. — Imprimerie de F. Hayez, rue de Louvain, 112.

# ESSAI

DE

# GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE GÉNÉRALE,

**par le colonel J. DE TILLY,**

MEMBRE DE L'ACADÉMIE.

---

Présenté à la Classe des sciences dans la séance du 10 mai 1892)

---

( Extrait du tome XLVII des *Mémoires couronnés et autres Mémoires* publiés par l'Académie royale de Belgique. — 1892.)

# ESSAI

DE

# GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE GÉNÉRALE.

1. Il y a deux manières d'exposer la géométrie.

Dans l'une, à l'usage de l'enseignement élémentaire, on s'appuie, au début, sur un certain nombre de données expérimentales, et alors on peut ne supposer chez le lecteur ou l'élève que des connaissances analytiques très bornées.

L'autre exposition, pour laquelle il existe de nombreux documents, mais qui n'a jamais été faite, je pense, d'une manière complète et absolument concluante, est plus scientifique : elle s'appuie sur une connaissance approfondie des ressources de l'analyse et établit toutes les formules de la géométrie dans un sens purement abstrait et absolument *rigoureux*, sans rien emprunter à l'expérience, laquelle n'intervient (avec le caractère d'*approximation* qui lui est propre) qu'au moment où l'on veut passer aux applications pratiques.

2. L'objet principal de la géométrie est la recherche des relations entre les intervalles des couples de points situés dans l'espace. Toutes les formules, tous les théorèmes de la géométrie peuvent se réduire, en effet, à des relations entre ces intervalles, parce que les autres idées qui y figurent en apparence ne sont que conventionnelles, tandis que l'intervalle entre deux points est une idée absolue et irréductible.

**3.** J'en ai déjà donné, dans un de mes ouvrages (*), un exemple assez frappant, que je vais reproduire.

*Théorème.* La somme des trois angles d'un triangle rectiligne est égale à deux angles droits.

*Traduction en intervalles.* Étant données, entre les 28 intervalles (12), .... (78), de 8 points 1, .... 8 de l'espace, les 12 relations (13) = (23), (14) = (24), (15) = (25), (16) = (26), (17) = (27), (18) = (28), (34) = (45), (35) = 2 (34), (36) = (37) = (48), (46) = (47) = (58), on aura nécessairement la treizième relation : (34) = (68), ou bien (34) = (78).

**4.** Prenons encore un autre exemple :

*Formule :* $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$.

*Traduction en intervalles.* Étant données, entre les 10 intervalles (12), .... (45), de 5 points de l'espace, les 2 relations :

(14) + (24) = (12), (15) + (35) = (13), on aura nécessairement la troisième relation :

$$\frac{(12)^2 + (13)^2 - (23)^2}{(12)(13)} = \frac{(14)^2 + (15)^2 - (45)^2}{(14)(15)}.$$

**5.** Le dernier exemple montre, plus clairement encore que le premier, que l'idée d'angle est purement conventionnelle. Il en est de même des idées d'aire et de volume. En effet, de même que la longueur d'une ligne est l'intégrale d'un intervalle élémentaire, l'aire est l'intégrale d'un triangle et le volume l'intégrale d'un tétraèdre. Or, l'aire du triangle et le volume du tétraèdre s'expriment en fonction de simples intervalles, et leur mesure peut leur servir de définition.

(*) *Essai sur les principes fondamentaux de la géométrie et de la mécanique*, p. 72. On a introduit 8 points au lieu de 7, pour éviter une objection qui ne portait pas sur le fond de l'idée, et que le lecteur trouvera aisément en comparant les deux énoncés.

**6.** Mais il faut maintenant reprendre les choses de plus loin, en nous plaçant au seuil de la géométrie.

Cette science n'étant que celle des intervalles, et l'intervalle lui-même n'étant, *a priori*, qu'un nombre caractérisant un couple de points, on peut imaginer d'abord un système de géométrie dans lequel tous les intervalles seraient arbitraires.

Prenons, par exemple, 1 000 points dans l'espace, lesquels auront entre eux 499 500 intervalles. Puis, choisissons 499 500 nombres au hasard, et attribuons l'un de ces nombres à chacun des intervalles. Imaginons ensuite que l'imposition d'un nombre à chaque intervalle soit continuée, sinon pour tous les points de l'espace, du moins pour tous ceux que l'on aura à considérer spécialement dans le cours d'une opération déterminée. On aurait ainsi un système complet de géométrie. Mais ce serait une géométrie rudimentaire, se réduisant à un catalogue des intervalles des points de l'espace et sans relations possibles entre ces intervalles, puisque ceux-ci ont été choisis au hasard.

**7.** Si l'on veut qu'il existe une géométrie, dans le sens ordinaire de ce mot, c'est-à-dire une géométrie comprenant des relations, des formules entre les intervalles, il faut donc se poser le problème suivant :

*Choisir les nombres correspondant aux intervalles des couples de points de l'espace, non plus d'une façon tout à fait arbitraire, mais de manière qu'il puisse exister entre ces nombres des relations générales, d'ailleurs quelconques.*

Et si le problème ainsi posé, sans introduction d'aucune condition supplémentaire, sans aucun appel à l'expérience, conduisait à une solution déterminée, dans laquelle il ne resterait plus ensuite qu'à fixer la valeur d'une constante pour retrouver les formules connues de la géométrie, il me semble que la philosophie des sciences mathématiques aurait fait un pas décisif.

C'est ce que je vais essayer de réaliser dans la mesure de mes

forces et en signalant ce qui laisse encore à désirer au point de vue purement analytique.

8. Le point de départ est donc celui-ci : si nous voulons qu'il existe une géométrie théorique, nous devons admettre qu'on ne puisse pas augmenter indéfiniment le nombre des points choisis dans l'espace, en laissant *tous* les intervalles arbitraires ; on devra donc s'arrêter à un nombre $n$ de points, à partir duquel il existera au moins une relation entre les $\frac{n(n-1)}{2}$ intervalles correspondants.

De plus, si l'on veut que les formules de la géométrie soient non pas *locales* (*), mais applicables à l'espace tout entier, il faudra, non seulement que le nombre $n$ soit le même dans tout l'espace, mais encore que la relation ou les relations entre les $\frac{n(n-1)}{2}$ intervalles soient aussi les mêmes.

9. Lorsque le nombre de points à partir duquel les intervalles ne sont plus tous arbitraires, est égal à $n$, on dit que la géométrie est de la $n-2^{e}$ espèce (**), ou à $n-2$ dimensions.

Étant admis que dans cette géométrie les $\frac{n(n-1)}{2}$ intervalles de $n$ points ne sont pas tous arbitraires, on peut se demander combien de relations il existe entre eux. D'abord, on ne peut en admettre plus de $n-1$, car si l'on supposait qu'il en existât $n$, distinctes et non contradictoires, on pourrait, entre elles, éliminer les $n-1$ intervalles de l'un des points à tous les autres, et il resterait *une* équation entre les intervalles de ces $n-1$ autres points. La géométrie considérée ne serait donc en réalité qu'à $n-3$ dimensions.

(*) Un exemple de formules locales serait donné, dans la géométrie à trois dimensions, par les formules applicables seulement aux points d'une surface ou d'une ligne; mais on peut évidemment les concevoir autrement, et on les étudierait comme nous allons le faire pour l'espace tout entier, en ayant soin de ne choisir que les points répondant à ces formules locales.

(**) Il est tout naturel qu'il faille déduire 2 unités, car un seul point ne donne pas d'intervalle, et 2 points ou un seul intervalle ne donnent pas de relation. Il en faut donc au moins 3 pour constituer la *première* espèce de géométrie, donc $n$ pour la $n-2^{e}$ espèce.

**10. Mais je dis, de plus, que le nombre des relations ne peut surpasser l'unité.**

En effet, considérons d'abord trois points, dans l'espace à $n - 2$ dimensions dont il s'agit.

Si, entre leurs trois intervalles, il existait deux relations, il s'ensuivrait qu'un de ces intervalles déterminerait les deux autres. Ainsi, étant donnés deux points A et B, l'intervalle AC serait déterminé d'avance, quel que fût le troisième point C que l'on choisirait, et puisque nous voulons que les formules soient les mêmes dans tout l'espace, on en conclut immédiatement qu'à tous les couples de points de l'espace correspondrait un seul et même intervalle (*). Nous ne dirons pas que cela est impossible; car cela ne l'est pas, analytiquement parlant, et nous ne voulons rien emprunter à l'expérience. Nous dirons seulement que ce système de géométrie est à prendre ou à laisser, et nous écarterons cette solution insignifiante, pour continuer la recherche des autres solutions du problème.

Ainsi donc, entre nos trois intervalles, il ne peut exister deux relations.

S'il en existe une seule, nous sommes dans les termes de l'énoncé : on a alors $n = 3$, et la géométrie est à une seule dimension.

S'il n'en existe pas, il est acquis que nous pouvons fixer arbitrairement les trois intervalles entre trois points (**).

Considérons alors un système de quatre points. Les trois premiers (1, 2, 3) peuvent être pris au hasard quant à leurs intervalles. Le système (1, 2, 4) peut aussi être pris arbitrairement, c'est-à-dire que les intervalles (12), (13), (14), (23), (24) peuvent être pris arbitrairement, d'après ce qui précède. Alors (34) est déterminé ou ne l'est pas.

(*) Il en serait ainsi, tout au moins, si les relations existantes ne donnaient qu'une seule valeur pour l'intervalle calculé, et l'on voit aisément ce qui arriverait dans le cas des valeurs multiples.

(**) Au moins dans de certaines limites. On veut dire que deux d'entre eux ne déterminent pas le troisième, mais lui laissent encore une infinité de valeurs possibles, formant suite continue. Cette observation se reproduira plus loin.

Dans le premier cas, nous retrouvons notre énoncé. Il existe une seule relation entre les 6 intervalles des 4 points, et $n = 4$.

Dans le second cas, il est acquis que les 6 intervalles de 4 points peuvent être pris arbitrairement.

Dès lors, considérons 5 points : 1, 2, 3, 4, 5. Le système (1,2,3,4) est arbitraire. Il en est de même du système (1,2,3,5). Donc les intervalles (12), (13), (14), (15), (23), (24), (25), (34), (35), peuvent être choisis au hasard, et il ne reste à fixer que (45).

Continuant ainsi de proche en proche, on verra clairement que si la géométrie considérée est d'ordre $n-2$, mais irréductible à un ordre moindre, il n'existe entre les $\frac{n(n-1)}{2}$ intervalles de $n$ points qu'une seule relation analytique, nécessairement symétrique par rapport aux intervalles.

**11.** C'est cette relation dont il faut chercher la forme, d'après la seule condition qu'elle puisse exister sans contradiction pour *tous* les groupes de $n$ points dont on peut remplir l'espace.

Les géométries à une et à deux dimensions étant comprises dans la géométrie à trois dimensions (comme on le sait et comme on le verra ci-après), et la géométrie à plus de trois dimensions n'ayant aucune application en dehors de l'analyse pure, nous prendrons *comme exemple,* dans ce qui va suivre, la géométrie à trois dimensions, c'est-à-dire que nous supposerons $n - 2 = 3$, d'où $n = 5$, et nous aurons à considérer la relation entre les 10 intervalles de 5 points.

**12.** Représentons provisoirement cette relation par

$$\psi\,[(12), \ldots (45)] = 0,$$

ou, pour abréger, par

$$(12345) = 0.$$

Les 10 intervalles de ces 5 points étant connus, cherchons à y ajouter un sixième point et à déterminer les 5 intervalles supplémentaires (16),... (56). On peut choisir au hasard trois intervalles tels que (16), (26), (36), mais alors (46) et (56) ne sont plus arbitraires, car ils doivent satisfaire respectivement aux

relations

$$\left.\begin{aligned}(12346) &= 0,\\ (12356) &= 0.\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (1)$$

Ces deux relations, ainsi que la relation

$$(12345) = 0,$$

sont donc analytiquement réalisables pour un système de 6 points, même avec une forme arbitraire de $\psi$; mais comme on veut que la relation $\psi$ soit vérifiée dans *tout* système de 5 points, on devra avoir en outre :

$$\left.\begin{aligned}(12456) &= 0\\ (13456) &= 0\\ (23456) &= 0\end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

Ainsi donc les équations (2) doivent être des conséquences directes et purement analytiques des équations (1). Par exemple, la première des trois équations (2) doit être le résultat immédiat de l'élimination des intervalles (13) et (23) entre les équations (1), cette élimination faisant disparaître en même temps les intervalles (34), (35) et (36). Toute forme $\psi$, qui ne satisfait pas à cette condition purement analytique, est impossible, comme représentation géométrique d'un système de cinq points.

Nous énoncerons cette condition sous la forme suivante : « Si, dans un système de six points, trois des six équations comprenant chacune dix des quinze intervalles, sont vérifiées, les trois autres doivent l'être aussi », et nous l'appellerons *la condition des six points*.

**13.** Nous allons démontrer maintenant que cette condition imposée à la forme $\psi$ et qui est *nécessaire* pour l'existence d'un système de géométrie, est aussi *suffisante*, c'est-à-dire qu'elle permet l'existence d'une relation semblable à $\psi$, non seulement pour les six groupes de cinq points que l'on peut former dans un système de six points, mais pour tous les groupes de cinq points que l'on peut former dans un nombre

illimité de points emplissant l'espace. Ce sera donc, dès lors, la véritable condition d'existence d'un système de géométrie.

Supposons que la relation $\psi$ soit vérifiée pour tous les groupes de 5 points d'un système de $n$ points, et démontrons que l'adjonction d'un $n+1^{e}$ point n'empêchera pas de déterminer tous les intervalles de manière à répondre à la même condition.

Soient A, B, C, 1, 2,... $(n-3)$, les $n$ points donnés.

Prenons au hasard les intervalles du nouveau point $(n-2)$ aux points A, B, C; puis déterminons les intervalles

$$[1\,(n-2)],\quad [2\,(n-2)],\quad \ldots\ldots$$

par les relations

$$\left.\begin{aligned} [\mathrm{ABC1}\,(n-2)] &= 0,\\ [\mathrm{ABC2}\,(n-2)] &= 0,\\ &\vdots\\ [\mathrm{ABC}\,(n-3)\,(n-2)] &= 0. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

Il faut démontrer que l'on aura nécessairement :

$$[pqrs\,(n-2)] = 0,$$

$p$, $q$, $r$, $s$ étant des nombres quelconques pris dans la suite 1, 2,... $(n-3)$, ou bien des lettres prises parmi A, B ou C.

Pour cela, considérons d'abord le système de 6 points

$$\mathrm{A},\ \mathrm{B},\ \mathrm{C},\ p,\ q,\ n-2.$$

On a, dans ce système :

$$(\mathrm{ABC}pq) = 0 \text{ (puisque ce sont des points du système primitif),}$$

$$\left.\begin{aligned} [\mathrm{ABC}p\,(n-2)] &= 0,\\ [\mathrm{ABC}q\,(n-2)] &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ [d'après les équations (3)];}$$

donc, en vertu de la condition des six points :

$$[\mathrm{AB}pq\,(n-2)] = 0, \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

et par une démonstration identique :

$$\left.\begin{aligned}[\mathrm{AB}pr\,(n-2)] &= 0,\\ [\mathrm{AB}qr\,(n-2)] &= 0.\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Dans le système de 6 points A, B, $p$, $q$, $r$, $n-2$, on a donc aussi trois relations vérifiées (4 et 5), donc, toujours par la même condition, on a :

$$[\mathrm{A}pqr\,(n-2)] = 0, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

et par une démonstration identique :

$$\left.\begin{aligned}[\mathrm{A}pqs\,(n-2)] &= 0,\\ [\mathrm{A}prs\,(n-2)] &= 0,\\ [\mathrm{A}qrs\,(n-2)] &= 0.\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Il en résulte que dans le système de 6 points A, $p$, $q$, $r$, $s$, $n-2$, trois relations et même quatre (6 et 7) sont vérifiées, donc les autres le sont aussi, et en particulier

$$[pqrs\,(n-2)] = 0,$$

ce qu'il fallait démontrer. La démonstration aurait été plus simple encore s'il avait fallu conserver une ou deux des lettres A, B, C.

La forme $\psi$ qui répond à la condition des six points est donc complètement propre à la représentation d'un système de géométrie.

**14.** Il reste à découvrir cette forme $\psi$, telle que les équations

$$\psi\,[(12)\,(13)\,(14)\,(15)\,(23)\,(24)\,(25)\,(34)\,(35)\,(45)] = 0,$$

$$\psi\,[(12)\,(13)\,(14)\,(16)\,(23)\,(24)\,(26)\,(34)\,(36)\,(46)] = 0,$$

$$\psi\,[(12)\,(13)\,(15)\,(16)\,(23)\,(25)\,(26)\,(35)\,(36)\,(56)] = 0,$$

entrainent nécessairement l'existence de ces trois autres équa-

tions :

$$\psi[(12)(14)(15)(16)(24)(25)(26)(45)(46)(56)] = 0,$$
$$\psi[(13)(14)(15)(16)(34)(35)(36)(45)(46)(56)] = 0,$$
$$\psi[(23)(24)(25)(26)(34)(35)(36)(45)(46)(56)] = 0.$$

Deux formes $\psi$ satisfont à cette condition (pour les points 1, 2, 3, 4, 5). Ce sont les suivantes :

$$1^\circ : (12345) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \varphi(12) & \varphi(13) & \varphi(14) & \varphi(15) \\ 1 & \varphi(12) & 0 & \varphi(23) & \varphi(24) & \varphi(25) \\ 1 & \varphi(13) & \varphi(23) & 0 & \varphi(34) & \varphi(35) \\ 1 & \varphi(14) & \varphi(24) & \varphi(34) & 0 & \varphi(45) \\ 1 & \varphi(15) & \varphi(25) & \varphi(35) & \varphi(45) & 0 \end{vmatrix} = 0. \quad (8)\ (*)$$

$$2^\circ : (12345) = \begin{vmatrix} 1 & \varphi(12) & \varphi(13) & \varphi(14) & \varphi(15) \\ \varphi(12) & 1 & \varphi(23) & \varphi(24) & \varphi(25) \\ \varphi(13) & \varphi(23) & 1 & \varphi(34) & \varphi(35) \\ \varphi(14) & \varphi(24) & \varphi(34) & 1 & \varphi(45) \\ \varphi(15) & \varphi(25) & \varphi(35) & \varphi(45) & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (9)\ (**)$$

Ces déterminants diffèrent de ceux de MM. Cayley, Schering et Mansion par l'introduction de la forme arbitraire $\varphi$. Il est évident, en effet, que si l'une de ces expressions vérifie la condition des six points pour une certaine forme de $\varphi$, elle la vérifiera aussi pour toute autre forme de $\varphi$.

Le premier déterminant peut se déduire du second, moyennant une hypothèse particulière sur la forme $\varphi$ et un passage

(*) Cayley, *The collected mathematical papers*, t. I, art. 1; *Journal de Cambridge*, t. II. — Lagrange, *Mémoires de l'Académie des sciences de Berlin*, 1773 (*Sur les pyramides*); *OEuvres complètes*, t. III, p. 659. — Carnot, *Mémoire sur la relation qui existe entre les distances respectives de cinq points...* — Rouché et de Comberousse, *Traité de Géométrie*, 6e édition, 2e partie, Note I.

(**) Schering, *Nachrichten v. d. k. Gesellschaft d. Wissensch.*, Göttingen, 1870, Juli 13, p. 311; 1873, n° 2, p. 13; 1873, n° 6, p. 149. — Mansion, *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, t. XIII, 1888-1889, 1re p., p. 57; t. XV, 1890-1891, 1re p., p. 8; t. XVI, 1891-1892, 1re p., p. 51.

à la limite, mais ici nous considérerons les deux solutions comme distinctes.

**15.** Il est assez facile de démontrer que ces deux formes analytiques vérifient la condition des six points (*); mais la réciproque peut être plus difficile, et il reste ici, dans la géométrie analytique générale, une lacune qu'il ne faut pas dissimuler.

On pourrait soutenir qu'en dehors des deux formes trouvées, il en existerait une troisième, distincte des deux autres, vérifiant également la condition des six points, et par conséquent capable d'exprimer la relation entre les 10 intervalles de 5 points de l'espace.

En attendant que cette question soit complètement résolue par l'analyse pure, nous montrerons plus loin que la découverte d'une nouvelle fonction, si elle était possible, ne conduirait pas à un nouveau système de géométrie, distinct de ceux qui résultent des deux fonctions déjà trouvées (**).

**16.** *Système géométrique ou analytique d'intervalles.* Nous avons vu, au n° 6, comment on pourrait imaginer un système idéal d'intervalles, sans relations entre eux. Lorsque les intervalles satisfont, au contraire, à l'une des relations du n° 14, nous dirons qu'ils constituent un système géométrique. Il est facile de former, d'une infinité de manières, un pareil système, comme nous l'avons déjà vu (n° 13). Je dis d'une infinité de manières, non seulement parce que la forme $\varphi$ est arbitraire dans les relations (8) et (9), mais aussi parce que, pour chaque point que l'on ajoute au système, on peut prendre arbitrairement trois intervalles.

**17.** Nous allons maintenant étudier les propriétés des systèmes géométriques en prenant *comme exemple* celui des deux déterminants qui donne lieu aux calculs les plus simples; mais tout ce qui se fera pour celui-là pourra se répéter sur l'autre, ainsi que cela sera indiqué sommairement.

(*) Voir la Note II, due à M. Mansion.
(**) Voir la Note IV.

**18.** *Système de coordonnées.* Pour faire cette étude, il convient, conformément au titre de ce mémoire, d'introduire des coordonnées, destinées à simplifier les calculs, à les rendre symétriques et à les rapprocher de ceux de la géométrie analytique usuelle.

Tout le monde a dû se dire, en lisant un traité de géométrie analytique, que les calculs de cette science pourraient bien remplacer avantageusement certains raisonnements de la géométrie ordinaire, et peut-être supprimer des postulatums.

Malheureusement, le point de départ, c'est-à-dire la définition même des coordonnées et l'équation de la droite, s'appuyait sur la géométrie ordinaire, et il y avait donc cercle vicieux. La relation analytique (8), indépendante de l'expérience, que nous possédons entre les intervalles des points, va nous permettre d'arriver aux équations de la ligne droite, du plan, etc., et par suite de pousser jusqu'au bout la géométrie analytique, avec des coordonnées définies autrement que celles de la géométrie analytique ordinaire, mais qui, au fond, seront les mêmes.

**19.** Considérons les deux points 1 et 2, et rapportons-les à trois autres points de l'espace A, B, C, dont les intervalles sont AB, AC, BC.

A cet effet, adoptons d'abord comme coordonnées de A les quantités $x_a$, $y_a$, 0; de B, $x_b$, $y_b$, 0; de C, $x_c$, $y_c$, 0; les six quantités $x_a$, ... $y_c$ satisfaisant aux trois équations

$$\left.\begin{aligned}(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2 &= \varphi(AB),\\ (x_a - x_c)^2 + (y_a - y_c)^2 &= \varphi(AC),\\ (x_b - x_c)^2 + (y_b - y_c)^2 &= \varphi(BC).\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \quad (10)$$

Ces équations ne contiennent, en réalité, que quatre inconnues distinctes, c'est-à-dire les quatre différences figurant dans les deux premières équations.

Si l'on se donne au hasard l'une de ces différences, on calcule facilement les trois autres. Il y a plusieurs solutions, mais on choisira arbitrairement l'une d'entre elles. Ensuite, on pourra encore se donner arbitrairement deux des six coordon-

nées, comprenant l'un des $x$ et l'un des $y$. Les quatre autres coordonnées se trouveront déterminées. Ces coordonnées peuvent, pour le moment, être réelles ou imaginaires.

Ceci posé, définissons les coordonnées $x_1, y_1, z_1$ du point 1 par les équations

$$\left.\begin{aligned}(x_1 - x_a)^2 + (y_1 - y_a)^2 + z_1^2 &= \rho(1A),\\ (x_1 - x_b)^2 + (y_1 - y_b)^2 + z_1^2 &= \rho(1B),\\ (x_1 - x_c)^2 + (y_1 - y_c)^2 + z_1^2 &= \rho(1C).\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (11)$$

Ces équations détermineront sans ambiguïté $x_1$ et $y_1$ ; mais $z_1$ aura deux valeurs égales et de signes contraires.

On pourra, en ce moment, conserver le double signe ; nous expliquerons plus loin comment le choix devra se faire. De même, les coordonnées $x_2$, $y_2$, $z_2$ du point 2 répondront aux équations

$$\left.\begin{aligned}(x_2 - x_a)^2 + (y_2 - y_a)^2 + z_2^2 &= \rho(2A),\\ (x_2 - x_b)^2 + (y_2 - y_b)^2 + z_2^2 &= \rho(2B),\\ (x_2 - x_c)^2 + (y_2 - y_c)^2 + z_2^2 &= \rho(2C).\end{aligned}\right\} \quad . \quad (12)$$

**20.** D'un autre côté, les cinq points 1, 2, A, B, C, donnent la relation :

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \rho(12) & \rho(1A) & \rho(1B) & \rho(1C) \\ 1 & \rho(12) & 0 & \rho(2A) & \rho(2B) & \rho(2C) \\ 1 & \rho(1A) & \rho(2A) & 0 & \rho(AB) & \rho(AC) \\ 1 & \rho(1B) & \rho(2B) & \rho(AB) & 0 & \rho(BC) \\ 1 & \rho(1C) & \rho(2C) & \rho(AC) & \rho(BC) & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad . \quad (13)$$

Si, entre les dix équations (10), (11), (12) et (13), on élimine les neuf quantités (AB), (AC), (BC), (1A), (1B), (1C), (2A), (2B), (2C), il restera la valeur de $\rho(12)$ en fonction des coordonnées $x_1, y_1, z_1$, $x_2, y_2, z_2$, et peut être aussi de $x_a, x_b, x_c, y_a, y_b, y_c$, car il n'est pas tout à fait évident, *a priori*, que ces quantités disparaissent par l'élimination.

Mais cette élimination est très facile à exécuter, car si, dans (13), on remplace tous les $\varphi$, autres que $\rho(12)$, par leurs

valeurs tirées de (10), (11) et (12), il vient :

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \varphi(12) \\ 1 & \varphi(12) & 0 \\ 1 & (x_1-x_a)^2+(y_1-y_a)^2+z_1^2 & (x_2-x_a)^2+(y_2-y_a)^2+z_2^2 \\ 1 & (x_1-x_b)^2+(y_1-y_b)^2+z_1^2 & (x_2-x_b)^2+(y_2-y_b)^2+z_2^2 \\ 1 & (x_1-x_c)^2+(y_1-y_c)^2+z_1^2 & (x_2-x_c)^2+(y_2-y_c)^2+z_2^2 \end{vmatrix} = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

équation dans laquelle $\varphi(12)$ est la seule inconnue.

**21.** Or, je dis qu'une première solution est donnée par l'équation

$$\varphi(12) = (x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2 \quad . \quad . \quad (15)$$

En effet, si l'on remplace $\varphi(12)$ par cette valeur, l'équation (14) devient une identité, parce que son premier membre est alors le produit des deux déterminants :

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_1^2+y_1^2+z_1^2 & x_1 & y_1 & z_1 & 0 \\ 1 & x_2^2+y_2^2+z_2^2 & x_2 & y_2 & z_2 & 0 \\ 1 & x_a^2+y_a^2 & x_a & y_a & 0 & 0 \\ 1 & x_b^2+y_b^2 & x_b & y_b & 0 & 0 \\ 1 & x_c^2+y_c^2 & x_c & y_c & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

et

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_1^2+y_1^2+z_1^2 & 1 & -2x_1 & -2y_1 & -2z_1 & 0 \\ x_2^2+y_2^2+z_2^2 & 1 & -2x_2 & -2y_2 & -2z_2 & 0 \\ x_a^2+y_a^2 & 1 & -2x_a & -2y_a & 0 & 0 \\ x_b^2+y_b^2 & 1 & -2x_b & -2y_b & 0 & 0 \\ x_c^2+y_c^2 & 1 & -2x_c & -2y_c & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

lesquels sont nuls l'un et l'autre, puisqu'ils renferment une colonne à éléments nuls.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ r_a^2 - x_a)^2 + (y_1 - y_a)^2 + z_1^2 & (x_1 - x_b)^2 + (y_1 - y_b)^2 + z_1^2 & (x_1 - x_c)^2 + (y_1 - y_c)^2 + z_1^2 \\ r_2^2 - x_a)^2 + (y_2 - y_a)^2 + z_2^2 & (x_2 - x_b)^2 + (y_2 - y_b)^2 + z_2^2 & (x_2 - x_c)^2 + (y_2 - y_c)^2 + z_2^2 \\ 0 & (x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2 & (x_a - x_c)^2 + (y_a - y_c)^2 \\ (x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2 & 0 & (x_b - x_c)^2 + (y_b - y_c)^2 \\ (x_a - x_c)^2 + (y_a - y_c)^2 & (x_b - x_c)^2 + (y_b - y_c)^2 & 0 \end{vmatrix}$$

**22.** Une seconde solution sera évidemment

$$\varphi(12) = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 + z_2)^2 \quad . \quad . \quad (16)$$

En effet on peut, dans (14), changer $z_1$ en $-z_1$ et $z_2$ en $-z_2$, soit simultanément, soit séparément, sans que l'équation se modifie. On peut donc faire la même chose dans le résultat. Le changement simultané ne donne rien, mais en changeant le signe de l'une des quantités $z_1$ ou $z_2$, on trouve cette seconde expression.

D'un autre côté, l'équation (14) n'est que du second degré en $\varphi$ (12), donc il n'y a pas d'autre solution possible que (15) ou (16), et il en est de même pour deux points quelconques $x_m, y_m, z_m$; $x_n, y_n, z_n$.

N'oublions pas que les signes de $z_1$ et de $z_2$ sont restés douteux.

Nous choisirons celui de $z_1$ arbitrairement, puis ceux de $z_2, z_3, \ldots z_n$, de manière que l'on ait pour tous ces points la formule (15) et non la formule (16), quand on évalue $\varphi$ (12), $\varphi$ (13), ... $\varphi$ ($1n$).

**23.** Il reste à prouver que, pour un autre intervalle quelconque, ne comprenant pas le point 1, par exemple (23), on aura aussi :

$$\varphi(23) = (x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 + (z_2 - z_3)^2,$$

et non pas :

$$\varphi(23) = (x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 + (z_2 + z_3)^2.$$

Pour cela, appliquons la formule (13) aux cinq points

1, 2, 3, A, B. Nous aurons :

$$(17)\quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & (x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1- \\ 1 & (x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2 & 0 \\ 1 & (x_1-x_a)^2+(y_1-y_a)^2+z_1^2 & (x_2-x_a)^2+(y_2-y_a)^2+z_1^2 \\ 1 & (x_1-x_b)^2+(y_1-y_b)^2+z_1^2 & (x_2-x_b)^2+(y_2-y_b)^2+z_1^2 \\ 1 & (x_1-x_3)^2+(y_1-y_3)^2+(z_1-z_3)^2 & \varphi(23) \end{vmatrix}$$

On voit que $\varphi(23) = (x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2+(z_2-z_3)^2$ satisfait à l'équation, comme cela devait être; mais il n'est plus vrai ici que l'on puisse remplacer $z_3$ par $-z_3$; cela ne changerait pas le terme en $z_3^2$, mais bien le terme $(z_1-z_3)^2$. Toutefois, ce n'est là qu'une cause de doute et non une preuve de l'inexactitude du résultat $(x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2+(z_2+z_3)^2$.

Il ne suffirait pas même de prouver que $(x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2+(z_2+z_3)^2$ n'est pas ici la seconde racine algébrique de l'équation. Il faut que, même accidentellement, ou pour certains points, la seconde racine ne puisse pas être numériquement égale à cette quantité, sans quoi le doute subsisterait.

La solution complète de cette difficulté sera donnée dans la Note I, et il en résultera que l'expression

$$\varphi(mn) = (x_m-x_n)^2+(y_m-y_n)^2+(z_m-z_n)^2$$

est toujours exacte et conduit à la valeur de l'intervalle $(mn)$, dans tous les systèmes géométriques répondant au premier déterminant. Il faut remarquer que cette formule est tout à fait générale, parce qu'elle contient, comme cas particuliers, les formules (10), (11) et (12).

**24.** *Ligne droite.* — C'est la ligne, ou la suite de points du système, telle que si l'on en considère trois points, aucun

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ (x_1-x_a)^2+(y_1-y_a)^2+z_1^2 & (x_1-x_b)^2+(y_1-y_b)^2+z_1^2 & (x_1-x_3)^2+(y_1-y_3)^2+(z_1-z_3)^2 \\ (x_2-x_a)^2+(y_2-y_a)^2+z_2^2 & (x_2-x_b)^2+(y_2-y_b)^2+z_2^2 & \varphi(23) \\ 0 & (x_a-x_b)^2+(y_a-y_b)^2 & (x_a-x_3)^2+(y_a-y_3)^2+z_3^2 \\ (x_a-x_b)^2+(y_a-y_b)^2 & 0 & (x_b-x_3)^2+(y_b-y_3)^2+z_3^2 \\ (x_a-x_3)^2+(y_a-y_3)^2+z_3^2 & (x_b-x_3)^2+(y_b-y_3)^2+z_3^2 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

autre point du système ne peut être distant de deux de ces points comme l'est le troisième (*).

Soient $x_1, y_1, z_1$ ; $x_2, y_2, z_2$ les deux points donnés. La ligne dont tous les points répondent, par leurs coordonnées $x, y, z$, aux équations du premier degré

$$\left.\begin{aligned} x - x_1 &= \frac{x_1 - x_2}{z_1 - z_2}(z - z_1), \\ y - y_1 &= \frac{y_1 - y_2}{z_1 - z_2}(z - z_1) \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

sera une ligne droite.

Pour le démontrer, prenons un point quelconque, $x_3, y_3, z_3$, sur cette ligne, et supposons qu'un autre point du système, $x_4, y_4, z_4$, puisse être distant de $x_1, y_1, z_1$ et de $x_2, y_2, z_2$ comme l'est $x_3, y_3, z_3$. On aurait, en même temps que les équations (18), appliquées au point $x_3, y_3, z_3$, les deux autres équations :

$$\left.\begin{aligned} (x_3-x_1)^2+(y_3-y_1)^2+(z_3-z_1)^2 &= (x_4-x_1)^2+(y_4-y_1)^2+(z_4-z_1)^2 \\ (x_3-x_2)^2+(y_3-y_2)^2+(z_3-z_2)^2 &= (x_4-x_2)^2+(y_4-y_2)^2+(z_4-z_2)^2 \end{aligned}\right\} \quad (19)$$

(*) Ceci est la traduction analytique de cet énoncé géométrique basé sur l'idée du mouvement : La droite est la ligne telle que si l'on immobilise deux de ses points, tous les autres sont immobilisés par cela seul.

Or les équations (18) et (19) ne peuvent donner, comme on le vérifie aisément, d'autres solutions réelles que $x_4 = x_3$, $y_4 = y_3$, $z_4 = z_3$, et nous écarterons bientôt (n^os 28 et 29) les coordonnées imaginaires.

Il est facile de voir, au contraire, que si les coordonnées $x_3, y_3, z_3$ ne vérifient pas les équations (18), les équations (19) pourront toujours subsister sans entraîner les conditions $x_3 = x_4$, $y_3 = y_4$, $z_3 = z_4$.

Ainsi les équations (18) représentent bien une ligne droite, et cela dans tous les systèmes correspondant au premier déterminant, quel que soit $\varphi$.

**25.** *Longueur de la ligne droite entre deux points.* — Nous définirons cette longueur comme étant l'intégrale de l'intervalle élémentaire entre deux points, lorsque $z$ varie d'une manière continue, et le calcul nous montrera que cette longueur est déterminée.

On a :

$$\varphi(ds) = dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

ou :

$$\sqrt{\varphi(ds)} = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}.$$

L'intégrale de $\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$ entre $x_1, y_1, z_1$ et $x_2, y_2, z_2$, lorsque les coordonnées restent soumises aux relations (18), est, analytiquement :

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}.$$

On a donc :

$$\left[\int \sqrt{\varphi(ds)}\right]_1^2 = \sqrt{\varphi(12)}.$$

Pour la forme particulière $\varphi x) = kx^2$, il vient

$$[s]_1^2 = (12),$$

c'est-à-dire qu'alors, mais alors seulement, la longueur totale

de la ligne droite coïncide avec l'intervalle entre les deux extrémités, et, par suite, le long d'une pareille ligne, les intervalles s'ajoutent.

Pour toutes les autres formes de $\varphi$, cette propriété n'existerait pas, et c'est là ce qui exclut ces formes et laisse uniquement subsister le déterminant (8), avec $\varphi(x) = kx^2$, ou bien encore, en multipliant la première ligne par $k$ et divisant les cinq dernières colonnes par $k$, on retrouve simplement le déterminant, tel qu'il a été donné par Cayley.

**26.** Si deux des cinq points viennent à coïncider, par exemple 1 avec 2, la valeur de $\varphi(12)$, ou $k(12)^2$, et par conséquent aussi la valeur de (12) devient 0, et l'intervalle entre deux points qui coïncident est nul, propriété qui aurait pu être rangée parmi les conventions préliminaires. On pourrait aussi considérer comme une convention de ne jamais attribuer la valeur 0 à l'intervalle de deux points qui ne coïncident pas. Nous y reviendrons bientôt.

**27.** Mais ici se place une observation très importante et une *troisième* condition à remplir par notre système de géométrie.

Nous en avons, en effet, découvert déjà deux.

L'une, que l'on peut appeler la condition d'*homogénéité*, est remplie par le choix de la fonction $\psi$, exprimant la relation entre les dix intervalles de cinq points quelconques, pris n'importe où. Elle est indispensable pour l'existence d'un système géométrique d'intervalles des points de l'espace.

La seconde, que l'on peut appeler la condition de *mesure*, est remplie par le choix de la fonction $\varphi$, exprimant que le long d'une ligne droite les intervalles s'ajoutent.

Cette condition n'est pas absolue. Si l'on commençait l'étude d'un système de géométrie avec une fonction $\varphi$ quelconque, on s'apercevrait que le long de la ligne droite, ce ne sont pas les intervalles (tels qu'ils ont été primitivement réglés) qui s'ajoutent, mais bien des fonctions de ces intervalles. On

pourrait admettre cette convention, ou bien, si on le voulait, il serait encore temps de corriger la fonction $\varphi$, de manière à remplir la condition de mesure des droites, comme elle est remplie dans la géométrie usuelle.

La troisième condition peut s'appeler la condition de *continuité* géométrique. Elle est encore moins indispensable que la seconde, puisque nous avons réussi à nous en passer jusqu'à présent, mais il importe de la définir nettement (*).

**28.** Nous avons vu au n° 19 que tout point de l'espace (tel que 1) a été déterminé d'abord par les trois intervalles qui le séparent respectivement des points fondamentaux A, B, C. On peut, uniquement pour simplifier, et pour écarter des idées inutiles, supposer que ces trois intervalles, ainsi que les intervalles (AB), (AC), (BC) eux-mêmes, soient des nombres réels.

Mais de là ne résulte pas encore que les coordonnées $x_1, y_1, z_1$, du point 1, soient aussi des nombres réels, même après avoir particularisé la fonction $\varphi$ et admis la forme $\varphi(x) = kx^2$.

La résolution des équations donne à cet effet les conditions suivantes : il faut que, dans chacun des quatre systèmes de trois points que l'on peut former avec les quatre points A, B, C, 1, un intervalle quelconque soit plus petit que la somme des deux autres, et en outre il doit exister, entre les intervalles donnés, une inégalité supplémentaire (**).

Si donc on veut déterminer les points par des coordonnées réelles, il faut limiter le choix arbitraire des intervalles (AB), (AC), (BC), (A1), (B1), (C1), etc., de manière que ces conditions soient remplies.

Réciproquement, si les coordonnées $x_a, y_a$; $x_b, y_b$; $x_c, y_c$; $x_1, y_1, z_1$ sont réelles, il n'y a pas de doute sur la réalité des

(*) On pourrait croire que nous avons déjà supposé la continuité au n° 25, lorsque nous avons cherché la longueur de la ligne droite; mais il ne s'agissait là que de continuité analytique.

La longueur est définie par l'intégrale de $\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$, sans que l'on suppose l'existence géométrique des points; les intervalles s'ajoutent analytiquement pour toutes les valeurs de $x$, $y$, $z$, répondant aux équations; ils s'ajoutent géométriquement là où les points existent.

(**) Voir, à ce sujet, la Note V, due à M. Goedseels.

valeurs des intervalles (1A), (1B), (1C); mais il ne s'ensuit pas encore que le point 1 existe dans l'espace. Puisque tous les intervalles relatifs à A, B, C ont été choisis arbitrairement, rien ne prouve que le groupe (1A, 1B, 1C), calculé au moyen des neuf coordonnées ci-dessus, en fasse partie.

**30.** C'est ici qu'intervient la condition géométrique de continuité. Elle vient restreindre le choix, jusqu'à présent arbitraire, de ces intervalles. Il faut que tout groupe (1A, 1B, 1C) résultant de la substitution dans (11) de valeurs réelles quelconques pour $x_1, y_1, z_1$; en d'autres termes, tout groupe satisfaisant aux conditions du n° 28, existe réellement pour un certain point 1 de l'espace.

De plus, il convient que le groupe (1A, 1B, 1C) ne réponde qu'à un seul point de l'espace. S'il n'en était pas ainsi, deux points 1 et 2 pourraient avoir les mêmes coordonnées, le même intervalle par rapport à un troisième point quelconque, et un intervalle nul entre eux. Cela n'a rien de contradictoire analytiquement, mais il convient d'écarter cette hypothèse, comme contraire à la notion de continuité, afin de pouvoir dire que trois coordonnées réelles quelconques, $x_1, y_1, z_1$, déterminent un et un seul point de l'espace.

Sauf ces restrictions, les intervalles (1A), (1B), (1C); (2A), (2B), (2C); ... peuvent être pris au hasard; tous les autres intervalles en résultent, et la géométrie qui les concerne est la même que la géométrie usuelle (*).

(*) Les intervalles aux points A, B et C pourraient être déterminés, par exemple, par trois séries de surfaces fermées enveloppant ces points, dont chacune envelopperait celle qui précède dans la même série, et sur chacune desquelles l'intervalle au point central serait supposé constant. Ces surfaces, bien que n'étant pas des sphères, seraient construites de manière à se couper dans les mêmes cas que si elles étaient des sphères. Les coordonnées des points et leurs intervalles entre eux s'obtiendraient alors par les équations (11) et (15), et les formules de cette géométrie seraient les mêmes que celles de la géométrie usuelle. On pourrait aussi faire servir le même procédé à la représentation matérielle des deux autres systèmes de géométrie, dont les formules vont suivre.

D'ailleurs, la condition de continuité vient compléter celle de l'homogénéité. En effet, l'homogénéité ne résulte pas uniquement des propriétés de la fonction $\psi$, mais en outre de la propriété de la ligne droite d'être indéfinie en longueur, d'où il résulte que tout intervalle porté sur une certaine droite peut aussi être porté sur toute autre droite.

Enfin il faut remarquer encore qu'en vertu de la formule générale (15) et de ce qui vient d'être dit dans ce n° 29, on ne saurait admettre des coordonnées imaginaires, sans être obligé d'admettre aussi des intervalles imaginaires, ce que nous voulons exclure.

**30.** Tout système de deux équations du premier degré représente une ligne droite.

Par deux points, on peut mener une ligne droite et une seule.

A partir d'un point d'une droite, on peut trouver, sur cette droite, deux points, mais deux seulement, distants du premier d'un intervalle donné, ce qui exclut les bifurcations.

La ligne droite est un espace à une dimension.

**31.** *Plan.* — Le plan est le lieu des points dont les coordonnées satisfont à une équation du premier degré.

Toute droite qui a deux points dans un plan s'y trouve tout entière.

Par deux droites qui se rencontrent, par une droite et un point extérieur, par trois points non en ligne droite, on peut faire passer un plan et un seul.

Le plan peut être engendré tout entier par une droite passant par un point donné et s'appuyant toujours sur une droite donnée.

Le plan est un espace à deux dimensions.

**32.** Étant donnés un point $A(x_1, y_1, z_1)$; une droite $B(x = az + b,\ y = cz + d)$ et un plan C contenant le point A et la droite B, toutes les droites menées par le point A, dans

le plan C, excepté celle qui a pour équations

$$x - x_1 = a(z - z_1),$$
$$y - y_1 = c(z - z_1),$$

rencontrent la droite B. Principe de la parallèle unique.

**33.** Nous nous trouvons maintenant en possession de tous les principes que l'on admet au début de la géométrie, mais qui, dans cette science, ont une origine expérimentale; et nous pouvons continuer sans rencontrer de nouvel obstacle, soit par la méthode analytique, soit par la synthèse des traités de géométrie ordinaires.

**34.** *Étude du second déterminant.* — L'étude du second déterminant peut maintenant se faire en suivant pas à pas les calculs établis ci-dessus pour le premier. Nous en présenterons les résultats avec moins de détails.

Considérons deux points 1 et 2, et rapportons-les à trois autres points de l'espace A, B, C, dont les intervalles sont (AB), (AC), (BC).

A cet effet, adoptons d'abord, comme coordonnées de A, des quantités $x_a$, $y_a$, 0; de B, $x_b$, $y_b$, 0; de C, $x_c$, $y_c$, 0; les six quantités $x_a$, ... $y_c$ satisfaisant aux trois équations

$$\left.\begin{aligned}
\frac{(1 \pm x_a x_b \pm y_a y_b)^2}{(1 \pm x_a^2 \pm y_a^2)(1 \pm x_b^2 \pm y_b^2)} &= \varphi^2(AB),\\
\frac{(1 \pm x_a x_c \pm y_a y_c)^2}{(1 \pm x_a^2 \pm y_a^2)(1 \pm x_c^2 \pm y_c^2)} &= \varphi^2(AC),\\
\frac{(1 \pm x_b x_c \pm y_b y_c)^2}{(1 \pm x_b^2 \pm y_b^2)(1 \pm x_c^2 \pm y_c^2)} &= \varphi^2(BC). \quad (*)
\end{aligned}\right\} \quad (20)$$

(*) Les doubles signes ont pour objet, comme on le comprendra bientôt, d'éviter l'emploi de coordonnées imaginaires. On peut, pour le moment, prendre tous les signes supérieurs, ou tous les signes inférieurs. La distinction sera établie plus loin.

Cela posé, déterminons les coordonnées $x_1, y_1, z_1$, du point 1 par les équations

$$\left.\begin{aligned}
\frac{(1 \pm x_1x_a \pm y_1y_a)^2}{(1 \pm x_1^2 \pm y_1^2 \pm z_1^2)(1 \pm x_a^2 \pm y_a^2)} &= \varphi^2(1A),\\
\frac{(1 \pm x_1x_b \pm y_1y_b)^2}{(1 \pm x_1^2 \pm y_1^2 \pm z_1^2)(1 \pm x_b^2 \pm y_b^2)} &= \varphi^2(1B),\\
\frac{(1 \pm x_1x_c \pm y_1y_c)^2}{(1 \pm x_1^2 \pm y_1^2 \pm z_1^2)(1 \pm x_c^2 \pm y_c^2)} &= \varphi^2(1C).
\end{aligned}\right\} \quad (21)$$

On aura, pour le point 2, trois équations analogues, puis la relation donnée par le déterminant (9). Si, entre ces dix équations, on élimine les neuf quantités (AB), (AC), (BC), (1A), (1B), (1C), (2A), (2B), (2C), on trouvera :

$$\varphi^2(12) = \frac{(1 \pm x_1x_2 \pm y_1y_2 \pm z_1z_2)^2}{(1 \pm x_1^2 \pm y_1^2 \pm z_1^2)(1 \pm x_2^2 \pm y_2^2 \pm z_2^2)}. \quad (22)$$

Toutefois on ne peut plus dire ici, comme au n° 20, que l'élimination soit très facile. On verra, dans la Note III, comment M. Mansion l'a exécutée, par l'introduction de coordonnées auxiliaires.

Il faut remarquer, comme au n° 23, que la formule (22) contient, comme cas particuliers, les formules (20) et (21).

**25.** *Ligne droite.* — Elle se définit comme dans l'autre système de géométrie, et a les mêmes équations :

$$\left.\begin{aligned}
x - x_1 &= \frac{x_1 - x_2}{z_1 - z_2}(z - z_1),\\
y - y_1 &= \frac{y_1 - y_2}{z_1 - z_2}(z - z_1).
\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

parce que, moyennant l'existence de ces équations, appliquées au point $x_3, y_3, z_3$, les deux relations

$$\frac{(1 \pm x_1x_2 \pm y_1y_2 \pm z_1z_2)^2}{(1 \pm x_1^2 \pm y_1^2 \pm z_1^2)\,(1 \pm x_2^2 \pm y_2^2 \pm z_2^2)} = \frac{(1 \pm x_1x_4 \pm y_1y_4 \pm z_1z_4)^2}{(1 \pm x_1^2 \pm y_1^2 \pm z_1^2)\,(1 \pm x_4^2 \pm y_4^2 \pm z_4^2)}$$

et

$$\frac{(1 \pm x_2x_3 \pm y_2y_3 \pm z_2z_3)^2}{(1 \pm x_2^2 \pm y_2^2 \pm z_2^2)\,(1 \pm x_3^2 \pm y_3^2 \pm z_3^2)} = \frac{(1 \pm x_2x_4 \pm y_2y_4 \pm z_2z_4)^2}{(1 \pm x_2^2 \pm y_2^2 \pm z_2^2)\,(1 \pm x_4^2 \pm y_4^2 \pm z_4^2)}$$

entraînent les égalités $x_3 = x_4$, $y_3 = y_4$, $z_3 = z_4$.



**26.** *Longueur de la ligne droite entre deux points.* — En remplaçant $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$, respectivement par $x, y, z, x + dx, y + dy, z + dz$, dans (22), on trouve :

$$\varphi^2(ds) = 1 - \frac{dx^2(1 \pm y^2 \pm z^2) + dy^2(1 \pm x^2 \pm z^2) + dz^2(1 \pm x^2 \pm y^2) \mp 2xydxdy \mp 2xzdxdz \mp 2yzdydz}{(1 \pm x^2 \pm y^2 \pm z^2)^2},$$

$$\sqrt{\pm[1 - \varphi^2(ds)]} = \frac{\sqrt{dx^2(1 \pm y^2 \pm z^2) + dy^2(1 \pm x^2 \pm z^2) + dz^2(1 \pm x^2 \pm y^2) \mp 2xydxdy \mp 2xzdxdz \mp 2yzdydz}}{1 \pm x^2 \pm y^2 \pm z^2}.$$

L'intégrale du second membre, entre $x_1, y_1, z_1$ et $x_2, y_2, z_2$, lorsque les coordonnées courantes $x, y, z$

restent soumises aux équations (23), est analytiquement :

$$\text{arc cos}\ \frac{1 \pm x_1x_2 \pm y_1y_2 \pm z_1z_2}{\sqrt{(1 \pm x_1^2 \pm y_1^2 \pm z_1^2)\,(1 \pm x_2^2 \pm y_2^2 \pm z_2^2)}}. \quad (*)$$

On a donc :

$$\left[\int \sqrt{1 - \varphi'^2(ds)}\right]_1^2 = \text{arc cos}\ \varphi\,(12).$$

Pour la forme particulière $\varphi(x) = \cos kx$, il vient :

$$[s]_1^2 = (12),$$

c'est-à-dire qu'alors, mais alors seulement, la longueur totale de la ligne droite coïncide avec l'intervalle entre les deux extrémités, et tout se passe comme dans la géométrie ordinaire, résultant du premier déterminant (**).

**37.** Toutefois, la constante $k$ ne joue pas ici le même rôle. Dans la géométrie ordinaire, on avait trouvé

$$\varphi\,(x) = kx^2,$$

et alors, que la constante fût réelle ou imaginaire, elle disparaissait dans le déterminant. Il n'en est pas de même ici, et à partir de ce moment il faut distinguer deux cas :

**38.** 1° $k$ imaginaire. Nous ne supposerons pas que cette constante soit une imaginaire complète, de la forme $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, car alors il deviendrait impossible de rendre réelles les valeurs des intervalles entre les points. On aurait une géométrie absolument imaginaire, et nous exclurons ce cas. Nous remplacerons donc simplement $k$ par $k'\sqrt{-1}$, ou cos $kx$ par cos $k'x\sqrt{-1}$, ou encore par ch $k'x$, $k'$ étant maintenant réel.

Les conditions d'homogénéité et de mesure sont remplies. Étudions celle de la continuité. (AB), (AC), (BC) seront choisis

(*) Il est à peine utile de faire observer que les expressions *cos* et *arc cos* n'ont ici qu'un sens purement analytique.

(**) Voir, au sujet des propriétés de la ligne droite, la Note VI.

réels, ainsi que les intervalles des points 1, 2, ... aux points A, B, C ; et de plus tous ces intervalles doivent être choisis tels que $x_a, y_a$ ; $x_b, y_b$ ; $x_c, y_c$ ; $x_1, y_1, z_1$ ; $x_2, y_2, z_2$ ; ... soient réels.

Les conditions relatives au choix de (AB), (AC), (BC), (1A), (1B), (1C), ... seront analogues à celles de la géométrie usuelle.

**20.** Mais ici ces conditions en entraîneront d'autres.

En effet, $\varphi$(AB), ayant pour valeur ch $k'$(AB), doit être plus grand que 1, ce qui serait impossible si l'on adoptait les signes supérieurs. Nous prendrons donc les signes inférieurs.

Nous remarquerons encore que les six quantités $x_a$, ... $y_c$ ne sont pas complètement déterminées par les trois équations (20), et nous ajouterons la seule condition que $x_a^2 + y_a^2$ soit donnée égale à une quantité moindre que l'unité, parce que cette hypothèse, d'ailleurs permise, simplifiera tout ce qui suit. Il suffit, en effet, de jeter un coup d'œil sur les équations pour voir qu'alors les quantités

$$1 - x_a^2 - y_a^2,$$
$$1 - x_b^2 - y_b^2,$$
$$1 - x_c^2 - y_c^2,$$
$$1 - x_1^2 - y_1^2 - z_1^2,$$
$$1 - x_2^2 - y_2^2 - z_2^2,$$
$$\vdots$$

sont toutes positives.

Réciproquement, si les coordonnées $x_a, y_a$ ; $x_b, y_b$ ; $x_c, y_c$ ; $x_1, y_1, z_1$ ; ... sont réelles et satisfont à la condition de limite de grandeur que nous venons d'indiquer, les intervalles (1A), (1B,) (1C), ... seront réels; mais il faudra, de plus, limiter le choix des intervalles de manière qu'à ces systèmes de coordonnées réponde chaque fois un et un seul point de l'espace.

Les équations (21) déterminent complètement $x_1$ et $y_1$, mais donnent pour $z_1$ deux valeurs égales et de signes contraires. Le signe de $z$ se déterminera comme dans le premier système de géométrie.

**40.** Nous pourrons maintenant répéter tout ce que nous avons dit dans le système de géométrie précédent, sauf une seule modification importante.

Tout système de deux équations du premier degré représente une ligne droite, si toutefois ces équations peuvent être vérifiées par des coordonnées répondant aux conditions ci-dessus.

Par deux points, on peut mener une ligne droite et une seule.

A partir d'un point d'une droite, on peut trouver, sur cette droite, deux points, mais deux seulement, distants du premier d'un intervalle donné, ce qui exclut les bifurcations.

Le plan est le lieu des points dont les coordonnées $x$, $y$, $z$ satisfont à une équation du premier degré.

Toute droite qui a deux points dans un plan s'y trouve tout entière.

Par deux droites qui se rencontrent, par une droite et un point extérieur, par trois points non en ligne droite, on peut faire passer un plan et un seul.

Le plan peut être engendré par une droite passant par un point donné et s'appuyant toujours sur une droite donnée; mais on n'obtient pas ainsi le plan tout entier, comme on le verra au numéro suivant.

**41.** Donnons-nous, comme au n° 32, un point A $(x_1, y_1, z_1)$, une droite B $(x = az + b, y = cz + d)$ et un plan C contenant le point A et la droite B; puis cherchons l'intersection, avec la droite B, d'une droite quelconque menée par le point A dans le plan C.

Les calculs seront les mêmes que dans la géométrie analytique ordinaire, et l'on trouvera trois coordonnées réelles, $x_2$, $y_2$, $z_2$, qui ne deviendront infinies que pour la droite

$$x - x_1 = a(z - z_1),$$
$$y - y_1 = c(z - z_1).$$

Mais ici, contrairement à la géométrie ordinaire, il ne suffit

pas que $x_2$, $y_2$ et $z_2$ soient réelles et finies pour déterminer un point de l'espace. Il faut, de plus, que l'on ait :

$$x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 < 1.$$

Si la droite menée par le point A, dans le plan C, a, pour l'une de ses équations

$$x - x_1 = \alpha(z - z_1)$$

et si l'on cherche à donner à la somme $x_2^2 + y_2^2 + z_2^2$ sa valeur-limite, égale à l'unité, on trouvera pour $\alpha$ deux valeurs réelles inégales, satisfaisant à cette condition, et pour ces deux valeurs l'intervalle entre le point 2 et tout point déterminé de la droite B est infini.

Ainsi donc, par un point on peut mener deux parallèles ou asymptotes à une droite donnée, une de chaque côté.

Toutes les droites comprises dans le plan de ces deux parallèles, et dans deux des angles qu'elles forment, sont aussi des parallèles, en ce sens qu'elles ne rencontrent pas la droite donnée, mais elles s'en écartent de plus en plus.

On voit que, sauf en ce qui concerne le parallélisme, la ligne droite jouit des mêmes propriétés que dans la géométrie ordinaire.

Ces systèmes de géométrie, en nombre infini, mais ne différant entre eux que par la valeur du paramètre $k'$, sont les géométries pseudo-sphériques, ou simplement abstraites, exposées en premier lieu par Lobatschewsky et Bolyai. Gauss paraît en avoir eu connaissance antérieurement à leurs écrits, et les premiers principes de cette géométrie ont été indiqués (mais en les considérant comme faux) par le P. Saccheri, dans un ouvrage daté de 1733. Quand on prend $k' = 0$, on rentre dans la géométrie ordinaire.

**43.** 2° Soit maintenant $k$ réel, dans $\varphi(x) = \cos kx$. On peut aussi, évidemment, le supposer positif. Nous définirons nos

coordonnées en adoptant les signes supérieurs, ce qui rend tous les cosinus inférieurs à l'unité, comme cela doit être.

Les conditions de réalité sont toujours analogues à celles des deux autres systèmes de géométrie; mais ici, conformément au premier système (et contrairement au second), les coordonnées pourront varier de $-\infty$ à $+\infty$.

Il n'en sera pas ainsi des intervalles eux-mêmes, comme nous allons le voir.

D'abord, les intervalles tels que $\delta$ n'entrant dans aucune formule autrement que par la fonction cos $k\delta$, qui est périodique, on est tenté de croire que ces intervalles puissent être augmentés ou diminués à volonté d'un multiple quelconque de $\frac{2\pi}{k}$ (avec ou sans changement de signe); mais nous avons renoncé à cette faculté, par la manière dont nous avons opéré l'intégration au n° 36. L'arc cos qui entre dans l'intégrale représente un arc compris entre 0 et $\pi$, et comme cet arc se réduit finalement à $k(12)$, on voit que la valeur maximum de (12) est $\frac{\pi}{k}$.

Ainsi, dans ce système de géométrie, l'intervalle de deux points ne peut jamais dépasser $\frac{\pi}{k}$; et si, parmi les intervalles $\delta$ choisis arbitrairement, il y en avait de plus grands, il faudrait, pour satisfaire à ce que nous avons appelé la condition de mesure, les ramener entre 0 et $\frac{\pi}{k}$, sans changer le cosinus de $k\delta$.

**43.** Nous rencontrons donc ici une complication qui ne se présentait dans aucun des systèmes antérieurs.

Il en est une seconde, consistant en ce que la formule

$$\cos^2 k(12) = \frac{(1 + x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2)^2}{(1 + x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)(1 + x_2^2 + y_2^2 + z_2^2)} \qquad (24)$$

ne détermine pas complètement la valeur de (12), contrairement à ce qui arrivait pour $k(12)^2$ et pour $\mathrm{ch}^2 k(12)$, dans les deux systèmes antérieurs.

Si l'on exécutait un calcul numérique, le doute disparaî-

trait : la valeur à conserver pour le cosinus serait l'unique racine commune à l'équation (24) et à celle qui provient du déterminant (9), mais *a priori* il paraît difficile de prévoir si le cosinus aura le signe + ou le signe −.

S'il était prouvé qu'il fallût toujours prendre le signe +, il en résulterait que l'intervalle de deux points, non seulement ne pourrait dépasser $\frac{\pi}{k}$, comme cela est déjà démontré, mais ne pourrait dépasser $\frac{\pi}{2k}$.

Des géomètres de grand mérite (*) ont traité cette troisième espèce de géométrie en assignant à l'intervalle de deux points le maximum $\frac{\pi}{2k}$; d'autres (**) ont adopté le maximum $\frac{\pi}{k}$; d'autres enfin (***) ne se prononcent pas entre les deux solutions.

Dans mon *Essai sur les principes fondamentaux de la géométrie et de la mécanique*, j'ai admis comme seul maximum possible $\frac{\pi}{k}$ (avec d'autres notations); mais j'en ai donné des raisons géométriques; et j'admets que dans une exposition encore plus abstraite que la mienne, on puisse soutenir la thèse opposée.

Après examen nouveau, je maintiens ma manière de voir, et je vais en donner la raison.

**44.** D'abord, en supposant que le point 2, parti du point 1, se meuve sur la droite 12 d'une manière continue, on voit bien que la fonction cos $k$ (12), partie de la valeur 1, ne peut avoir aucun minimum entre 1 et 0; 0 lui-même ne peut être un minimum que si l'on rejette les valeurs négatives; et si on ne les rejette pas, on ne trouve pas d'autre minimum que −1. Ainsi il n'y a que deux minimums possibles : 0 ou −1, et par conséquent deux maximums possibles pour l'intervalle : $\frac{\pi}{2k}$ ou $\frac{\pi}{k}$.

(*) KLEIN, *Mathematische Annalen*, VI, p. 125; VII, p. 549; IX, p. 476.

(**) FRISCHAUF, *Elemente der absoluten Geometrie*, Leipzig, Teubner, 1876.

(***) NEWCOMB, *Journal de Crelle*, 1877, LXXXIII, p. 293.

Pourrait-on établir une géométrie où existerait le premier de ces maximums? On le peut artificiellement, non seulement pour $\frac{\pi}{2k}$, mais même pour tout maximum inférieur, aussi petit que l'on voudra. En effet, les intervalles pouvant être pris arbitrairement, rien n'empêche d'assigner à ceux qui séparent les points 1, 2, 3, ... des points fondamentaux A, B, C, des valeurs moindres que la moitié du maximum dont il s'agit. Dès lors, tous les intervalles calculés (12), ... devant être moindres que (1A) + (2A), ..., seraient effectivement inférieurs au maximum supposé.

Mais je répète que ce serait là une création artificielle, parce que, dans la géométrie ainsi construite, la loi d'homogénéité de l'espace ne se vérifierait pas. Cette loi exige, en effet, que l'on puisse, sur une droite quelconque, à partir d'un point quelconque, porter tous les intervalles inférieurs au maximum et qu'alors tout intervalle calculé au moyen des précédents se trouve aussi inférieur à ce maximum. Or, cette condition est analytiquement irréalisable pour tout maximum inférieur à $\frac{\pi}{k}$. Nous allons le faire voir nettement pour le prétendu maximum $\frac{\pi}{2k}$.

Il faut s'occuper, en premier lieu, du signe des radicaux qui figureront aux dénominateurs des cosinus des intervalles, lorsque, pour obtenir le numérateur, on se borne à supprimer l'exposant 2 dans les formules (20), (21) et (22).

On voit d'abord que dans les formules (21), les trois radicaux peuvent être pris de même signe; cette hypothèse suffit pour déterminer entièrement les valeurs de $x_1$, $y_1$ et $z_1^2$, et dès lors le signe du radical se trouve aussi déterminé. Il en est de même pour le point 2.

On verra de plus, dans la Note III, que si les six radicaux de 1 et 2 sont tous positifs ou tous négatifs, le radical de (12) est positif, tandis que si trois radicaux sont positifs et les trois autres négatifs, le radical de (12) est négatif.

Supposons maintenant que nous déterminions *a priori* les douze quantités $x_a$, $x_b$, $x_c$, $y_a$, $y_b$, $y_c$, $x_1$, $y_1$, $z_1$, $x_2$, $y_2$, $z_2$, de

manière que les neuf numérateurs

$$\begin{array}{l} 1 + x_a x_b + y_a y_b \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ 1 + x_1 x_a + y_1 y_a, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ 1 + x_2 x_a + y_2 y_a, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{array}$$

soient tous positifs, mais que le numérateur

$$1 + x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

soit négatif.

Il suffit pour cela de prendre

$x_1$ et $y_1$ très grands et positifs,
$x_2$ et $y_2$ très grands et négatifs,

et toutes les autres quantités positives et très petites, suffisamment petites pour que les termes $x_1x_2 + y_1y_2$ soient prépondérants dans le dernier numérateur et le terme 1 dans tous les autres.

Prenons ensuite positivement les neuf radicaux de (20) et (21). On trouvera donc, pour les cosinus relatifs à (AB), (AC), (BC), (1A), (1B), (1C), (2A), (2B), (2C), des valeurs positives, c'est-à-dire que tous ces intervalles seront inférieurs à $\frac{\pi}{2k}$.

Réciproquement, si l'on s'était donné *a priori* lesdits intervalles, ainsi que les valeurs de $x_a$, $x_b$, $x_c$, $y_a$, $y_b$, $y_c$, on n'aurait pas pu trouver d'autres valeurs que les précédentes pour $x_1$, $y_1$, $z_1$, $x_2$, $y_2$, $z_2$, sauf toutefois les signes de $z_1$ et de $z_2$, lesquels n'ont pas d'importance, puisque nous avons eu soin de rendre prépondérante, dans (22), la somme $x_1x_2 + y_1y_2$.

Les radicaux de (20) et (21) étant positifs, celui de (22) l'est

aussi, et comme le numérateur est négatif, le cosinus de $k(12)$ est négatif, et l'intervalle (12) est forcément plus grand que $\frac{\pi}{2k}$, ce qui montre l'impossibilité de l'hypothèse.

La même impossibilité n'existe pas quand on prend le maximum égal à $\frac{\pi}{k}$. Dans cette nouvelle hypothèse, la valeur-limite de cos $k(12)$ est $-1$, ce qui ne peut arriver que pour $x_2 = x_1$, $y_2 = y_1$, $z_2 = z_1$. On est donc obligé alors de renoncer à représenter par trois coordonnées un point unique de l'espace; tout système de trois coordonnées représente deux points, distants entre eux du maximum $\frac{\pi}{k}$ et que nous appellerons *opposés*. La formule $\cos^2 k(12)$, considérée isolément, et abstraction faite des relations des points 1 et 2 avec d'autres points, donne deux cosinus positifs et deux négatifs, correspondant à quatre intervalles : deux plus petits que $\frac{\pi}{2k}$ et deux plus grands.

**45.** Je répéterai ici que je ne conteste nullement la possibilité d'établir des théories plus abstraites que les miennes; mais dans mes conceptions, qui restent toujours réelles et matériellement réalisables, il n'y a que trois systèmes de géométrie possibles : celui d'Euclide, celui de Lobatschewsky et celui dont je traite en ce moment (mais avec l'intervalle maximum $\frac{\pi}{k}$ et non $\frac{\pi}{2k}$), et qui paraît avoir été considéré en premier lieu par Riemann.

**46.** Dans cette dernière géométrie, toute droite, tout plan, toute ligne ou toute surface ayant des équations déterminées (et assujettie à contenir tous les points dont les coordonnées satisfont à ces équations), contient nécessairement les opposés de tous ses points.

La ligne droite se ferme donc comme les grands cercles de la sphère, et toutes les propriétés relatives à deux points d'une droite subissent une exception quand ces deux points sont des pôles opposés.

Deux droites quelconques se coupent donc en deux points opposés, et le parallélisme est impossible.

Cette géométrie a reçu le nom de géométrie sphérique, ou doublement abstraite.

Quand on prend $k = 0$, on rentre dans la géométrie ordinaire.

**47.** *Géométrie expérimentale.* — Jusqu'à présent, dans tous les systèmes que nous avons considérés, même les systèmes analytiques ou géométriques, il y avait un certain nombre d'intervalles arbitraires.

Dans la nature, il n'y a rien d'arbitraire, et les intervalles des points s'y mesurent par comparaison, au moyen de la notion expérimentale des corps solides (règles, compas, etc.).

Cependant si l'on veut rapprocher, autant que possible, la géométrie expérimentale des géométries purement théoriques que nous venons d'exposer, il ne faut pas supposer que l'on ait mesuré ainsi *tous* les intervalles, mais seulement le nombre strictement nécessaire.

Il en sera donc ici comme dans les systèmes appelés géométriques ou analytiques. A chaque point nouveau que l'on introduit, les trois intervalles qui étaient arbitraires deviennent des intervalles mesurés expérimentalement, et tous les autres sont des intervalles calculés au moyen de l'une quelconque des formules (8) ou (9).

La géométrie reste donc absolument vraie, quant à ses formules, et non approximative. Mais il y aura lieu d'examiner si les intervalles calculés sont d'accord avec les mesures expérimentales que l'on aurait pu en prendre directement. Celle des formules (8) ou (9) qui réalisera le mieux cet accord sera la véritable formule de la géométrie expérimentale ou physique.

**48.** Rigoureusement parlant, il ne serait pas nécessaire de considérer un système complet de points, ou l'espace tout entier, pour arriver à ce résultat. Si, comme nous l'avons supposé, l'espace est homogène, c'est-à-dire que les mêmes formules sont applicables à toutes ses parties, il suffirait d'un système de cinq points, dont les dix intervalles seraient mesurés expérimentalement avec une approximation indéfinie,

pour décider laquelle des formules (8) ou (9) reproduit exactement ce résultat.

Et il faut bien que l'une de ces formules y satisfasse, sans quoi il n'existerait point de géométrie physique, aucune autre relation n'étant analytiquement possible sans contradiction, à moins que notre espace ne soit pas à trois dimensions, hypothèse que l'expérience démentirait plus complètement encore.

**49.** Un autre critérium de la véritable géométrie à adopter peut consister dans la forme de la ligne droite. Chaque système essayé donnera pour cette ligne une forme différente, et l'on doit choisir celle qui se rapprochera le plus de la droite physique, c'est-à-dire d'une arête faisant partie d'un corps solide et qui reste immobile quand on en fixe deux points.

**50.** Bien que les deux derniers procédés de recherche paraissent simples, ils sont peu pratiques, et dans la réalité c'est le premier qui a été employé, c'est-à-dire *la concordance entre les intervalles calculés et leur mesure expérimentale.*

L'expérience s'est prononcée à cet égard d'une manière complète. Les hommes n'ont jamais employé que la géométrie répondant à la formule (8), et ils n'ont jamais trouvé de contradiction entre leurs résultats et les mesures directes. La géométrie exposée dans les nos 18 à 33 répond donc à tous les besoins et doit être considérée comme la véritable géométrie expérimentale, en même temps qu'elle est la plus simple des géométries théoriquement possibles.

Il ne faut pas oublier, cependant, que pour les valeurs très petites de $k$ et de $k'$, les géométries sphérique et pseudo-sphérique convergent indéfiniment vers la géométrie usuelle. Donc, tant que l'on trouvera expérimentalement $k$ ou $k' = 0$, on pourra prétendre, à la rigueur, que l'expérience a manqué de précision et que $k$ ou $k'$ n'est pas nul, mais seulement très petit.

La réciproque n'est pas vraie. Si un jour le perfectionnement des instruments d'optique permettait de donner aux mesures une précision beaucoup plus grande qu'aujourd'hui, on pourrait être obligé de changer de formules et de prendre,

au lieu de (8), la formule (9), avec l'une des formes $\varphi$ qui sont possibles, et une valeur très petite, mais non nulle, de $k$ ou de $k'$. Le fait est improbable, mais non impossible. Tant qu'il ne se sera pas produit, la seule géométrie à employer est évidemment celle qui découle de la formule (8) et qui est exposée dans les nos 18 à 33.

*Inanité des tentatives de démonstration des postulatums de la géométrie ordinaire.*

**51.** Après tout ce qui précède, est-il encore nécessaire de réfuter l'erreur des esprits attardés qui croient pouvoir trouver des démonstrations théoriques des principes expérimentaux de la géométrie ordinaire, et en particulier du plus célèbre de tous, le principe de la parallèle unique, équivalent au postulatum d'Euclide?

Nous venons de voir que les systèmes de géométrie théoriquement possibles sont en nombre infini, bien qu'ordinairement divisés en trois classes ou espèces; et que pour distinguer entre eux, ou même pour écarter un seul de ces systèmes, il a fallu invoquer l'expérience.

Or, le principe de la parallèle unique n'est vrai que dans un de ces groupes; dans un autre, il y a deux parallèles (ou une infinité, selon la manière de l'entendre); dans le troisième, le parallélisme est impossible.

Démontrer ce principe sans invoquer l'expérience équivaudrait donc à démontrer l'impossibilité, même théorique, des systèmes où ce principe n'existe pas, c'est-à-dire à démontrer le contraire de ce qui a été établi dans le présent mémoire.

Quelle que fût, en effet, la forme de la démonstration, elle pourrait toujours être transformée dans les notations que nous avons adoptées, et en la comparant avec nos calculs, on aboutirait finalement à une contradiction ou à la découverte d'une erreur matérielle.

Il y a donc lieu d'abandonner de pareilles tentatives, et de reconnaître à la géométrie usuelle son véritable caractère, qui

est de constituer le plus simple des systèmes de géométrie théoriquement possibles, en même temps qu'elle s'accorde avec tous les résultats de l'expérience.

---

## NOTE I.

*Sur la seconde racine de l'équation* (17).

Nous avons admis, dans le texte, que la véritable valeur de $\varphi(23)$, tirée de l'équation (17), est toujours

$$\varphi(23) = (x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 + (z_2 - z_3)^2.$$

Le doute pourrait provenir uniquement de ce que l'équation (17) a deux racines.

Commençons par montrer que la seconde racine algébrique de l'équation, supposée différente de la première, ne peut être indépendante de $x_1, y_1, z_1$.

En effet, si elle en était indépendante, on pourrait poser $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$, $z_1 = z_2$ (il s'agit ici d'une opération purement algébrique, qui n'a rien de commun avec la signification géométrique des lettres), et si l'équation ainsi transformée avait encore deux racines algébriques bien déterminées, ces racines devraient être les mêmes qu'avant la substitution.

Opérant cette substitution, retranchant la seconde ligne de la troisième, ainsi que la seconde colonne de la troisième et égalant à $\delta$ la différence entre la seconde racine et la première, le déterminant devient :

$$\begin{vmatrix}
0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 0 & (x_2-x_a)^2+\cdots & (x_2-x_b)^2+\cdots & (x_2-x_3)^2+\cdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta \\
1 & (x_2-x_a)^2+\cdots & 0 & 0 & (x_a-x_b)^2+\cdots & (x_a-x_3)^2+\cdots \\
1 & (x_2-x_b)^2+\cdots & 0 & (x_a-x_b)^2+\cdots & 0 & (x_b-x_3)^2+\cdots \\
1 & (x_2-x_1)^2+\cdots & \delta & (x_a-x_3)^2+\cdots & (x_b-x_3)^2+\cdots & 0
\end{vmatrix} = 0.$$

Or cette équation, bien qu'étant encore du second degré en $\delta$, n'a pas d'autre racine algébrique que $\delta = 0$.

Donc la seconde racine algébrique de l'équation (17) serait égale à la première, ce qui est contre l'hypothèse.

Ainsi donc cette seconde racine n'est pas indépendante de $x_1, y_1, z_1$.

Cela posé, faisons varier $x_1, y_1, z_1$, non plus brusquement, mais de quantités suffisamment petites pour que les signes de $z_2$ et de $z_3$, qui dépendent de la position du point $x_1, y_1, z_1$ (n° 22), ne puissent changer (*). Ce changement étant d'ailleurs le seul qui pût se produire, toutes les lettres contenues dans l'équation (excepté $x_1$, $y_1$ et $z_1$) conserveraient leurs valeurs. Or maintenant $\varphi(23)$, qui est resté invariable puisque les points 2 et 3 n'ont pas changé, ne pourrait plus être représenté, ni par la première racine, qui a déjà été rejetée, ni par la seconde, qui varie avec $x_1, y_1, z_1$. On aboutit donc à une contradiction, et il en résulte que pour des points 2 et 3, absolument quelconques, $\varphi(23)$ est toujours représenté par

$$(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 + (z_2 - z_3)^2,$$

et jamais par une valeur différente.

---

## NOTE II.

*Démonstration du fait que les déterminants* (8) *et* (9) (n° 14) *satisfont à la condition des six points* (**).

Considérons d'abord le déterminant (8).

(*) A la rigueur, cette considération empiète peut-être un peu sur le principe de continuité, dont il n'est question dans le texte que plus loin.

(**) Le principe des calculs développés dans cette Note et dans la suivante nous a été communiqué par M. P. Mansion.

Il s'agit de démontrer que, si l'on représente par (12345) le déterminant

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & n_{12} & n_{13} & n_{14} & n_{15} \\ 1 & n_{12} & 0 & n_{23} & n_{24} & n_{25} \\ 1 & n_{13} & n_{23} & 0 & n_{34} & n_{35} \\ 1 & n_{14} & n_{24} & n_{34} & 0 & n_{45} \\ 1 & n_{15} & n_{25} & n_{35} & n_{45} & 0 \end{vmatrix},$$

l'existence des trois équations

$$(a). \quad \left\{ \begin{array}{l} (12345) = 0, \\ (12346) = 0, \\ (12356) = 0, \end{array} \right.$$

entraine forcément celle de :

$$\begin{array}{l} (12456) = 0, \\ (13456) = 0, \\ (23456) = 0, \end{array}$$

quelle que soit la signification des dix quantités $n$

Considérons 16 quantités auxiliaires :

$$x_1, \ldots, x_4,$$
$$y_1, \ldots, y_4,$$
$$z_1, \ldots, z_4,$$
$$u_1, \ldots, u_4.$$

liées par les 16 équations suivantes :

$$(b)\quad n_{pq} = (x_p - x_q)^2 + (y_p - y_q)^2 + (z_p - z_q)^2 + (u_p - u_q)^2$$

($p$ et $q$ variant de 1 à 4 : 6 équations).

$$(c)\ \ldots\ldots \left\{ \begin{array}{r} x_1 = y_1 = z_1 = u_1 = 0 \\ y_2 = z_2 = u_2 = 0 \\ z_3 = u_3 = 0 \\ u_4 = 0 \end{array} \right\} \text{(10 équations).}$$

Ces 16 quantités étant déterminées, calculons 4 autres quantités $x_5, y_5, z_5, u_5$, par les 4 équations :

$$n_{r5} = (x_r - x_5)^2 + (y_r - y_5)^2 + (z_r - z_5)^2 + (u_r - u_5)^2,$$

où $r$ varie de 1 à 4 ; puis de même les 4 quantités $x_6, y_6, z_6, u_6$, par les équations :

$$n_{s6} = (x_s - x_6)^2 + (y_s - y_6)^2 + (z_s - z_6)^2 + (u_s - u_6)^2,$$

où $s$ varie encore de 1 à 4.

Servons-nous maintenant des 24 quantités $x_1, \ldots, u_6$, ainsi déterminées, pour transformer les équations données :

$$(12345) = 0,$$

$$(12346) = 0.$$

Nous ferons le calcul en détail pour la première équation seulement.

Le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 & u_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 & u_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 & u_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 & u_4 \\ 1 & x_5 & y_5 & z_5 & u_5 \end{vmatrix} = D$$

peut se mettre, en vertu d'une propriété bien connue, sous la forme :

$$-\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_1^2+y_1^2+z_1^2+u_1^2 & x_1 & y_1 & z_1 & u_1 \\ 1 & x_2^2+y_2^2+z_2^2+u_2^2 & x_2 & y_2 & z_2 & u_2 \\ 1 & x_3^2+y_3^2+z_3^2+u_3^2 & x_3 & y_3 & z_3 & u_3 \\ 1 & x_4^2+y_4^2+z_4^2+u_4^2 & x_4 & y_4 & z_4 & u_4 \\ 1 & x_5^2+y_5^2+z_5^2+u_5^2 & x_5 & y_5 & z_5 & u_5 \end{vmatrix},$$

ou bien encore sous la forme équivalente :

$$\frac{1}{16}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_1^2+y_1^2+z_1^2+u_1^2 & 1 & -2x_1 & -2y_1 & -2z_1 & -2u_1 \\ x_2^2+y_2^2+z_2^2+u_2^2 & 1 & -2x_2 & -2y_2 & -2z_2 & -2u_2 \\ x_3^2+y_3^2+z_3^2+u_3^2 & 1 & -2x_3 & -2y_3 & -2z_3 & -2u_3 \\ x_4^2+y_4^2+z_4^2+u_4^2 & 1 & -2x_4 & -2y_4 & -2z_4 & -2u_4 \\ x_5^2+y_5^2+z_5^2+u_5^2 & 1 & -2x_5 & -2y_5 & -2z_5 & -2u_5 \end{vmatrix}.$$

Le carré du déterminant D est donc égal au produit des deux derniers déterminants, et en effectuant ce produit par la

règle ordinaire, on trouve :

$$D^2 = -\frac{1}{16}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & n_{12} & n_{13} & n_{14} & n_{15} \\ 1 & n_{12} & 0 & n_{23} & n_{24} & n_{25} \\ 1 & n_{13} & n_{23} & 0 & n_{34} & n_{35} \\ 1 & n_{14} & n_{24} & n_{34} & 0 & n_{45} \\ 1 & n_{15} & n_{25} & n_{35} & n_{45} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{16}(12345),$$

d'où :

$$(12345) = -16\,D^2 = -16\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 & u_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 & u_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 & u_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 & u_4 \\ 1 & x_5 & y_5 & z_5 & u_5 \end{vmatrix}^2.$$

Opérant exactement de même pour le déterminant (12346), on trouvera :

$$(12346) = -16\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 & u_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 & u_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 & u_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 & u_4 \\ 1 & x_6 & y_6 & z_6 & u_6 \end{vmatrix}^2.$$

Introduisons maintenant les équations (*c*), ainsi que les conditions (12345) = 0, (12346) = 0.

(12345) devient :

$$-16\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_3 & y_3 & 0 & 0 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 & 0 \\ 1 & x_5 & y_5 & z_5 & u_5 \end{vmatrix}^2 = -16(x_2y_3z_4u_5)^2.$$

Il faut donc que le produit $x_2 y_3 z_4 u_5$ soit nul.

Or je dis que cela entraîne la nullité de $u_5$, quels que soient les autres facteurs, fussent-ils même nuls.

En effet, supposons que $u_5$ ait une valeur déterminée $k$, différente de zéro.

$x_2$, $y_3$ et $z_4$ ne sont fonctions, d'après les équations (*b*) et (*c*), que des six nombres $n_{12}$, ... $n_{34}$. Faisons varier ces nombres de quantités aussi petites que l'on voudra, mais réglées de telle manière que $x_2$, $y_3$ et $z_4$ ne soient plus nuls. L'effet de ces variations *aussi petites que l'on veut* et des variations correspondantes des autres quantités $n$, réglées par les équations (*a*), serait donc de faire sauter brusquement $u_5$ de la valeur $k$ à la valeur 0, ce qui est impossible. Donc $u_5$ est toujours nul.

On démontrera de même, au moyen du second déterminant, que $u_6 = 0$.

Si l'on essaye d'appliquer au déterminant (12356) les mêmes calculs qu'aux deux premiers, la différence consistera en ce que l'on ne possède pas l'équation

$$n_{56} = (x_5 - x_6)^2 + (y_5 - y_6)^2 + (z_5 - z_6)^2 + (u_5 - u_6)^2.$$

On trouvera donc, en posant le second membre égal à $n'_{56}$ :

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 & u_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 & u_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 & u_3 \\ 1 & x_5 & y_5 & z_5 & u_5 \\ 1 & x_6 & y_6 & z_6 & u_6 \end{vmatrix}^2 = -\frac{1}{16} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & n_{12} & n_{13} & n_{15} & n_{16} \\ 1 & n_{12} & 0 & n_{23} & n_{25} & n_{26} \\ 1 & n_{13} & n_{23} & 0 & n_{35} & n_{36} \\ 1 & n_{15} & n_{25} & n_{35} & 0 & n'_{56} \\ 1 & n_{16} & n_{26} & n_{36} & n'_{56} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Mais d'autre part, on donne l'équation :

$$(12356) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & n_{12} & n_{13} & n_{15} & n_{16} \\ 1 & n_{12} & 0 & n_{23} & n_{25} & n_{26} \\ 1 & n_{13} & n_{23} & 0 & n_{35} & n_{36} \\ 1 & n_{15} & n_{25} & n_{35} & 0 & n_{56} \\ 1 & n_{16} & n_{26} & n_{36} & n_{56} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Il s'agit de prouver que l'on peut en déduire :

$$n_{56} = n'_{56} = (x_5 - x_6)^2 + (y_5 - y_6)^2 + (z_5 - z_6)^2 + (u_5 - u_6)^2,$$

bien que l'équation du second degré exprimée par le déterminant ait deux racines, difficulté analogue à celle qui s'est présentée dans la Note I, mais moindre ici.

En effet, tout se réduit à montrer qu'en choisissant de deux manières différentes les valeurs de $x_2, \dots x_6, y_3, \dots y_6, z_4, \dots z_6$, on peut trouver deux valeurs différentes pour $n'_{56}$. Ce seront les deux racines en question, donc l'une des deux sera forcément égale à $n_{56}$, et l'on choisira les valeurs correspondantes de $x_2 \dots z_6$.

Mais précisément parce qu'il y a tant de combinaisons possibles, et qu'elles doivent se réduire à deux, il s'agit de prouver nettement qu'elles ne se réduisent pas à une seule, différente de $n_{56}$.

Fixons arbitrairement $x_2$, $y_3$, mais donnons à $z_4$, successivement, les deux valeurs, égales et de signes contraires, que les équations lui attribuent.

Dans les équations en $x_5$, $y_5$, $z_5$, $u_5$ (où $u_5 = 0$), choisissons pour $x_5$ et $y_5$ l'une quelconque des valeurs données par les solutions; $z_5$ aura deux valeurs égales et de signes contraires suivant les valeurs de $z_4$. On peut raisonner de même pour $z_6$,

mais là il suffit de prendre une seule valeur, comme pour $x_6$ et $y_6$. Il en résulte qu'à cause des deux valeurs de $z_5$, la quantité

$$(x_5 - x_6)^2 + (y_5 - y_6)^2 + (z_5 - z_6)^2$$

aura elle-même deux valeurs, ce qu'il fallait prouver.

Il y aurait exception si l'on avait $z_5 = 0$, ou $z_6 = 0$; mais cela ne pourrait arriver qu'à cause d'une relation particulière entre les $n$ : $\chi(n_{15}, n_{25}, n_{35}, n_{45}) = 0$, ou $\chi(n_{16}, n_{26} \ldots) = 0$. Alors on ne trouverait (au moins par cette méthode) qu'une seule racine $n'_{56}$. Or la différence entre cette racine et $n_{56}$, si elle n'est pas nulle, est une quantité déterminée, tandis qu'en modifiant les $n$ de quantités aussi petites que l'on veut, de manière qu'ils ne satisfassent plus à $\chi$, mais bien aux trois équations données, on devrait retrouver brusquement la seconde racine $n_{56}$.

Donc cette hypothèse est impossible, et on peut choisir les coordonnées auxiliaires de manière à avoir :

$$n_{56} = n'_{56} = (x_5 - x_6)^2 + (y_5 - y_6)^2 + (z_5 - z_6)^2 + (u_5 - u_6)^2.$$

A partir de ce moment il y a symétrie parfaite, au point de vue des indices, dans tous les calculs où l'on n'emploie pas directement les équations $(c)$, et par conséquent on trouvera :

$$(12456) = -16 \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 & u_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 & u_2 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 & u_4 \\ 1 & x_5 & y_5 & z_5 & u_5 \\ 1 & x_6 & y_6 & z_6 & u_6 \end{vmatrix}^2,$$

$$(13456) = -16 \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 & u_1 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 & u_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 & u_4 \\ 1 & x_5 & y_5 & z_5 & u_5 \\ 1 & x_6 & y_6 & z_6 & u_6 \end{vmatrix}^2,$$

$$(23456) = -16 \begin{vmatrix} 1 & x_2 & y_2 & z_2 & u_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 & u_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 & u_4 \\ 1 & x_5 & y_5 & z_5 & u_5 \\ 1 & x_6 & y_6 & z_6 & u_6 \end{vmatrix}^2,$$

et en employant maintenant toutes les équations données et trouvées, on voit que ces trois déterminants sont aussi nuls, parce que la dernière colonne ne contient que des zéros. C'est ce qu'il fallait démontrer.

Passons maintenant au déterminant (9).

Il s'agit de démontrer que, si l'on représente par (12345) le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & n_{12} & n_{13} & n_{14} & n_{15} \\ n_{12} & 1 & n_{23} & n_{24} & n_{25} \\ n_{13} & n_{23} & 1 & n_{34} & n_{35} \\ n_{14} & n_{24} & n_{34} & 1 & n_{45} \\ n_{15} & n_{25} & n_{35} & n_{45} & 1 \end{vmatrix},$$

l'existence des trois équations

$$(12345) = 0,$$
$$(12346) = 0,$$
$$(12356) = 0,$$

entraînera encore celle de

$$(12456) = 0,$$
$$(13456) = 0,$$
$$(23456) = 0,$$

quelle que soit la signification des 10 quantités $n$.

Considérons 20 quantités auxiliaires :

$$\begin{array}{cccc} x_1, & x_2, & x_3, & x_4, \\ y_1, & y_2, & y_3, & y_4, \\ z_1, & z_2, & z_3, & z_4, \\ t_1, & t_2, & t_3, & t_4, \\ u_1, & u_2, & u_3, & u_4, \end{array}$$

iées par les 20 équations suivantes :

$$n_{pq} = x_p x_q + y_p y_q + z_p z_q + t_p t_q + u_p u_q$$

($p$ et $q$ variant de 1 à 4 : 6 équations);

$$\left.\begin{array}{l} x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + t_1^2 + u_1^2 = 1 \\ x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 + t_2^2 + u_2^2 = 1 \\ x_3^2 + y_3^2 + z_3^2 + t_3^2 + u_3^2 = 1 \\ x_4^2 + y_4^2 + z_4^2 + t_4^2 + u_4^2 = 1 \end{array}\right\} \text{(4 équations);}$$

$$(d) \left\{\begin{array}{r} y_1 = z_1 = t_1 = u_1 = 0 \\ z_2 = t_2 = u_2 = 0 \\ t_3 = u_3 = 0 \\ u_4 = 0 \end{array}\right\} \text{(10 équations).}$$

Ces 20 quantités étant déterminées, calculons 5 autres quantités :

$$x_5, \quad y_5, \quad z_5, \quad t_5, \quad u_5,$$

par les 5 équations :

$$n_{r5} = x_r x_5 + y_r y_5 + z_r z_5 + t_r t_5 + u_r u_5$$

($r$ variant de 1 à 4 : 4 équations)

et

$$x_5^2 + y_5^2 + z_5^2 + t_5^2 + u_5^2 = 1 ;$$

puis de même les cinq quantités :

$$x_6, \quad y_6, \quad z_6, \quad t_6, \quad u_6,$$

par les équations :

$$n_{s6} = x_s x_6 + y_s y_6 + z_s z_6 + t_s t_6 + u_s u_6$$

($s$ variant de 1 à 4 : 4 équations)

et

$$x_6^2 + y_6^2 + z_6^2 + t_6^2 + u_6^2 = 1.$$

Servons-nous maintenant des 30 quantités $x_1, \ldots u_6$ ainsi déterminées, pour transformer les équations données :

$$(12345) = 0,$$

$$(12346) = 0.$$

Le premier déterminant peut se mettre directement sous la forme :

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & t_1 & u_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & t_2 & u_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 & t_3 & u_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 & t_4 & u_4 \\ x_5 & y_5 & z_5 & t_5 & u_5 \end{vmatrix}^2 .$$

De même le second déterminant (12346) s'écrit :

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & t_1 & u_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & t_2 & u_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 & t_3 & u_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 & t_4 & u_4 \\ x_6 & y_6 & z_6 & t_6 & u_6 \end{vmatrix}^2 .$$

Introduisons maintenant les équations (*d*), ainsi que les conditions (12345) = 0, (12346) = 0.

(12345) devient :

$$\begin{vmatrix} x_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_2 & y_2 & 0 & 0 & 0 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 0 & 0 \\ x_4 & y_4 & z_4 & t_4 & 0 \\ x_5 & y_5 & z_5 & t_5 & u_5 \end{vmatrix} = (x_1 y_2 z_3 t_4 u_5)^2 .$$

De même pour (12346), et l'on démontre comme précédemment que $u_5 = 0$, $u_6 = 0$.

Le déterminant (12356) = 0 ne se prête pas immédiatement

aux mêmes calculs que les deux premiers, parce que l'on ne possède pas l'équation :

$$n_{56} = x_5x_6 + y_5y_6 + z_5z_6 + t_5t_6 + u_5u_6.$$

En posant le second membre égal à $n'_{56}$, on trouve :

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & t_1 & u_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & t_2 & u_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 & t_3 & u_3 \\ x_5 & y_5 & z_5 & t_5 & u_5 \\ x_6 & y_6 & z_6 & t_6 & u_6 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} 1 & n_{12} & n_{13} & n_{15} & n_{16} \\ n_{12} & 1 & n_{23} & n_{25} & n_{26} \\ n_{13} & n_{23} & 1 & n_{35} & n_{36} \\ n_{15} & n_{25} & n_{35} & 1 & n'_{56} \\ n_{16} & n_{26} & n_{36} & n'_{56} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Mais d'autre part on donne l'équation :

$$(12356) = \begin{vmatrix} 1 & n_{12} & n_{13} & n_{15} & n_{16} \\ n_{12} & 1 & n_{23} & n_{25} & n_{26} \\ n_{13} & n_{23} & 1 & n_{35} & n_{36} \\ n_{15} & n_{25} & n_{35} & 1 & n_{56} \\ n_{16} & n_{26} & n_{36} & n_{56} & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

et l'on démontrera comme précédemment que l'on peut choisir les variables auxiliaires de manière à avoir :

$$n_{56} = n'_{56} = x_5x_6 + y_5y_6 + z_5z_6 + t_5t_6 + u_5u_6.$$

A partir de ce moment, il y a symétrie parfaite, au point de vue des indices, dans tous les calculs où l'on n'emploie pas

directement les équations (*d*), et par conséquent on trouvera :

$$(12456) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & l_1 & u_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & l_2 & u_2 \\ x_4 & y_4 & z_4 & l_4 & u_4 \\ x_5 & y_5 & z_5 & l_5 & u_5 \\ x_6 & y_6 & z_6 & l_6 & u_6 \end{vmatrix}^2 ;$$

de même pour (13456) et (23456); et en employant maintenant toutes les équations données et trouvées, on voit que ces trois déterminants sont aussi nuls, parce que la dernière colonne ne contient que des zéros. C'est ce qu'il fallait démontrer.

---

## NOTE III.

*Élimination de neuf quantités entre dix équations* (n° 34).

Pour écrire ces équations d'une manière symétrique, nous donnerons à chaque point trois coordonnées, même quand la troisième ($z_a$ par exemple) est nulle. Nous prendrons aussi les signes supérieurs, puisque l'élimination se fait de la même manière dans les deux cas, et que la discussion de l'autre cas est plus simple.

Les dix équations sont alors :

$$\varphi(AB) = \frac{1 + x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b}{\sqrt{(1 + x_a^2 + y_a^2 + z_a^2)(1 + x_b^2 + y_b^2 + z_b^2)}},$$

$$\varphi(AC) = \cdots$$

$$\varphi(BC) = \cdots$$

$$\varphi(1A) = \cdots$$

$$\varphi(1B) = \cdots$$

$$\varphi(1C) = \cdots$$

$$\varphi(2A) = \cdots$$

$$\varphi(2B) = \cdots$$

$$\varphi(2C) = \cdots$$

et enfin :

$$\begin{vmatrix} 1 & \varphi(12) & \varphi(1A) & \varphi(1B) & \varphi(1C) \\ \varphi(12) & 1 & \varphi(2A) & \varphi(2B) & \varphi(2C) \\ \varphi(1A) & \varphi(2A) & 1 & \varphi(AB) & \varphi(AC) \\ \varphi(1B) & \varphi(2B) & \varphi(AB) & 1 & \varphi(BC) \\ \varphi(1C) & \varphi(2C) & \varphi(AC) & \varphi(BC) & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Introduisons des coordonnées nouvelles $p$, $q$, $r$, $s$, $t$, déterminées, par exemple pour le point A, par :

$$\frac{q_a}{p_a} = x_a, \quad \frac{r_a}{p_a} = y_a, \quad \frac{s_a}{p_a} = z_a, \quad t_a = 0,$$

$$p_a^2 + q_a^2 + r_a^2 + s_a^2 + t_a^2 = 1.$$

La coordonnée $t_a$, qui semble inutile, est introduite par raison de symétrie, pour avoir autant de coordonnées qu'il y a de colonnes dans le déterminant; et de même pour les autres points.

En remplaçant dans $\varphi(AB)$, il vient :

$$(e) \quad . \quad . \quad \varphi(AB) = p_a p_b + q_a q_b + r_a r_b + s_a s_b + t_a t_b,$$

en admettant que le signe de $p_a p_b$ soit le même que celui du radical, circonstance sur laquelle nous reviendrons.

De même pour les autres $\varphi$.

Posons :

$$p_1 p_2 + q_1 q_2 + r_1 r_2 + s_1 s_2 + t_1 t_2 = \theta(12).$$

Le déterminant

$$\begin{vmatrix} p_1 & q_1 & r_1 & s_1 & t_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 & s_2 & t_2 \\ p_a & q_a & r_a & s_a & t_a \\ p_b & q_b & r_b & s_b & t_b \\ p_c & q_c & r_c & s_c & t_c \end{vmatrix}$$

est identiquement nul, puisque sa dernière colonne se compose de zéros. On a donc, en l'élevant au carré par la règle ordinaire :

$$\begin{vmatrix} 1 & \theta(12) & \varphi(1A) & \varphi(1B) & \varphi(1C) \\ \theta(12) & 1 & \varphi(2A) & \varphi(2B) & \varphi(2C) \\ \varphi(1A) & \varphi(2A) & 1 & \varphi(AB) & \varphi(AC) \\ \varphi(1B) & \varphi(2B) & \varphi(AB) & 1 & \varphi(BC) \\ \varphi(1C) & \varphi(2C) & \varphi(AC) & \varphi(BC) & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

L'une des racines de cette équation est donc :

$$(f) \quad \left\{ \begin{array}{l} \theta(12) = p_1p_2 + q_1q_2 + r_1r_2 + s_1s_2 + t_1t_2 \\ \qquad = \dfrac{1 + x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{(1 + x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)(1 + x_2^2 + y_2^2 + z_2^2)}}. \end{array} \right.$$

le radical ayant cette fois le signe de $p_1p_2$.

La seconde racine est évidemment :

$$(g) \quad \frac{1 + x_1x_2 + y_1y_2 - z_1z_2}{\sqrt{(1 + x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)(1 + x_2^2 + y_2^2 + z_2^2)}},$$

puisque, dans l'équation, on peut changer $z_1$ en $-z_1$ et $z_2$ en $-z_2$, simultanement ou séparément.

L'une de ces racines doit représenter $\varphi(12)$. On agira donc ici exactement comme dans le premier système de géométrie (ainsi que cela a déjà été dit au n° 39), c'est-à-dire qu'après avoir calculé $z_1^2$, on donnera à $z_1$ un signe arbitraire, puis on choisira $z_2$, ... de manière que $\varphi(12)$, ... soient représentés par $(f)$ et non par $(g)$. Il restera à prouver alors qu'il en sera de même pour un intervalle tel que (23), ne comprenant pas le point 1. Cette démonstration se fera exactement comme dans la Note I.

Il reste à expliquer comment on peut faire en sorte que le signe de la quantité analogue à $p_a p_b$ soit toujours celui du radical correspondant, et ensuite à déterminer complètement le signe du radical dans l'équation $(e)$.

Nous démontrerons (Note VII) que les trois radicaux de $\varphi(AB)$, $\varphi(AC)$, $\varphi(BC)$, peuvent être pris positivement. Dès lors, on choisira les valeurs positives de $p_a$, $p_b$ et $p_c$.

$\varphi(1A)$, $\varphi(1B)$, $\varphi(1C)$ peuvent être pris avec des radicaux de même signe (n° 44), mais ici le signe peut être $+$ ou $-$; on donnera le même signe à $p_1$; puis on agira d'une manière analogue pour $p_2$.

Alors l'équation analogue à $(e)$ sera toujours exacte, et l'on voit de plus que le radical de $\varphi(12)$ sera positif si les six radicaux de 1 et de 2 sont tous de même signe, négatif si les six radicaux en question se partagent par groupes de trois quant à leurs signes. Ceci justifie une autre assertion du n° 44.

L'élimination des n°s 20 et suivants aurait pu se faire d'une manière analogue à celle qui est présentée dans la Note actuelle, mais là nous n'avons pas rencontré trop de difficultés dans l'emploi des coordonnées ordinaires.

## NOTE IV.

*Sur l'impossibilité d'un système de géométrie non compris dans les déterminants* (8) *et* (9) (n° 14).

Après avoir signalé (n° 14) les deux déterminants (8) et (9), d'où nous avons déduit les divers systèmes de géométrie possibles, nous ajoutions (n° 15) :

« On pourrait soutenir qu'en dehors des deux formes trouvées, il en existerait une troisième, distincte des deux autres, vérifiant également la condition des six points, et par conséquent capable d'exprimer la relation entre les 10 intervalles de 5 points de l'espace.

» En attendant que cette question soit complètement résolue par l'analyse pure, nous montrerons plus loin que la découverte d'une nouvelle fonction, si elle était possible, ne conduirait pas à un nouveau système de géométrie, distinct de ceux qui résultent des deux fonctions déjà trouvées. »

Le moment est venu d'accomplir cette promesse, et à cet effet nous allons rechercher directement tous les systèmes de géométrie ayant en commun avec le système usuel les notions de la droite et du plan.

Nous suivrons pour cela la même marche que dans mes *Études de mécanique abstraite* (*), mais en la simplifiant et la généralisant. Quant au principe sur lequel elle est basée, un quart de siècle de réflexions nouvelles ne m'en ont pas fait découvrir un meilleur. Dans un autre mémoire intitulé : *Essai sur les principes fondamentaux de la géométrie et de la mécanique* (**), j'ai reproduit en partie les mêmes idées, en les com-

(*) Mémoire présenté à la Classe des sciences le 1er août 1868 et inséré dans le tome XXI des *Mémoires* in-8°.

(**) *Mémoires de la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, t. III (2e série).

pliquant par l'introduction de la méthode des limites. C'était une concession faite aux idées de l'enseignement actuel et je ne crois pas opportun de la maintenir. Du moment qu'il faut admettre que le rapport de deux longueurs converge vers une limite, autant vaut admettre immédiatement la notion de vitesse; mais pour couper court à tout scrupule, nous écarterons les systèmes de géométrie dont les formules seraient telles qu'elles ne donneraient pas des vitesses déterminées pour tous les points d'une figure plane dont deux points possèdent de pareilles vitesses.

Trigonométrie cinématique. — Le cosinus cinématique d'un angle $\alpha$ est la quantité constante par laquelle il faut multiplier une vitesse quelconque, dirigée suivant l'un des côtés de cet angle, pour obtenir sa composante suivant l'autre côté, lorsque la seconde composante passe par le sommet de l'angle et qu'elle est perpendiculaire à la première.

Le sinus cinématique d'un angle est le cosinus de son complément. Les autres fonctions trigonométriques cinématiques se définissent au moyen du sin et du cos, par les mêmes formules que dans la trigonométrie ordinaire.

Une vitesse $u$ étant décomposée en $u\cos\alpha$ et $u\sin\alpha$, si l'on décompose encore $u\cos\alpha$ et $u\sin\alpha$ suivant la direction de $u$ et une perpendiculaire à $u$, on trouve la formule

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

Une vitesse $u$ étant décomposée en $u\cos(\alpha+\beta)$ et $u\sin(\alpha+\beta)$, si l'on effectue la même décomposition par parties, en ne prenant qu'un seul des angles $\alpha$ ou $\beta$ à la fois, on trouve les formules :

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta,$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha.$$

Les trois formules ainsi trouvées, combinées avec les rela-

tions évidentes $\sin 90^\circ = 1$, $\cos 90^\circ = 0$, suffisent pour calculer, avec une approximation indéfinie, les fonctions trigonométriques cinématiques d'un angle quelconque, et il en résulte que ces fonctions sont les mêmes que les lignes trigonométriques ordinaires (*).

Considérons un triangle ABC, que nous faisons tourner autour du sommet A. Les vitesses absolues des points B et C seront proportionnelles à circ $c$ et circ $b$, et les composantes de ces vitesses dans la direction BC seront dans le rapport de circ $c$ sin B à circ $b$ sin C. D'ailleurs, le côté BC conservant sa longueur, ces deux composantes doivent être égales, donc circ $c$ sin B = circ $b$ sin C, ce que l'on peut exprimer en disant que, dans tout triangle, les circonférences décrites avec les côtés comme rayons sont proportionnelles aux sinus des angles opposés.

Étant donné un triangle quelconque ABC, posons :

$$(h) \quad . \quad . \quad 1 - \frac{k^2}{4\pi^2}\,\mathrm{circ}^2\, a = \frac{(\cos A + \cos B \cos C)^2}{\sin^2 B \sin^2 C} \ (**).$$

Nous pourrons toujours en déduire une valeur réelle pour $k^2$.

(*) Il est étonnant qu'un raisonnement si simple, si primordial, ait pu laisser place à des doutes. Je ne citerai pas toutes les objections qu'on y a faites, mais seulement la plus bizarre. « Êtes-vous bien sûr », me disait-on, « que dans cette cinématique du point, vous n'introduisez pas, au fond, le postulatum d'Euclide? — S'il en est ainsi », répondais-je, « je dois être un maladroit de premier ordre, puisque, introduisant le postulatum dans les prémisses de mon raisonnement, je ne parviens pas à le faire réapparaître dans les conséquences. »

(**) $\pi$ est la limite du rapport de la circonférence au diamètre, lorsque ce dernier décroît indéfiniment. On verra plus loin que cette limite existe. En ce moment, $\pi$ est une simple constante comme $k$, et l'on peut se demander pourquoi nous en introduisons deux. C'est pour conserver à la lettre $k$ une même signification, d'un bout à l'autre de ce Mémoire.

Le théorème de la proportionnalité donne :

$$(i) \quad \ldots \quad \frac{\sin^2 A}{\frac{k^2}{4\pi^2}\operatorname{circ}^2 a} = \frac{\sin^2 B}{\frac{k^2}{4\pi^2}\operatorname{circ}^2 b} = \frac{\sin^2 C}{\frac{k^2}{4\pi^2}\operatorname{circ}^2 c},$$

et par la combinaison des équations $(h)$ et $(i)$, on obtient ensuite :

$$(j) \quad \ldots \quad \begin{cases} 1 - \frac{k^2}{4\pi^2}\operatorname{circ}^2 b = \frac{(\cos B + \cos A \cos C)^2}{\sin^2 A \sin^2 C}, \\ 1 - \frac{k^2}{4\pi^2}\operatorname{circ}^2 c = \frac{(\cos C + \cos A \cos B)^2}{\sin^2 A \sin^2 B}. \end{cases}$$

Ainsi dans tout triangle, on a les cinq formules $(h)$, $(i)$ et $(j)$, la quantité $k$ représentant une même constante, réelle ou imaginaire simple, dans les cinq formules. Il reste à voir si $k$ est aussi constant en passant d'un triangle à un autre.

Mais montrons d'abord qu'il n'y a pas d'exception pour $k = 0$. Si l'équation $(h)$ donnait cette valeur pour $k$, il en résulterait :

$$(\cos A + \cos B \cos C)^2 = \sin^2 B \sin^2 C,$$

équation qui est identique à l'une quelconque de ces deux autres :

$$(\cos B + \cos A \cos C)^2 = \sin^2 A \sin^2 C,$$

$$(\cos C + \cos A \cos B)^2 = \sin^2 A \sin^2 B.$$

Les cinq équations existent donc encore, car dans les équations $(i)$ on aurait soin de ne pas introduire le facteur parasite $\frac{k^2}{4\pi^2}$.

Triangles rectangles. Si, dans les formules qui précèdent, on fait $A = 90^\circ$, on trouve :

$$(k)\quad \left\{\begin{array}{l} \text{circ } b = \text{circ } a \sin B, \\ \text{circ } c = \text{circ } a \sin C, \\ 1 - \dfrac{k^2}{4\pi^2}\text{circ}^2 a = \cot^2 B \cot^2 C, \\ 1 - \dfrac{k^2}{4\pi^2}\text{circ}^2 b = \dfrac{\cos^2 B}{\sin^2 C}, \\ 1 - \dfrac{k^2}{4\pi^2}\text{circ}^2 c = \dfrac{\cos^2 C}{\sin^2 B}, \end{array}\right.$$

formules qui restent vraies pour toutes les valeurs de $k$, y compris la valeur zéro.

Considérons un triangle quelconque ABC, et du sommet C abaissons sur la base AB la perpendiculaire CD. Appelons respectivement A′ et B′ les angles ACD et BCD.

Si $k$ et $k'$ sont les coefficients respectifs des triangles ACD, BCD, on aura, dans ces triangles, en vertu des formules des triangles rectangles :

$$1 - \frac{k^2}{4\pi^2}\text{circ}^2 \text{CD} = \frac{\cos^2 A}{\sin^2 A'},$$
$$1 - \frac{k'^2}{4\pi^2}\text{circ}^2 \text{CD} = \frac{\cos^2 B}{\sin^2 B'}.$$

Mais, si l'on fait glisser le triangle le long de sa base AB, les points de la base ayant la vitesse $v$, et le point C la vitesse $v'$ perpendiculaire à CD (*), les vitesses des points A et C, décomposées suivant AC, seront respectivement $v \cos A$ et $v' \sin A'$;

(*) Admettre que $v' = v$ équivaudrait à admettre le postulatum d'Euclide.

les vitesses de B et de C, décomposées suivant BC, seront de même $v \cos B$ et $v' \sin B'$. On a donc :

$$v \cos A = v' \sin A',$$
$$v \cos B = v' \sin B';$$

d'où, par l'élimination de $v$ et de $v'$ :

$$\frac{\cos A}{\sin A'} = \frac{\cos B}{\sin B'}.$$

En comparant à ce qui précède, on trouve :

$$1 - \frac{k^2}{4\pi^2} \operatorname{circ}^2 CD = 1 - \frac{k'^2}{4\pi^2} \operatorname{circ}^2 CD,$$

d'où

$$k^2 = k'^2.$$

Ainsi, dans deux triangles rectangles qui ont un côté de l'angle droit égal, le coefficient $k$ est le même (*), car ces deux triangles pourront toujours être accolés comme l'étaient les deux triangles rectangles ACD et BCD.

Il en résulte d'abord que le coefficient $k$ est le même dans tous les triangles rectangles, car deux triangles rectangles quelconques, ayant pour côtés de l'angle droit respectivement $a$ et $b$, $c$ et $d$, peuvent être comparés à un troisième triangle rectangle ayant pour côtés de l'angle droit $a$ et $c$, $a$ et $d$, $b$ et $c$, ou $b$ et $d$.

Il en résulte aussi que le coefficient $k$ est le même dans tous les triangles, parce que les formules des triangles quelconques peuvent se déduire de celles des triangles rectangles.

(*) Abstraction faite de son signe, lequel est toujours indifférent, comme les formules l'indiquent.

Nous allons achever maintenant ce qui se rapporte à l'hypothèse $k = 0$.

Considérons un triangle ABC, rectangle en A. L'angle A et le côté $c$ restant constants, supposons que le côté $b$ augmente de $db$, ce qui, en vertu de la décomposition des vitesses, entraîne pour le côté $a$ une augmentation égale à $db \cos C$.

On a :

$$(l) \quad \left\{ \begin{array}{ll} & \operatorname{circ}^2 b = \operatorname{circ}^2 a \sin^2 B, \\ & \operatorname{circ}^2 c = \operatorname{circ}^2 a \sin^2 C, \\ & \sin^2 C = \cos^2 B, \quad \sin^2 B = \cos^2 C, \\ \text{d'où :} & \operatorname{circ}^2 c = \operatorname{circ}^2 a - \operatorname{circ}^2 b. \end{array} \right.$$

Exprimons que la différentielle du second membre est nulle, en représentant provisoirement la dérivée inconnue de circ $a$ par $\varphi(a)$, et en remplaçant, après la différentiation, cos C par sa valeur $\pm \frac{\operatorname{circ} b}{\operatorname{circ} a}$. Il viendra, toutes réductions faites :

$$\varphi(b) = \pm \varphi(a).$$

Ce double signe, qui apparaît pour la première fois, nous place en présence d'une difficulté apparente, qu'il ne faut pas dissimuler, mais bien réduire à sa juste valeur.

$b$ et $a$ sont indépendants l'un de l'autre, et la dérivée $\varphi(a)$, que nous supposons finie, déterminée et continue, ne peut changer de signe qu'en passant par zéro. Si donc on ne prenait pas toujours le signe +, il faudrait admettre que la circonférence, qui croît d'abord avec son rayon, atteindrait un maximum et décroîtrait ensuite.

Sans nous prononcer, *a priori*, sur la possibilité de pareilles variations, observons que nous avons simplement pour objet, dans l'hypothèse $k = 0$, d'établir la relation (8) entre les intervalles de cinq points de l'espace.

Or, nous avons admis que l'espace est homogène, en ce sens que la relation entre les intervalles est la même pour cinq

points quelconques. Si donc cette relation est établie *rigoureusement* pour cinq points à intervalles assez petits, elle sera établie aussi pour cinq points quelconques (*).

Nous pouvons donc prendre tous nos intervalles assez petits pour rester dans les limites où les circonférences augmentent certainement avec leur rayon, et dès lors l'on a, sans ambiguïté :

$$\varphi(b) = \varphi(a),$$

ou, ce qui revient au même :

$$\varphi(a) = \textit{constante} = c.$$

Intégrant entre 0 et $a$, il vient :

$$\text{circ } a = ca.$$

Il en résulte que, dans l'hypothèse $k = 0$, non seulement le rapport de la circonférence au rayon a une limite $c$, mais, de plus, il reste constamment égal à cette limite. Comme nous l'avons appelée précédemment $2\pi$, nous écrirons :

$$\text{circ } a = 2\pi a.$$

Il est bon d'observer, en passant, que l'ambiguïté de signe, devant disparaître dans l'équation

$$\varphi(b) = \pm\, \varphi(a),$$

disparaît en même temps dans

$$\cos C = \pm \frac{\text{circ } b}{\text{circ } a},$$

où le signe + doit seul être conservé.

(*) Il n'en serait pas de même si la relation n'était qu'approximative. Elle pourrait alors être l'expression-limite d'une relation plus compliquée.

Dès lors les quatre premières formules (*l*) deviennent, aussi sans ambiguïté :

$$\text{circ } b = \text{circ } a \sin B,$$

$$\text{circ } c = \text{circ } a \sin C,$$

$$\sin C = \cos B,$$

$$\sin B = \cos C,$$

parce que les circonférences sont positives, et que les cosinus le sont aussi, comme on vient de le voir.

Des deux dernières équations on tire $B + C = 90^\circ$. Ainsi, dans tout triangle rectangle, les deux angles aigus sont complémentaires. Cela suffit pour établir l'existence du rectangle, ayant les quatre angles droits et les côtés opposés égaux.

D'autre part, si l'on introduit la valeur trouvée pour la circonférence dans :

$$\text{circ}^2 a = \text{circ}^2 b + \text{circ}^2 c,$$

il vient :

$$a^2 = b^2 + c^2,$$

c'est-à-dire que le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des autres côtés.

Nous possédons maintenant tout ce qu'il faut pour calculer l'intervalle de deux points en coordonnées ordinaires.

Considérons un système de trois axes rectangulaires OX, OY et OZ. D'un point quelconque de l'espace, abaissons trois perpendiculaires sur ces axes. Les distances comptées depuis l'origine jusqu'aux pieds de ces perpendiculaires représenteront respectivement les coordonnées, $x$, $y$, $z$, du point donné.

Si $x_1, y_1, z_1$ ; $x_2, y_2, z_2$ sont les coordonnées des deux points,

on trouve immédiatement, en n'employant que des rectangles et des triangles rectangles :

$$\delta^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2,$$

formule identique à l'équation (15) du texte, et comme cette expression de l'intervalle de deux points, introduite dans le déterminant (8), pour un système de cinq points, transforme ce déterminant en une identité, quel que soit le sens des lettres $x_1, \ldots$, on voit que la relation (8) entre les intervalles de cinq points est établie dans l'hypothèse $k = 0$.

On voit aussi, ce qui était d'ailleurs assez évident, que les coordonnées introduites analytiquement dans le texte étaient tout simplement les coordonnées ordinaires.

La marche que nous venons de suivre paraîtra peut-être un peu longue ou compliquée pour la géométrie ordinaire; mais je ne pense pas qu'on puisse la simplifier beaucoup; et, en outre, elle a l'avantage de s'appliquer exactement à l'hypothèse de $k$ différent de zéro, comme nous allons le voir en la suivant pas à pas dans cette nouvelle hypothèse, laquelle doit nous conduire à la seconde forme (22) de l'intervalle de deux points et au second déterminant (9).

Les formules $(h)$, $(i)$, $(j)$, $(k)$ étant établies, reprenons notre triangle rectangle ABC et agissons comme précédemment.

Des formules $(k)$ nous tirons par élimination :

$$1 - \frac{k^2}{4\pi^2}\operatorname{circ}^2 c = \frac{1 - \frac{k^2}{4\pi^2}\operatorname{circ}^2 a}{1 - \frac{k^2}{4\pi^2}\operatorname{circ}^2 b}$$

et

$$\cos C = \pm \frac{\operatorname{circ} b}{\operatorname{circ} a}\sqrt{\frac{1 - \frac{k^2}{4\pi^2}\operatorname{circ}^2 a}{1 - \frac{k^2}{4\pi^2}\operatorname{circ}^2 b}}.$$

Différentiant la première, avec $dc = 0$, $da = db \cos C$, puis remplaçant cos C par la valeur tirée de la seconde, il vient, toutes réductions faites :

$$\frac{\varphi(b)}{\sqrt{1 - \frac{k^2}{4\pi^2}\operatorname{circ}^2 b}} = \pm \frac{\varphi(a)}{\sqrt{1 - \frac{k^2}{4\pi^2}\operatorname{circ}^2 a}}.$$

Éliminons d'abord le double signe $\pm$ pour les mêmes raisons (encore plus nécessaires à expliquer ici) que dans l'hypothèse $k = 0$. Il restera :

$$\frac{\varphi(a)}{\sqrt{1 - \frac{k^2}{4\pi^2}\operatorname{circ}^2 a}} = \gamma,$$

d'où, en intégrant entre 0 et $a$ :

$$\operatorname{arc\,sin}\left(\frac{k}{2\pi}\operatorname{circ} a\right) = \frac{k\gamma a}{2\pi}\,(^*),$$

ou, ce qui revient au même :

$$\sin\frac{k\gamma a}{2\pi} = \frac{k}{2\pi}\operatorname{circ} a,$$

ou enfin :

$$\frac{\operatorname{circ} a}{a} = \gamma\,\frac{\sin\dfrac{k\gamma a}{2\pi}}{\dfrac{k\gamma a}{2\pi}}.$$

Pour déterminer $\gamma$, passons à la limite en faisant décroître

(*) Les fonctions arc sin et sin sont prises ici dans leur sens purement analytique, c'est-à-dire déterminées par les séries connues.

On aurait pu faire la même observation pour les angles et mesurer ceux-ci dans une circonférence de longueur $2\pi$ (dont le rayon serait provisoirement inconnu). Alors leurs fonctions trigonométriques seraient déterminées par les mêmes séries. Mais pour les angles il n'y avait pas de doute possible sur le sens des formules.

indéfiniment la valeur de $a$; alors, comme on le sait par la série analytique du sin, le rapport qui se trouve au second membre converge vers l'unité, donc le premier membre converge vers une limite déterminée $\gamma$, ainsi que nous l'avons annoncé plus haut, et puisque nous avons appelé cette limite $2\pi$, il vient :

$$\gamma = 2\pi$$

et

$$\text{circ } a = \frac{2\pi}{k} \sin ka.$$

Nous devons revenir maintenant sur les formules des triangles, qui prennent (comme dans l'hypothèse $k = 0$) une forme plus précise par la suppression des doubles signes. On a vu, en effet, que le signe de cos C doit être +, dans les limites où la circonférence croît avec le rayon, et le signe de cos B doit être + pour les mêmes raisons. Le sin étant naturellement positif, on voit que dans les trois dernières formules ($k$), on peut extraire les racines carrées sans mettre de doubles signes. Il en résulte qu'il en est de même dans les formules ($j$), sans quoi elles seraient en opposition avec les formules des triangles rectangles.

Enfin, en remplaçant partout circ $a$ par $\frac{2\pi}{k} \sin ka$, les formules trouvées deviennent, sans ambiguïté :

Triangles quelconques :

$$\frac{\sin A}{\sin ka} = \frac{\sin B}{\sin kb} = \frac{\sin C}{\sin kc},$$

$$\cos ka = \frac{\cos A + \cos B \cos C}{\sin B \sin C},$$

$$\cos kb = \cdots,$$

$$\cos kc = \cdots$$

Triangles rectangles :

$$\sin kb = \sin ka \sin B,$$

$$\sin kc = \sin ka \sin C,$$

$$\cos ka = \cot B \cot C,$$

$$\cos kb = \frac{\cos B}{\sin C},$$

$$\cos kc = \frac{\cos C}{\sin B},$$

d'où :

$$\cos ka = \cos kb \cos kc,$$

formule qui va être immédiatement généralisée.

Formule $\cos ka = \cos kb \cos kc + \sin kb \sin kc \cos A$.

Elle se vérifie en remplaçant les cos de *ka*, *kb*, *kc* par leurs valeurs en fonction des angles, les sin de *kb* et *kc* par $\frac{\sin ka \sin B}{\sin A}$ et $\frac{\sin ka \sin C}{\sin A}$, puis $\sin^2 ka$ par $1 - \cos^2 ka$, et enfin cos *ka* par sa valeur en A, B, C.

Quadrilatère qui a deux angles drotts et dont on donne les trois côtés *a*, *b*, *c*, adjacents aux angles droits (*a* étant adjacent aux deux angles droits). Calcul du côté *d*.

Menons une diagonale du sommet (*ac*) au sommet (*db*). Nommons *f* sa longueur, *l* et *m* les angles qu'elle forme respectivement avec *c* et *a*. Nous aurons :

$$\cos kd = \cos kc \cos kf + \sin kc \sin kf \cos l.$$

Mais

$$\cos kf = \cos ka \cos kb$$

et

$$\sin kb = \sin kf \sin m = \sin kf \cos l;$$

donc :

$$\cos kd = \cos ka \cos kb \cos kc + \sin kb \sin kc.$$

Quadrilatère ayant trois angles droits et dont on donne

les deux côtés $a$, $b$, adjacents chacun à deux angles droits. Calcul des deux autres côtés.

$x$ étant le côté opposé à $b$, et $y$ le côté opposé à $a$, on a, au moyen d'une diagonale :

$$\cos kx \cos ka = \cos ky \cos kb$$

et, d'après la proposition précédente,

$$\cos ky = \cos kx \cos ka \cos kb + \sin kx \sin kb.$$

On en tire aisément :

$$\operatorname{tg} kx = \operatorname{tg} kb \cos ka,$$

et de même :

$$\operatorname{tg} ky = \operatorname{tg} ka \cos kb.$$

Nous avons tout ce qu'il faut maintenant pour calculer l'intervalle de deux points, donnés par leurs coordonnées $x_1, y_1, z_1$ ; $x_2, y_2, z_2$. Nous définirons ces dernières exactement comme nous l'avons fait dans l'hypothèse précédente, mais nous ne les considérerons que comme provisoires. De plus, le calcul ne sera pas le même, mais plus compliqué, parce que, au lieu de rectangles, nous ne rencontrons ici que des quadrilatères ayant deux ou trois angles droits.

Supposons d'abord, pour plus de simplicité, que les deux points donnés soient dans le plan OXY. En appelant $\delta$ leur intervalle, $\alpha$ et $\beta$ leurs distances respectives à l'axe OX, on a :

$$\cos k\delta = \cos k(x_2 - x_1) \cos k\alpha \cos k\beta + \sin k\alpha \sin k\beta,$$

$$\operatorname{tg} k\alpha = \operatorname{tg} ky_1 \cos kx_1, \quad \operatorname{tg} k\beta = \operatorname{tg} ky_2 \cos kx_2.$$

Les deux dernières équations permettent d'exprimer sin $k\alpha$,

cos $k\alpha$, sin $k\beta$ et cos $k\beta$ en fonction de tg $kx_1$, tg $ky_1$, tg $kx_2$, tg $ky_2$ (*). De plus, cos $k(x_2 - x_1)$ peut aussi s'exprimer de cette manière, et l'on trouve enfin :

$$\cos k\delta = \frac{1 + \operatorname{tg} kx_1 \operatorname{tg} kx_2 + \operatorname{tg} ky_1 \operatorname{tg} ky_2}{\sqrt{(1 + \operatorname{tg}^2 kx_1 + \operatorname{tg}^2 ky_1)(1 + \operatorname{tg}^2 kx_2 + \operatorname{tg}^2 ky_2)}}.$$

Supposons maintenant que les deux points soient quelconques. $\delta$ étant toujours leur intervalle, soit $\delta'$ la projection de cet intervalle sur le plan OXY. Soient $\alpha$ et $\beta$ les distances respectives des points $x_1, y_1, z_1$ ; $x_2, y_2, z_2$ au plan OXY ; soit enfin $\gamma$ la distance du pied de $\alpha$ à l'origine. Nous aurons :

$$\cos k\delta = \cos k\delta' \cos k\alpha \cos k\beta + \sin k\alpha \sin k\beta,$$

$$\operatorname{tg} k\alpha = \operatorname{tg} kz_1 \cos k\gamma = \frac{\operatorname{tg} kz_1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 kx_1 + \operatorname{tg}^2 ky_1}}.$$

De même :

$$\operatorname{tg} k\beta = \frac{\operatorname{tg} kz_2}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 kx_2 + \operatorname{tg}^2 ky_2}}.$$

On peut donc calculer cos $k\alpha$, sin $k\alpha$, cos $k\beta$, sin $k\beta$ en fonction de tg $kx_1$, tg $ky_1$ et tg $kz_1$. De plus, cos $k\delta'$ a la valeur trouvée précédemment pour le cas où les deux points seraient dans le plan OXY, et qui nous a servi aussi, d'ailleurs, à transformer cos $k\gamma$. Nous aurons, toutes réductions faites :

$$\cos k\delta = \frac{1 + \operatorname{tg} kx_1 \operatorname{tg} kx_2 + \operatorname{tg} ky_1 \operatorname{tg} ky_2 + \operatorname{tg} kz_1 \operatorname{tg} kz_2}{\sqrt{(1 + \operatorname{tg}^2 kx_1 + \operatorname{tg}^2 ky_1 + \operatorname{tg}^2 kz_1)(1 + \operatorname{tg}^2 kx_2 + \operatorname{tg}^2 ky_2 + \operatorname{tg}^2 kz_2)}} \text{ (**)}.$$

(*) Ici et plus loin, aucune discussion de signe n'est nécessaire, pour une raison déjà donnée.

(**) Nous avons employé, dans cette dernière recherche, quelques propriétés empruntées à la géométrie de l'espace, mais évidemment indépendantes des hypothèses sur le parallélisme.

Pour passer enfin des coordonnées provisoires aux coordonnées définitives, nous poserons :

$$X_1 = \operatorname{tg} kx_1 \quad \text{ou} \quad \operatorname{tg} kx_1\sqrt{-1},$$

suivant que $k$ sera réel ou imaginaire simple, pour n'avoir, dans les formules finales, que des coordonnées réelles; de même :

$$Y_1 = \operatorname{tg} ky_1 \quad \text{ou} \quad \operatorname{tg} ky_1\sqrt{-1},$$
$$Z_1 = \operatorname{tg} kz_1 \quad \text{ou} \quad \operatorname{tg} kz_1\sqrt{-1},$$

et de même encore pour $X_2$, $Y_2$, $Z_2$ et les autres points.

La formule deviendra :

$$\cos k\delta = \frac{1 \pm X_1X_2 \pm Y_1Y_2 \pm Z_1Z_2}{\sqrt{(1 \pm X_1^2 \pm Y_1^2 \pm Z_1^2)(1 \pm X_2^2 \pm Y_2^2 \pm Z_2^2)}},$$

les signes supérieurs correspondant à l'hypothèse où $k$ est réel, les signes inférieurs à l'hypothèse où $k$ est imaginaire.

En l'élevant au carré, on aurait précisément la formule (22) du texte, puisque l'on a vu (n° 36) que $\varphi(12) = \cos k(12)$.

Or on a vu aussi qu'en remplaçant les intervalles par cette valeur dans le déterminant (9) (n° 14), celui-ci se réduit à une identité. Donc, dans tous les systèmes de géométrie où $k$ n'est pas nul, les intervalles de cinq points sont liés par l'équation (9).

Nous voyons, de plus, maintenant, quelle est la signification géométrique des coordonnées que nous avions introduites analytiquement dans le texte. Elle se rapproche, autant que possible, de la signification des coordonnées ordinaires.

## NOTE V.

*Conditions de réalité des coordonnées* (n^os^ 19 et 28) (*).

Les conditions nécessaires et suffisantes pour que les équations (10) et (11) soient susceptibles d'être vérifiées par des coordonnées réelles, peuvent s'obtenir *a priori* par une transformation des coordonnées.

A cet effet on établira d'abord, par l'analyse seule, les principes suivants :

Il existe des systèmes de neuf nombres réels $a_1$, $b_1$, $c_1$, $a_2$, $b_2$, $c_2$, $a_3$, $b_3$, $c_3$, dont trois sont arbitraires entre certaines limites, et qui satisfont aux équations

$$\begin{aligned}
a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 &= 1,\\
a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 &= 1,\\
a_3^2 + b_3^2 + c_3^2 &= 1,\\
a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 &= 0,\\
a_1a_3 + b_1b_3 + c_1c_3 &= 0,\\
a_2a_3 + b_2b_3 + c_2c_3 &= 0.
\end{aligned}$$

Chacun des systèmes qui satisfont à ces équations vérifie aussi les suivantes :

$$\begin{aligned}
a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 &= 1,\\
b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 &= 1,\\
c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 &= 1,\\
a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 &= 0,\\
a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3 &= 0,\\
b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3 &= 0.
\end{aligned}$$

(*) Cette Note nous a été communiquée par M. le lieutenant Goedseels, répétiteur à l'École militaire.

La transformation des coordonnées se fait, pour chaque point, en posant :

$$x = x_0 + a_1x' + b_1y' + c_1z',$$
$$y = y_0 + a_2x' + b_2y' + c_2z',$$
$$z = z_0 + a_3x' + b_3y' + c_3z'.$$

Dans ces relations, le déterminant $(a_1b_2c_3)$ est égal à $\pm 1$.

Deux ou plusieurs transformations successives peuvent être remplacées par une transformation unique.

Après toute transformation des coordonnées, on peut repasser aux coordonnées primitives par une transformation inverse.

Après une pareille transformation des coordonnées, l'intervalle de deux points continue à s'exprimer par la même fonction. Ainsi $\varphi(1A)$ ou $k(1A)^2$, qui avant la transformation avait pour valeur

$$(x_1 - x_a)^2 + (y_1 - y_a)^2 + (z_1 - z_a)^2,$$

sera, après la transformation :

$$(x'_1 - x'_a)^2 + (y'_1 - y'_a)^2 + (z'_1 - z'_a)^2.$$

Nous rétablissons $z_a$, et nous rétablirions de même $z_b$, $z_c$, qui étaient nuls au n° 19, parce qu'ils ne sont plus nuls, en général, après la transformation.

Une transformation peut toujours être conduite de manière à annuler les trois coordonnées d'un point, deux coordonnées quelconques d'un second point, et l'une de ces mêmes coordonnées pour un troisième point.

Pour le démontrer, il suffit de procéder par des transformations successives, puisque celles-ci peuvent être remplacées pour une transformation unique.

Ces principes établis, pour rechercher si les équations (10) et (11) ont des racines réelles, il suffira de vérifier s'il en est ainsi

après une transformation de coordonnées, que nous effectuerons en annulant, outre $z_a$, $z_b$ et $z_c$, qui sont déjà nuls, les trois quantités $x_a$, $x_b$ et $y_a$.

Pour rapprocher la relation obtenue de la forme ordinaire, nous remplacerons $\varphi(x)$ par $kx^2$, ou même par $x^2$ (car on sait que $k$ doit disparaître), et les équations deviennent alors :

$$
\begin{aligned}
&y_b^2 = \overline{AB}^2,\\
&x_c^2 + y_c^2 = \overline{AC}^2,\\
&x_c^2 + (y_b - y_c)^2 = \overline{BC}^2,\\
&x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = \overline{1A}^2,\\
&x_1^2 + (y_1 - y_b)^2 + z_1^2 = \overline{1B}^2,\\
&(x_1 - x_c)^2 + (y_1 - y_c)^2 + z_1^2 = \overline{1C}^2.
\end{aligned}
$$

On en déduit aisément ces deux conditions de réalité :

$$(m) \quad . \quad . \quad . \quad 4\overline{AB}^2\overline{AC}^2 - (\overline{BC}^2 - \overline{AC}^2 - \overline{AB}^2)^2 > 0.$$

$$
(n) \quad \left\{
\begin{aligned}
&\left[4\overline{AB}^2\overline{AC}^2 - (\overline{BC}^2 - \overline{AC}^2 - \overline{AB}^2)^2\right]\left[4\overline{AB}^2\overline{1A}^2 - (\overline{1B}^2 - \overline{1A}^2 - \overline{AB}^2)^2\right] -\\
&\left[2\overline{AB}^2(\overline{1C}^2 - \overline{1A}^2 - \overline{AC}^2) + (\overline{BC}^2 - \overline{AC}^2 - \overline{AB}^2)(\overline{1B}^2 - \overline{1A}^2 - \overline{AB}^2)\right]^2 \geqq 0.
\end{aligned}
\right.
$$

Ces conditions peuvent s'exprimer en disant, d'abord, que dans chacun des groupes (AC, BC, AB), (1A, 1B, AB), (1A, 1C, AC), (1B, 1C, BC), un intervalle quelconque est plus petit que la somme des deux autres. Pour le premier de ces groupes, cela résulte de ($m$); pour le second, cela résulte du premier terme de ($n$), qui doit être positif.

Pour les deux autres groupes, cela est aussi compris dans l'équation ($n$), mais cette dernière implique des restrictions plus étendues dans le choix des intervalles.

Ayant choisi AB, AC, BC, 1A, 1B, de manière à rendre positifs le premier membre de ($m$) et le premier terme de ($n$), il ne restera plus qu'à choisir 1C, dont la relation ($n$) donnera immédiatement les limites.

Il va sans dire que l'on pourrait diriger les calculs de manière à faire jouer à l'un quelconque des six intervalles le rôle spécial que joue ici l'intervalle 1C.

---

## NOTE VI.

*Sur la ligne droite.*

Aux nos 25 et 35, nous avons établi que le long de la ligne droite, les intervalles s'ajoutent et pour l'établir, nous avons procédé par intégration.

Nous aurions pu employer une méthode purement algébrique, en nous bornant à constater que moyennant l'existence des relations

$$x_3 - x_1 = \frac{x_1 - x_2}{z_1 - z_2}(z_3 - z_1),$$

$$y_3 - y_1 = \frac{y_1 - y_2}{z_1 - z_2}(z_3 - z_1),$$

les deux équations suivantes se réduisent à des identités :

$$\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2} \pm \sqrt{(x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2+(z_2-z_3)^2} = \pm\sqrt{(x_1-x_3)^2+(y_1-y_3)^2+(z_1-z_3)^2},$$

$$\arccos\frac{1 \pm x_1x_2 \pm y_1y_2 \pm z_1z_2}{\sqrt{(1\pm x_1^2\pm y_1^2\pm z_1^2)(1\pm x_2^2\pm y_2^2\pm z_2^2)}} \pm \arccos\frac{1 \pm x_2x_3 \pm y_2y_3 \pm z_2z_3}{\sqrt{(1\pm x_2^2\pm y_2^2\pm z_2^2)(1\pm x_3^2\pm y_3^2\pm z_3^2)}} = \pm\arccos\frac{1 \pm x_1x_3 \pm y_1y_3 \pm z_1z_3}{\sqrt{(1\pm x_1^2\pm y_1^2\pm z_1^2)(1\pm x_3^2\pm y_3^2\pm z_3^2)}},$$

les signes étant convenablement choisis.

Quelque méthode que l'on adopte, on peut remarquer que la ligne droite est caractérisée, dans les trois systèmes de géométrie, par trois propriétés :

Ses équations sont du premier degré.

Si l'on en considère trois points, aucun autre point de l'espace ne peut être distant de deux de ces points comme l'est le troisième.

Le long de cette ligne, les intervalles s'ajoutent.

Et, dans les trois systèmes de géométrie, l'admission d'une seule de ces propriétés suffit pour démontrer l'existence des deux autres, et pour définir complètement la ligne droite.

---

## NOTE VII.

*Sur les signes des radicaux dans les valeurs de* $\varphi(1A)$, $\varphi(1B)$, $\varphi(1C)$, *tirées des équations* (20).

Si, des équations (20) considérées en prenant les signes supérieurs, on déduit les valeurs de $\varphi(1A)$, $\varphi(1B)$, $\varphi(1C)$, en supprimant simplement l'exposant 2 au second membre, ainsi qu'au numérateur du premier, le signe du radical au dénominateur du premier membre devient douteux. C'est là, nous l'avons déjà dit, une difficulté spéciale à la troisième espèce de géométrie.

Cependant, quelques-unes des observations qui vont suivre sont générales et applicables aux trois espèces, mais pour les deux premières elles étaient en quelque sorte évidentes, et ne nécessitaient pas une discussion approfondie.

On a vu, dans la Note III, qu'il y a un grand intérêt, pour la détermination du signe du radical dans (22), à admettre que dans (20) les radicaux puissent être pris positivement.

Le système d'intervalles auquel il faut appliquer les calculs est donné *a priori*, et nous pouvons définir nos coordonnées,

$x_a, \ldots y_c$, par telles équations qu'il nous plaira de choisir, pourvu qu'elles ne soient pas contradictoires, et qu'en outre elles ne limitent pas arbitrairement le champ des valeurs réelles de ces coordonnées, ce qui conduirait à exclure d'une manière factice des systèmes d'intervalles qui ne seraient cependant pas impossibles, c'est-à-dire qui ne seraient pas en contradiction avec le déterminant (9), seule condition qu'ils doivent remplir.

On aurait un exemple d'équations contradictoires si l'on prétendait rendre tous les radicaux positifs, non pas dans (20), mais dans (21). En effet, l'élimination de $\sqrt{1 + x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$ entre ces équations, laisserait subsister deux équations du premier degré entre $x_1$ et $y_1$. Ces deux coordonnées étant ainsi déterminées, on trouverait :

$$\sqrt{1 + x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} = \frac{\varphi(1A)\sqrt{1 + x_a^2 + y_a^2}}{1 + x_1 x_a + y_1 y_a},$$

et deux autres équations analogues. Les trois seconds membres seraient certainement égaux, d'après la manière dont les équations ont été résolues; mais rien ne prouve qu'ils seraient positifs, puisqu'on ne s'est pas servi, dans la résolution, de cette propriété. On doit donc simplement conclure que les trois radicaux peuvent être pris positifs *ou négatifs*.

Il n'en est pas de même pour les équations (20). En prenant

$$\sqrt{1 + x_a^2 + y_a^2} = m, \quad \sqrt{1 + x_b^2 + y_b^2} = n, \quad \sqrt{1 + x_c^2 + y_c^2} = p,$$

$m$, $n$, $p$ étant trois quantités positives arbitraires, on aura :

$$1 + x_a x_b + y_a y_b = \varphi(\mathrm{AB}) mn,$$
$$1 + x_a x_c + y_a y_c = \varphi(\mathrm{AC}) mp,$$
$$1 + x_b x_c + y_b y_c = \varphi(\mathrm{BC}) np,$$

et l'on trouvera toujours six quantités $x_a, \ldots y_c$, réelles *ou imaginaires*, répondant à ces six équations algébriques.

La question est donc de savoir si les racines ne sont pas trop souvent imaginaires, jusqu'au point d'écarter des systèmes d'intervalles qui seraient admissibles.

La réponse à cette question se trouve écrite d'avance au n° 29 : « on ne saurait admettre des coordonnées imaginaires, sans être obligé d'admettre aussi des intervalles imaginaires, ce que nous voulons exclure » et ce qui serait contradictoire avec notre système d'intervalles réels donné *a priori*.

Telle est donc l'assertion qui doit être justifiée. Elle le serait complètement si la formule (22) était établie dans l'hypothèse des trois radicaux positifs, car si une ou plusieurs des trois quantités $x_2$, $y_2$, $z_2$ sont imaginaires, on pourra toujours, et d'une infinité de manières, déterminer des quantités réelles $x_1$, $y_1$, $z_1$ rendant $\varphi^2$ (12) négatif. Or dans la Note III, la formule (22) (ou $f$ de cette Note III) est établie d'une manière irréfutable pour le cas des coordonnées réelles, et comme la valeur de $\theta$(12), donnée par ($f$), est la racine *algébrique* du déterminant qui précède cette équation, cette racine doit être indépendante du sens qu'on attache aux lettres qui y entrent. Elle est donc exacte même pour les valeurs imaginaires, pourvu qu'alors le signe du radical ait encore un sens précis.

Ce sens peut lui être assigné d'après une règle quelconque, comprenant sans discontinuité le cas du radical réel.

On voit donc que l'hypothèse des trois radicaux positifs dans (20) est bien légitime, parce que tous les systèmes d'intervalles que cette hypothèse peut exclure sont exclus à bon droit.

STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES

STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES
510.5
M429
12-13
1892-1893
STORAGE AREA